

# Modelagem e Avaliação de Desempenho

Pós Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE

Prof. Carlos Marcelo Pedroso

2017

# Séries Temporais

- Considere um processo onde o valor presente de uma série depende dos valores passados.
- Uma série temporal é a amostragem sequencial de uma variável durante um intervalo de tempo, via de regra longo, para possibilitar a identificação de padrões. Pode ser obtida analiticamente, ou também por simulação numérica, ou ainda, por medição experimental.

# Séries Temporais

A observação de uma série temporal discreta realizada em instantes de tempo  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t, \dots, \tau_n$  pode ser denotada por  $X(\tau_1), X(\tau_2), \dots, X(\tau_t), \dots, X(\tau_N)$ . Neste capítulo serão consideradas apenas séries temporais discretas, onde as observações são realizadas em um intervalo fixo  $h$ . Quando  $N$  valores sucessivos da série forem analisados, será escrito  $X_1, X_2, \dots, X_t, \dots, X_N$  para denotar observações realizadas a intervalos de tempo equidistantes  $\tau_0 + h, \tau_0 + 2h, \dots, \tau_0 + th, \dots, \tau_0 + Nh$ . A esperança será denotada  $E(X) = \mu$ ; a variância será denotada por  $V[X] = E[(X - \mu)^2] = \sigma^2$ ; a auto-covariância com defasagem  $k$  será denotada por  $E[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)] = \gamma_k$  e a auto-correlação com defasagem  $k$  será denotada por  $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$ .

# Estacionariedade

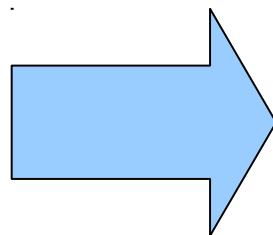
**Definição 3.1** Estacionariedade estrita [Willinger e Park 2000].  $X_t$  é *estritamente estacionário* se  $[X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}]$  e  $[X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k}]$  possuem a mesma distribuição conjunta para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Na estacionariedade estrita, o processo deslocado por  $k$ , chamado  $X_{t+k}$ , e o primeiro chamado  $X_t$ , devem ser equivalentes.

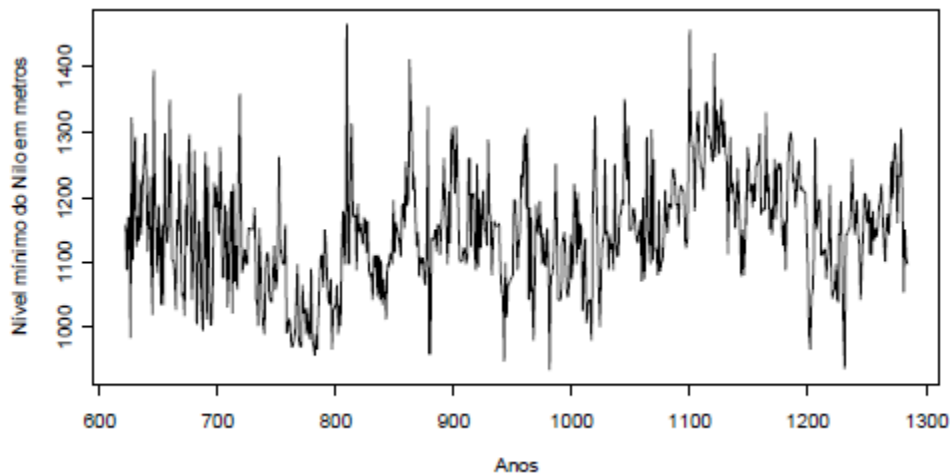
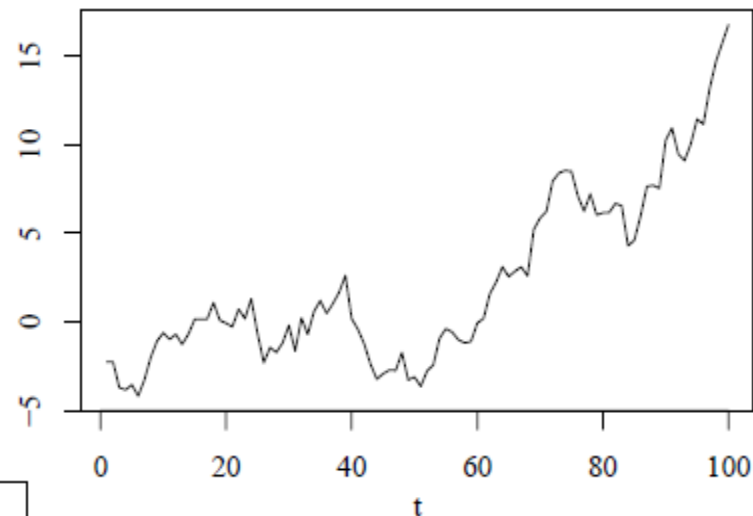
**Definição 3.2** Estacionariedade fraca ou de segunda ordem [Willinger e Park 2000]. A *função de auto-covariância*  $\gamma(r, s) = E[(X_r - \mu)(X_s - \mu)]$  deve *satisfazer à relação de invariância*  $\gamma(r, s) = \gamma(r + k, s + k) \quad \forall r, s, k \in \mathbb{Z}$ .

