Modelagem e Avaliação de Desempenho

Pós Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE
Prof. Carlos Marcelo Pedroso
2017

Exemplos usados na apresentação foram obtidos de “Introduction to Probability, C.M.Grinstead e JL Snell”

Cadeias de Markov

- Em 1907, Andrew Markov iniciou um estudo sobre um modelo onde o resultado de um experimento depende do resultado de um experimento anterior;
- Este processo de modelagem é conhecido atualmente como Cadeias de Markov (*Markov Chain*).

Cadeias de Markov

- Uma cadeia de Markov pode ser descrita da seguinte forma
  - Considere um conjunto de estados $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$
  - O processo inicia-se em um destes estados e se move sucessivamente de um estado para outro;
  - Cada troca é chamada de passo;
  - Se o estado corrente é s_i, então ela se move para o estado s_j com uma probabilidade denotada por p_{ij}, e esta probabilidade não depende dos estados anteriores da cadeia de Markov.
  - As probabilidades p_{ij} são chamadas de probabilidades de transição.

Matriz P

- P é chamada *matriz de transição* e possui algumas propriedades interessantes.
- As linhas representam a probabilidade de transição de um estado para outro.
- Para calcular a probabilidade da cadeia se encontrar no estado j, mas a n passos adiante, pode-se calcular P^n.

Exemplo

Suponha que Curitiba foi abençoada com muitas coisa, menos com bom tempo para astonomia. Curitiba nunca apresenta dois dias seguidos com bom tempo para observação astronômica. Se há um dia bom, é mais provável ter chuva ou nuvens no próximo dia. Se há chuva ou nuvens, existe uma chance de haver tempo bom no próximo dia. Suponha a cadeia de Markov que representa a transição destes estados, onde C representa chuva, B representa tempo bom e N representa tempo nublado.

Maxima:
P:matrix([1/2,1/4,1/4],[1/2,0,1/2],[1/4,1/4,1/2]);
Float(P);

$$P = \begin{array}{c} \\ C \\ B \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & B & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo

- Para o caso do exemplo anterior (clima para astronomia em Curitiba), temos:

$$P^1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} C & B & N \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ B \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0.500 & 0.250 & 0.250 \\ 0.500 & 0.000 & 0.500 \\ 0.250 & 0.250 & 0.500 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} C & B & N \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ B \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0.438 & 0.188 & 0.375 \\ 0.375 & 0.250 & 0.375 \\ 0.375 & 0.250 & 0.438 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P^3 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} C & B & N \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ B \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0.406 & 0.203 & 0.391 \\ 0.406 & 0.188 & 0.406 \\ 0.391 & 0.203 & 0.406 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P^4 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} C & B & N \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ B \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0.402 & 0.199 & 0.398 \\ 0.398 & 0.203 & 0.398 \\ 0.398 & 0.199 & 0.402 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P^5 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} C & B & N \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ B \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0.400 & 0.200 & 0.399 \\ 0.400 & 0.399 & 0.400 \\ 0.399 & 0.200 & 0.400 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P^6 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} C & B & N \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ B \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0.400 & 0.200 & 0.400 \\ 0.400 & 0.200 & 0.400 \\ 0.400 & 0.200 & 0.400 \end{pmatrix} \end{array}$$

Maxima: float(P^^2);
float(P^^3); ...

Matriz P

- Para se calcular a probabilidade de se encontrar no estado *j* dado um estado *i*, n passos adiante, pode-se calcular:

$$\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}\mathbf{P}^n$$

- Exemplo: suponha que a probabilidade inicial para o clima para astronomia seja de (1/3, 1/3 e 1/3) e deseja-se fazer a previsão do tempo para 3 dias. Neste caso,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u}\mathbf{P}^3 &= (\,1/3, \quad 1/3, \quad 1/3\,)\begin{pmatrix} .406 & .203 & .391 \\ .406 & .188 & .406 \\ .391 & .203 & .406 \end{pmatrix} \\ &= (\,.401, \quad .188, \quad .401\,)\end{aligned}$$

Maxima: u:matrix([1/3,1/3,1/3]);
float(u.P^^3);

Exercício

Considere três grandes universidades americanas, Harvard, Darmouth e Yale. Suponha que os filhos de ex-alunos Harvard tem 80% de chance de estudar na mesma escola e os demais estudam em Yale. Suponha que 40% dos filhos de ex-alunos de Yale estudam também em Yale e os demais dividem-se igualmente entre Darmouth e e Harvard. Suponha que os filhos de ex-alunos de Darmouth tem 70% de chance de estudar em Darmouth, enquanto 20% entram em Harvard e 10% em Yale.

1) Encontre a matriz P.

2) Encontre a probabilidade de que um neto de um ex-aluno de Harvard estude em Darmouth.

