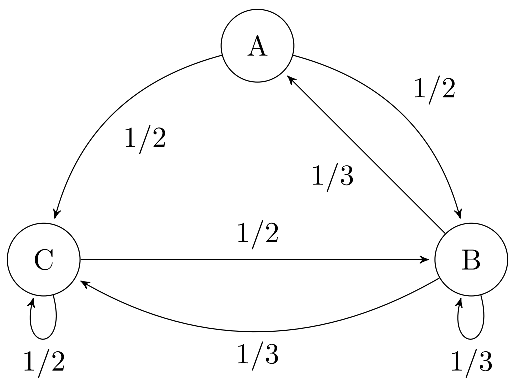
Exercícios

Carlos Marcelo Pedroso, *Universidade Federal do Paraná*

Lista de exercícios sobre Cadeias de Markov para disciplina TE816 do curso de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da UFPR. As duas referências que estou usando sobre este assunto são de fato muito boas. A primeira [1] aborda o assunto de maneira fácil e didática, enquanto a segunda [2] se aprofunda na teoria.

1 Fundamentos

Considere o seguinte diagrama de transições de estado:



Os estados são dados respectivamente por A, B e C. Suponha a seguinte notação: $X_0, X_1, \ldots, X_n$, onde n representa o passo da cadeia.

a) Escreva o diagrama de transição de estados correspondente.

b) Determine $P(X_1 = A|X_0 = B)$.

c) Determine $P(X_1 = C|X_0 = A)$.

d) Determine $P(X_2 = A|X_0 = A)$.

e) Determine $P(X_2 = B|X_0 = A)$.

f) Se $P[X_0 = A, X_0 = B, X_0 = C] = [\,0{,}5 \;\; 0{,}2 \;\; 0{,}3\,]$, calcule $P(X_1 = C)$.

g) Calcule as probabilidades de estado estacionário. Mostre os cálculos (não vale fazer P^{100} no matlab).

2 Aposentadoria do Professor

Um professor da UFPR está pensando em se aposentar. O professor tem 65 anos, mas poderia trabalhar até os 70. Ele conta a um amigo sobre sua decisão, o amigo conta para outro, que conta para outro, e assim por diante. Suponha que cada vez que a história é contada, existe uma probabilidade de p de alterar a resposta de *sim* para *não*, e de q de alterar a resposta de *não* para *sim*.

a) Modele o problema usando cadeias de Markov, e explique o seu modelo.

b) Se o professor disser para o amigo que irá aposentar-se, determine a probabilidade de que um amigo do amigo ser avisado que ele não irá se aposentar.

c) Suponha que a decisão do professor foi passada adiante por muitos amigos. Quantos amigos vão achar que ele irá aposentar-se e quantos serão avisados que ele não irá?

3 Aposentadoria do Engenheiro

Um Engenheiro planeja acumular R$1.600.000,00 para sua aposentadoria. Atualmente ele possui no banco R$400.000,00 e infelizmente todo seu salário é gasto em suas despesas mensais - a família aumentou e ele tem gastos que nem imaginava antes. Ele resolveu investir o dinheiro que possui antes que gaste tudo em viagens e carros.

No ano passado ele considerou um investimento na bolsa de valores, mas descobriu que o risco não valia a pena. Neste ano, ele está pensando em tentar um site de apostas - é mais rápido e dá menos trabalho. Este site permite que ele aposte uma quantia X, que dá uma possibilidade de 40% de ganhar X e 60% de perder a quantia apostada.

Responda:

a) Considerando que o Engenheiro gaste R$100.000,00 em cada aposta, determine: (1) probabilidade de atingir a meta; (2) número médio de apostas para atingir a meta e (3) número médio de apostas para gastar toda a economia.

b) Considerando que o Engenheiro gaste R$200.000,00 em cada aposta, determine: (1) probabilidade de atingir a meta; (2) número médio de apostas para atingir a meta e (3) número médio de apostas para gastar toda a economia.

c) Considerando que o Engenheiro gaste R$400.000,00 em cada aposta, determine: (1) probabilidade de atingir a meta; (2) número médio de apostas para atingir a meta e (3) número médio de apostas para gastar toda a economia. Qual das estratégias é melhor? Será que alguma delas vale a pena?

4 Jogo de irmãos

João e Maria são irmãos e estão jogando moedas e apostando R$10 em cada rodada. Considere que João possui inicialmente R$30 e Maria R$50. Assumindo que os jogadores continuam apostando até que fiquem sem dinheiro, responda:

a) Modele o problema usando cadeias de Markov, e explique o seu modelo.

b) Quantas jogadas em média são necessárias para que João e Maria percam seu dinheiro?

c) Qual a probabilidade de João e de Maria ganharem todo o dinheiro?