# Estacionariedade

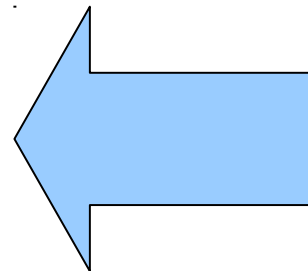
Não estacionário



$X_t$



Estacionário



# Função de Auto-Correlação

- Correlação entre X, Y:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- A análise da função de auto-correlação de uma série é muito importante.

- Auto-Covariância:  $E[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)] = \gamma_k$

- Auto-Correlação:  $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$ .

*O índice k é o deslocamento (ou lag)*

# Função de auto-correlação

- Para estimar a função de auto-correlação, calculamos:

$$\bar{\gamma}_k = \frac{\sum_{i=1}^{N-k} (X_i - \bar{X})(X_{i+k} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}$$

# Função de auto-correlação

- A função de auto-correlação estabelece o coeficiente de correlação entre um valor  $X_i$  da série e o  $X_{i-k}$ .
- *A análise da função de auto-correlação tem um papel central na análise de desempenho de sistemas de comunicações.*



# Exercícios

1- Calcule a função de auto-correlação para a série a seguir. Plote o gráfico da série temporal e da função de autocorrelação .

		10	20
1	3	13	6
2	8	13	3
3	10	32	2
4	27	18	13
5	5	37	2
6	4	16	1
7	5	9	10
8	16	1	2
9	38	9	1

# Exercícios

2- Calcule a função de auto-correlação para a série a seguir. Plote o gráfico da série temporal e da função de auto-correlação (cotação petr4).

		10	20
1	20,80	20,03	20,16
2	20,65	20,37	19,65
3	20,55	21,04	19,70
4	20,52	20,80	20,30
5	20,32	20,55	20,87
6	20,34	20,49	20,76
7	20,15	19,90	20,99
8	20,66	19,86	20,30
9	20,47	20,23	20,21

# Exercícios

3- Calcule a função de auto-correlação para a série a seguir. Plote o gráfico da série temporal e da função de auto-correlação

		10	20
1	2.46	1.87	1.59
2	2.05	1.55	1.12
3	2.14	2.04	1.05
4	2.56	2.43	1.36
5	2.49	1.24	1.67
6	1.12	1.11	2.45
7	1.74	0.89	2.93
8	2.11	1.03	2.36
9	2.34	0.77	2.44

# Modelo Auto-Regressivo

## 3.4 Modelo Auto Regressivo

Seja  $\tilde{X}_t$  a diferença entre  $X_t$  e  $\mu$ ,  $\tilde{X}_t = X_t - \mu$ . O modelo  $AR(p)$ , ou auto-regressivo, é dado por  $\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{X}_{t-p} + a_t$ , onde  $a_t$  é um ruído branco e  $\phi_1, \dots, \phi_p$  são parâmetros do modelo. Os parâmetros do modelo são fáceis de estimar e as séries temporais podem ser geradas de maneira simples. A função de auto-correlação decai exponencialmente, o que faz com que o modelo possa ser representado aproximadamente por um modelo de Markov Modulado [Adas 1997]. Este modelo não consegue caracterizar fluxos que possuam uma distribuição de cauda pesada.

