Modelagem e Avaliação de Desempenho

Pós Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE

Prof. Carlos Marcelo Pedroso

2016

Simulação de Sistemas

- Simulação é a técnica de solução de um problema pela análise de um modelo que descreve o comportamento do sistema utilizando um computador digital.
- Metodologia:
  - Construção de um modelo da situação e reproduzir computacionalmente.
  - Inclusão de alterações para o estudo de otimizações desejadas.

Simulação de Sistemas

- O método de Monte Carlo:
  - Deveu-se a revisão de uma técnica matemática utilizada por cientistas do projeto Manhattan, em Los Alamos, década de 1940, publicada em 1949.
  - Na aplicação desta técnica, os dados são gerados empregando-se um gerador de número aleatórios e uma distribuição de probabilidade que descreve a variável aleatória de interesse.

Simulação de Sistemas

- O método de Monte Carlo
    1. Definir o domínio de entradas possíveis.
    2. Gerar as entradas de acordo com uma distribuição de probabilidade que descreve a entrada.
    3. Realizar o processamento determinístico das entrada.
    4. Agregar os resultados e retornar ao passo 2.

Geração de Variáveis Aleatórias

- Método da inversa
  - Toma-se a distribuição acumulada da variável aleatória, da por $P(X \leq x)=F(x)$.
  - Atribui-se um valor randômico (Ri) entre 0 e 1 para $F(x)$.
  - Calcula-se o valor de x.
  - Desta forma, para cada valor randômico entre 0 e 1 será obtido um valor de x_i.
- Exemplos: distribuição exponencial, distribuição empírica (desenvolvidos em sala).

Geração de Variáveis Aleatórias

- Exercícios:
  - Calcule a expressão para obter uma variável aleatória que segue a distribuição uniforme.
  - Calcule a expressão para obter uma variável aleatória que segue a distribuição triangular.

Geração de Números Randômicos

- Um dos problemas a serem resolvidos é como gerar números randômicos, uniformemente distribuídos entre 0 e 1.
- Gerador Congruente Linear ("LCG")
  - Definido pela equação linear $x_{n+1}=(ax_n+b) \bmod m$
  - Produz uma sequência entre {0, 1, …, m-1}
  - Pode-se chamar $LCG(m, a, b, x_0)$
  - x_0 é a semente (valor inicial)
  - Ansi $C \rightarrow LCG(2^{31}, 1103515245, 12345, 12345)$
  - *Minimal Standard* $\rightarrow LCG(2^{31}, 16807, 0, 1)$

Geração de Números Randômicos

- Método Tausworthe
  - $x_n = \theta_1 x_{n-1} \oplus \theta_2 x_{n-2} \oplus \ldots \oplus \theta_q x_{n-q}$

O método é chamado gerador auto regressivo de ordem q (AR(q)). Este método é utilizado em sistemas criptográficos.

Geração de Variáveis aleatórias

- Algumas distribuções podem não possuir expressão analítica para distribuição acumulada (é o caso da distribuição normal).
- Neste caso, é necessário aplicar outros métodos.
- Um dos métodos é o método “acceptance-rejection”
- Para gerar uma VA X com distribuição F(x):
  - Toma-se uma distribuição G(y), com método analítico conhecido.
  - G deve ser próxima de F, com quociente F/G=c

Geração de Variáveis aleatórias

Acceptance-Rejection Algorithm for continuous random variables

1. Generate a rv Y distributed as G.
2. Generate U (independent from Y).
3. If

$$U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)},$$

then set $X = Y$ ("accept") ; otherwise go back to 1 ("reject").

Acceptance-Rejectio Method

Example 1: Generating a random variable from

$$f_X(x) = 3x^2, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Assume

$$g_X(x) = 1, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Thus

$$\max\left(\frac{f_X(x)}{g_X(x)}\right) = 3 = c.$$

$$\frac{f_X(x)}{cg_X(x)}) = x^2.$$

Algorithm:

1) Generate two uniform random variables U_1 and U_2 from $U(0, 1)$.
2) If $U_2 <= U_1^2$ accept U_1 as the random variable from $f_X(x)$, otherwise go to step 1).

Distribuição Normal

- Aproximação:
  $x_i = F^{-1}(R_i) = [R_i^{0,135} - (1-R_i)^{0,135}]/0,1975$
  - Média 0, desvio padrão 1 [N(0, 1)]

  É possível transformar para qualquer outra média μ e desvio padrão σ, fazendo:
  - $y_i = \mu + \sigma x_i$

Distribuição Normal

- *Método acceptance-rejection:*

1. *Gere duas variáveis randômicas com distr. Uniforme $U(0,1)$, R_1 e R_2*
2. *Seja $x=-\ln R_1$*
3. *Se $R_2 > e^{-(1/2)(x-1)^{\wedge}2}$, volte ao passo 1*
4. *Gere R_3*
5. *Se $R_3>0.5$, retorne $\mu+\sigma x$, caso contrário retorne $\mu-\sigma x$*

Exercício

1- Utilize o Método de Monte Carlo para realizar a simulação de uma fila com um servidor, onde o intervalo entre chegadas segue a distribuição exponencial e o tempo de atendimento também segue a distribuição exponencial. Compare o tempo médio na fila com os resultados obtidos com a teoria de filas, modelo M/M/1.