5 World War Z - parte 1

Um vírus mortal espalhou-se pelo planeta no ano de 2050, e alguns infectados transformam-se em zombies. No entanto, nem todos foram afetados. Ao final de cada ano, a Organização Mundial da Saúde (OMS) classifica a população como *imune*, *normal*, *vírus incubado* e *infectado* (ou zombie). Uma vez imune, a pessoa não será mais infectada. A cada ano, existe uma possibilidade de 80% que uma pessoa normal tenha o vírus incubado e uma possibilidade de 20% de não ter contato com o vírus. A cada ano, caso uma pessoa esteja com vírus incubado, ela pode ficar imune ou transformar-se em zombie com 25% de probabilidade (iguais), ou continuar com o vírus incubado (50%). Responda as seguintes questões:

a) Modele o problema usando cadeias de Markov, e explique o seu modelo.

b) Determine a probabilidade de uma pessoa normal virar zombie.

c) Determine a probabilidade de uma pessoa normal ficar imune.

d) Determine o número médio de anos para que uma pessoa normal vire zombie.

e) Determine o número médio de anos para uma pessoa normal ficar imunizada.

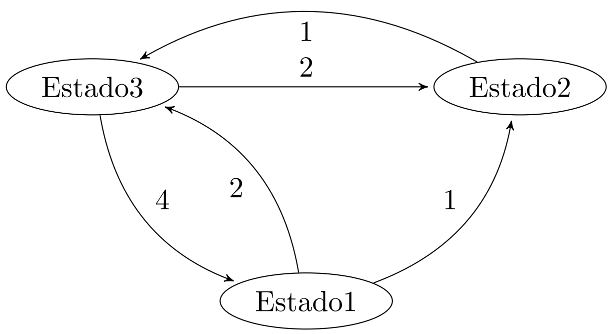
6 World War Z - parte 2

Considere que a OMS descobriu um tratamento para transformar um zombie em uma pessoa imunizada. O tratamento tem probabilidade p de funcionar, mas deve ser aplicado no prazo de um ano após a pessoa transformar-se em zombie - após este tempo, o tratamento não tem possibilidade de funcionar. Suponha que todos os zombies possam ser tratados desta forma. No entanto, o tratamento induz uma maior resistência do vírus ao tratamento nas pessoas normais. Suponha se o tratamento for aplicado, a probabilidade de uma pessoa com vírus incubado transformar-se em zombie seja de $q/2$, onde $0 \leq q \leq 1$ é a variável inserida para permitir o estudo do problema. A probabilidade de uma pessoa ficar imune será dada por $(1-q)/2$. A probabilidade de uma pessoa continuar com o vírus incubado ao fim de um ano continua de 50%, bem como todas as demais probabilidades definidas na questão anterior.

Re-escreva o modelo da questão anterior e determine o efeito de p e q no sistema. Qual a relação entre p e q para que o tratamento seja vantajoso?

7 Cadeia de Markov em Tempo Contínuo

Considere o seguinte diagrama de transição de estados, que representa uma cadeia de Markov em tempo contínuo:



Os arcos ponderados representam o valor de μ^{-1}, onde μ é o tempo médio de permanência no estado. Determine as probabilidades de estado estacionário.

8 Redundância

Considere três cabos, A, B, e C, transmitindo o sinal de Internet de uma empresa. Suponha que as falhas nos cabos A, B e C são eventos independentes, com tempo entre falhas modelado por uma distribuição exponencial com média λ^{-1}. Assuma que quando um cabo estragar, o reparo inicia imediatamente. O tempo de reparo para os cabos A, B e C são também independentes e possuem distribuição exponencial com média μ^{-1}. Determine:

a) Probabilidade do serviço ficar indisponível.

b) Considere que o concerto dos cabos seja realizado pela mesma equipe, ou seja, o tempo de concerto depende do número de cabos em falha, Neste caso, o tempo de conserto será modelado por uma distribuição exponencial com média μ^{-1}, $2\,\mu^{-1}$ e $3\,\mu^{-1}$ para os casos com uma, duas ou três falhas simultaneas, respectivamente. Determine a probabilidade para o serviço ficar disponível e analise se a diferença do caso anterior é significativa.

Referências

[1] Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell, 1998. Introduction to Probability. American Mathematical Society, 2nd edition, 1998.

[2] H.M. Taylor and S. Karlin, 1998. An Introduction to Stochastic Modeling. Academic Press, 3rd edition, 1998.