Para identificação do modelo AR em uma série existente o analista deve examinar a estrutura da função de auto-correlação da série e estimar o valor de  $p$  [Box et al. 1994]. Após esta tarefa, podem ser estimados os valores dos parâmetros  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ .

# Modelo Média Móvel (MA)

## 3.5 Modelo Média Móvel

O modelo  $MA(q)$ , ou médias móveis, é dado por  $\tilde{X}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$ , ou seja, o valor atual de  $\tilde{X}_t$  é formado pela soma dos choques ponderados de ruídos aleatórios passados. Os valores de  $\theta_1, \dots, \theta_q$  são parâmetros do modelo.

Para estimação de parâmetros a partir de uma série, o analista deve estimar o valor do parâmetro  $q$  e depois estimar os valores de  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ .

# Modelo ARMA

## 3.6 Modelo ARMA

No modelo  $ARMA(p, q)$  os valores de  $p$  e  $q$  indicam respectivamente o número de parâmetros no modelo AR e MA. O modelo é dado por

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{X}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.1)$$

A estimação de parâmetros dos modelos ARMA é mais difícil do que o modelo AR, e envolve a resolução de equações não-lineares [Box et al. 1994]. Na prática podem ser examinadas determinadas propriedades da função de auto-correlação e auto-correlação parcial da série na tentativa de determinar os valores de  $p$  e  $q$ . Neste modelo, soluções analíticas são mais difíceis de se obter. A geração da série pode ser realizada da mesma maneira mostrada nas Tabelas 3.1 e 3.2

# Modelo ARIMA

## 3.7 Modelo ARIMA

O modelo *ARIMA* (*Auto Regressive Integrated Moving Average*) consiste de uma extensão do modelo *ARMA*( $p, q$ ) e é dado por *ARIMA*( $p, d, q$ ) onde  $\nabla^d$  é um operador de diferenças, definido como  $\nabla^d X_t = (X_t - X_{t-d})$ . A série original é submetida ao operador de diferenças e sobre a série diferenciada aplica-se um modelo ARMA.

No modelo ARIMA, o operador de diferenças pode ser obtido por

$$\nabla^d X_t = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} (-1)^i X_{t-i}, d \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

A diferenciação da série normalmente é aplicada na tentativa de torná-la estacionária. Um exemplo de diferenciação é mostrado na seção [5.3.4](#). Desta maneira, este modelo pode ser utilizado em séries não estacionárias. Uma descrição completa do modelo é encontrada em [Box et al. 1994](#) e softwares de análise em [R Development Core Team 2005](#).