2- Utilize o Método de Monte Carlo para realizar uma simulação de forma a determinar o valor do número π através de uma simulação.

Análise de resultados

- A análise de resultados de uma simulação deve ser feita de maneira muito cuidadosa
  - Especialmente, não cometa o erro de generalizar resultados específicos
  - Para fazer qualquer tipo de inferência sobre os resultados, é necessário realizar uma análise estatística

Confiança estatística

- Um intervalo de confiança compreende um intervalo numérico que possui uma probabilidade igual a $(1-\alpha)$ de incluir o verdadeiro valor da medida de desempenho sob análise, com um nível de confiança.
  - $(1-\alpha)$ representa o intervalo de confiança.
  - α representa o erro admitido ao se concluir sobre a presença do verdadeiro valor da variável no intervalo calculado.

Confiança estatística

- Suponha que foi simulado o tempo médio na fila em um sistema.
  - Assumindo que a variável aleatória X representa o tempo médio na fila.
  - A simulação foi realizada 5 vezes, tomando-se o cuidado de iniciar a simulação com valores de sementes diferentes

Confiança estatística

Rodada	X
1	63,2
2	69,7
3	67,3
4	64,8
5	72

- Os resultados obtidos foram:

- O semi-intervalo h é calculado por:

$$h = t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

  - n é o número de rodadas
  - σ é o desvio padrão
  - t indica os valores críticos para distr. t student

Valores críticos – t student

Valores de t para υ graus de liberdade

υ	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90
1	63,66	31,82	12,71	6,31	3,08
2	9,92	6,96	4,30	2,92	1,89
3	5,84	4,54	3,18	2,35	1,64
4	4,60	3,75	2,78	2,13	1,53
5	4,03	3,36	2,57	2,02	1,48
6	3,71	3,14	2,45	1,94	1,44
7	3,50	3,00	2,36	1,90	1,42
8	3,36	2,90	2,31	1,86	1,40
9	3,25	2,82	2,26	1,83	1,38
10	3,17	2,76	2,23	1,81	1,37
11	3,11	2,72	2,20	1,80	1,36
12	3,06	2,68	2,18	1,78	1,36
13	3,01	2,65	2,16	1,77	1,35
14	2,98	2,62	2,14	1,76	1,34
15	2,95	2,60	2,13	1,75	1,34
16	2,92	2,58	2,12	1,75	1,34
17	2,90	2,57	2,11	1,74	1,33
18	2,88	2,55	2,10	1,73	1,33
19	2,86	2,54	2,09	1,73	1,33
20	2,84	2,53	2,09	1,72	1,32
21	2,83	2,52	2,08	1,72	1,32
22	2,82	2,51	2,07	1,72	1,32
23	2,81	2,50	2,07	1,71	1,32
24	2,80	2,49	2,06	1,71	1,32
25	2,79	2,48	2,06	1,71	1,32
26	2,78	2,48	2,06	1,71	1,32
27	2,77	2,47	2,05	1,70	1,31
28	2,76	2,47	2,05	1,70	1,31
29	2,76	2,46	2,04	1,70	1,31
30	2,75	2,46	2,04	1,70	1,31
40	2,70	2,42	2,02	1,68	1,30
60	2,66	2,39	2,00	1,67	1,30
120	2,62	2,36	1,98	1,66	1,29
> 120	2,58	2,33	1,96	1,65	1,28

Confiança estatística

No caso anterior, a média calculada é 67.22 e o desvio padrão σ é igual a 3.84;

- Para 99% de confiança, α=0,05 e $t_{4,\ 0.975}$=2.78
- O valor de h calculado é de 4,77
- Com 97.5% de confiança a verdadeira média estará entre 62.44 e 71.99.

Exercícios

- Utilize a simulação de fila realizada anteriormente, para chegadas exponenciais e atendimentos exponenciais.
  - Calcule o semi intervalo h para um nível de confiança de 99%
  - O que fazer para melhorar a resposta? (melhorar a resposta implica em reduzir ao mínimo o valor de h).

Exercícios

- Suponha novamente o sistema com uma fila. No entanto, desta vez, suponha que a chegada é modelada por uma distribuição normal N(5,10) e o atendimento é modelado também por uma distribuição normal N(4, 20).
  - Determine o tempo médio de fila e tempo médio no sistema.
  - Realize a simulação de forma a obter uma boa resposta para para o nível de confiança de 99%.
  - Interprete os resultados.

Exercícios

- Suponha novamente o sistema com uma fila. No entanto, desta vez, suponha que a chegada é modelada por uma distribuição exponencial com média 4 e o atendimento é modelado também por uma distribuição de Pareto com parâmetros α=2,5 e β=2. A distribuição de Pareto é uma distribuição de cauda pesada.
  - Determine o tempo médio de fila e tempo médio no sistema.
  - Realize a simulação de forma a obter uma boa resposta para para o nível de confiança de 99%.
  - Interprete os resultados.

Distribuição de Pareto	
Parâmetros	α, β $\alpha > 0$, parâmetro de forma $\beta > 0$, parâmetro de escala
Limites	$b \leq x < +\infty$
Densidade de Probabilidade	$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}$
Distribuição Acumulada	$F(x) = 1 - (\frac{\beta}{x})^\alpha$
Esperança ($E[X]$)	$\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}, \alpha > 1$
Variança ($Var[X]$)	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \alpha > 2$