# Modelo ARIMA

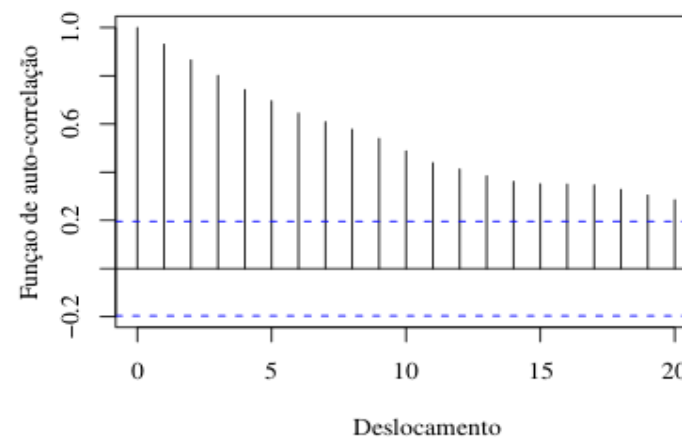
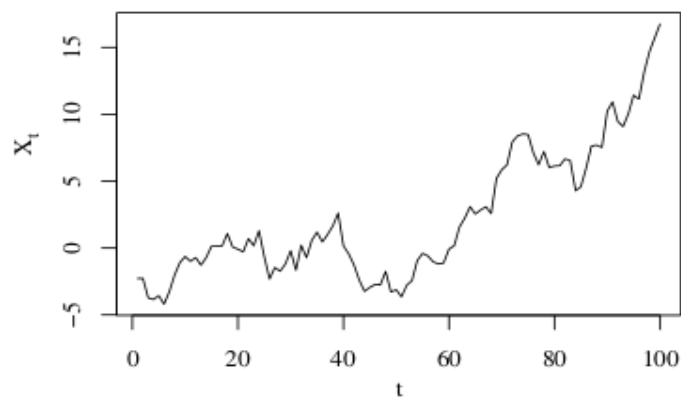
**Exemplo 3.3** Considere um modelo ARIMA(1,1,1), com parâmetros  $\phi_1 = 0,101270$  e  $\theta_1 = 0,110472$ . O valor de  $\nabla^d X_t$  será dado por  $\{0,101270X_{t-1} + a_t\} + \{-0,110472a_{t-1}\}$ . O valor de  $X_t$  pode ser obtido fazendo-se  $X_t = \nabla^d X_t + X_{t-1}$ . O resultado é mostrado na Tabela [3.3](#). A série e sua função de auto-correlação são mostrados na Figura [3.1](#). A função de auto-correlação mostra um decaimento lento, que pode ser confundido com a não estacionariedade da série ou mesmo com a presença de características auto-similares.



# Modelo ARIMA

Tabela 3.3: Exemplo de geração de uma série com modelo ARIMA.

$t$	$\tilde{X}_t$	$\nabla^d \tilde{X}_t$	$a_t$
1	-2,27228	-2,27228	-2,27228
2	-2,26659	0,00569	-0,01522
3	-3,71876	-1,45217	-1,45212
4	-3,84008	-0,12132	-0,13468
5	-3,55374	0,28634	0,28523
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



# Exercícios

1. Recupere a série de valores históricos para do valor de fechamento da cotação do dolar, com 100 valores passados.
  - Esboce o gráfico da série. Analise o gráfico resultante.
  - Esboce o gráfico da função de auto-correlação (e auto-correlação parcial). Analise o gráfico resultante.
  - Estabeleça uma hipótese sobre um modelo adequado utilizando ARIMA.
  - Utilize o software R (pacote **fArima**) para estimar os parâmetros.
  - Como verificar se o modelo proposto é adequado? (utilize QQPLOT dos resíduos)

# Exercícios

2. Suponha a série com o número de mortes em decorrência da Gripe A, em Curitiba, no inverno de 2009.
  - Esboce o gráfico da série. Analise o gráfico resultante.
  - Esboce o gráfico da função de auto-correlação (e auto-correlação parcial). Analise o gráfico resultante.
  - Estabeleça uma hipótese sobre um modelo adequado utilizando ARIMA.
  - Utilize o software R (pacote **fArima**) para estimar os parâmetros.
  - Como verificar se o modelo proposto é adequado? (utilize QQPLOT dos resíduos)

# Série – Gripe A

Gripe A (mortes/dia – 2009)		10	20	30	40	50	60
1	2	1	1	12	3	2	2
2	0	4	2	7	7	3	0
3	1	6	6	8	5	0	1
4	1	7	8	10	4	2	1
5	0	4	13	7	4	3	1
6	3	6	9	6	6	3	
7	3	0	5	6	4	1	
8	2	4	7	2	5	0	

# Séries Temporais – outros modelos

## □ Média Móvel

- Esse método considera como previsão para o período futuro a média das observações passadas recentes

$$x_t = \frac{x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_{t-n}}{n}$$

- O termo média móvel é utilizado porque à medida que a próxima observação se torna disponível, a média das observações é recalculada, incluindo essa observação no conjunto de observações e desprezando a observação mais antiga

# Séries Temporais – outros modelos

## □ Alisamento Exponencial Simples

- Se assemelha a Média Móvel por extrair das observações da série temporal o comportamento aleatório pelo alisamento dos dados históricos.

$$F_{t+1} = \alpha x_t + (1 - \alpha) F_t$$

- $F_t$  representa a série e o parâmetro  $\alpha$  deve estar entre 0 e 1.

# Séries Temporais – outros modelos

- Alisamento Exponencial Simples
  - Quanto menor o valor de  $\alpha$ , mais estáveis serão as previsões, visto que a utilização de baixo valor de  $\alpha$  implica na atribuição de peso maior às observações passadas e, conseqüentemente, qualquer flutuação aleatória no presente contribui com menor importância para a obtenção da previsão.
  - Não há metodologia que oriente quanto à seleção de um valor apropriado para  $\alpha$ , sendo normalmente encontrado por tentativa e erro.

# Séries Temporais – outros modelos

- Alisamento Exponencial Linear
  - Quando o método Alisamento Exponencial Simples é aplicado na previsão de séries temporais que apresentam tendência entre as observações passadas, os valores prognosticados superestimam (ou subestimam) os valores reais.
  - Para evitar esse erro sistemático, o método Alisamento Exponencial Linear foi desenvolvido procurando reconhecer a presença de tendência na série de dados



# Séries Temporais – outros modelos

## □ Alisamento Exponencial Linear

$$F_{t+m} = S_t + mT_t$$

$$S_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$

Onde  $\alpha$  é o peso atribuído à observação  $0 < \alpha < 1$

e  $\beta$  é o coeficiente de alisamento,  $0 < \beta < 1$

# Séries Temporais – outros modelos

- Alisamento Exponencial Sazonal e Linear de Winter

$$S_t = \alpha \frac{x_t}{I_{t-l}} + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$

$$I_t = \gamma \frac{x_t}{S_t} + (1 - \gamma)I_{t-l}$$

$$F_{t+m} = (S_t + mT_t)I_{t-l+m}$$

onde  $I_t$  corresponde ao alisamento do fator de sazonalidade  $\frac{x_t}{S_t}$ ;

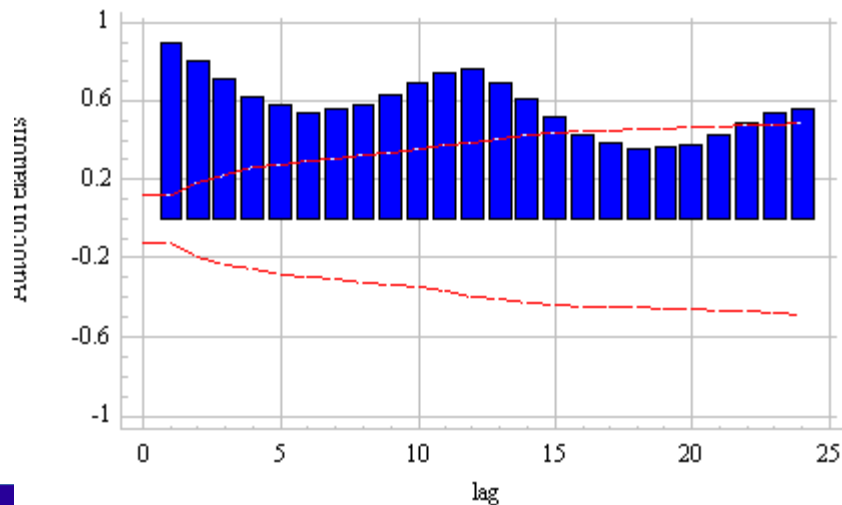
$l$  é o intervalo da sazonalidade e

$\gamma$  corresponde ao peso atribuído ao fator de sazonalidade.

# Séries Temporais – outros modelos

- Modelos SARIMA:
  - Arima Sazonal.
  - $ARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)$ 
    - $P,D,Q$  são os componentes sazonais

Residual Autocorrelations for AUTOSALE/CPI  
ARIMA(0,0,0) with constant



Residual Partial Autocorrelations for AUTOSALE/CPI  
ARIMA(0,0,0) with constant