3) Encontre a probabilidade de que um bisneto de um ex-aluno de Darmouth estude em Yale.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathrm{H} & \mathrm{Y} & \mathrm{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{H} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{D} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .3 & .4 & .3 \\ .2 & .1 & .7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Maxima:
```
P:matrix([1,0,0],[0.3,0.4,0.3],[0.2,0.1,0.7]);
float(P^^2);
float(P^^3);
```

Cadeias de Markov Absorventes

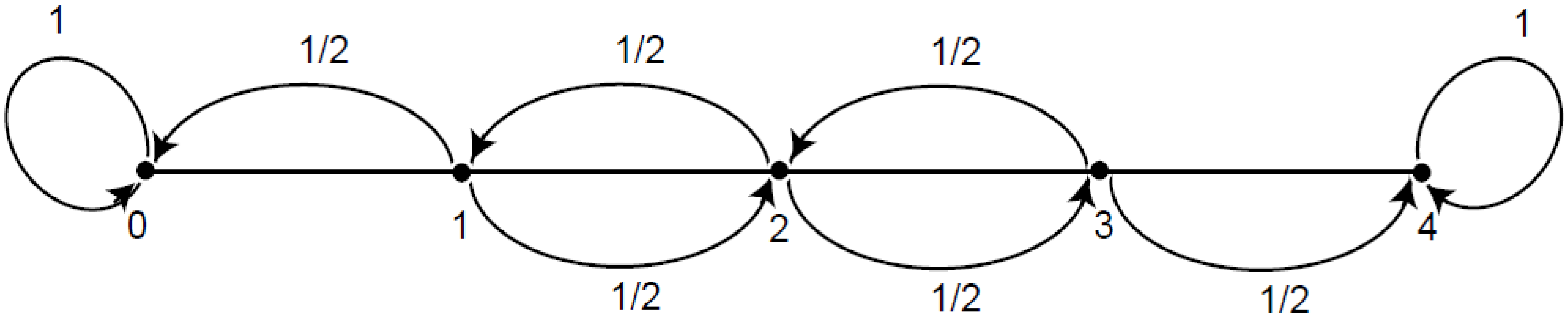
Considere uma cadeia de Markov onde existem estados onde não é possível realizar a transição para nenhum outro estado.

- Este estado é denominado estado absorvente.
- Um estado absorvente apresenta $p_{ij} = 1$.
- Esta é uma variação especial das cadeias de Markov.
- Em uma cadeia de Markov absorvente, o número de passos até atingir o estado absorvente é chamado transiente.

Cadeias de Markov Absorventes

Exemplo. Um bêbado caminha na rua. Cada número de 1 a 3 representa um quarteirão, enquanto o número 0 representa a casa dele e o número 4 representa o bar.

- Escreva a matriz P correspondente.



Cadeias de Markov Absorventes

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Cadeias de Markov Absorventes

- As questões que surgem são:
  - Qual a probabilidade de que o processo seja eventualmente absorvido?
  - Na média, quantos passos serão dados até que o processo seja absorvido?
  - Na média, quantas vezes um dado estado transiente será visitado até que o processo seja absorvido?
- As respostas a estas questões dependem do estado inicial e da matriz de transição.

Cadeias de Markov Absorventes

- Considere a matriz P com r estados absorventes (ABS) e t estados transientes (TR). A matriz P canônica é formada conforme abaixo:
  - I é uma matriz identidade r por r.
  - O é uma matriz 0 r por t.
  - R é uma matriz t por r.
  - Q é uma matriz t por t.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{TR.} & \text{ABS.} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{TR.} \\ \\ \text{ABS.} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right) \end{array}$$

Cadeias de Markov Absorventes

- Para uma cadeia de Markov absorvente, a matriz $N=(I-Q)^{-1}$ é chamada matriz fundamental para P.
  – Um elemento n_{ij} de N fornece o número esperado de vezes que o processo estará no estado transiente s_j caso o estado inicial seja o estado s_i

Cadeias de Markov Absorventes

- Exemplo:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

Maxima:

```
P:Q:matrix([0,1/2,0],[1/2,0,1/2],[0,1/2,0]);
I:matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]);
N:invert(I-Q);
```

$$\mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Iniciando-se no estado 2, o número médio de vezes em que o sistema permanece nos estados 1, 2 e 3 será, respectivamente, 1, 2 e 1.

Cadeias de Markov Absorventes

- Outro fator importante a se considerar é o número médio de passos para a absorção.
- Seja t número de passos até a absorção, dado que o estado inicial seja s_i e t ser o vetor coluna que armazena o número médio de passos para absorção a partir dos estados transientes e **c** é um vetor coluna com todos os elemtos iguais a 1.
  - Então:

$$\mathbf{t} = \mathbf{N}\mathbf{c}$$

- Calcular para o exemplo anterior.

Cadeias de Markov Absorventes

- Um analista pode estar interessado também em calcular a probabilidade do sistema encerrar em um dos estados absorventes.
- Neste caso, se b_{ij} representar a probabilidade da cadeia ser absorvida por um estado s_j caso o estado inicial seja um estado transiente s_i, então a matriz B (t por r) será dada por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{N}\mathbf{R}$$

Resposta

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Maxima:

```
P:Q:matrix([0,1/2,0],[1/2,0,1/2],[0,1/2,0]);
I:matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]);
N:invert(I-Q);
c:matrix([1],[1],[1]);
t:N.c;
```

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = \mathbf{Nc} \quad &= \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Cadeias de Markov Absorventes

- Um analista pode estar interessado também em calcular a probabilidade do sistema encerrar em um dos estados absorventes.
- Neste caso, se b_{ij} representar a probabilidade da cadeia ser absorvida por um estado s_j caso o estado inicial seja um estado transiente s_i, então a matriz B (t por r) será dada por:

$$\mathrm{B} = \mathrm{NR}$$

Exemplo

- No exemplo do bêbado:

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array} .$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{NR} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Maxima:

```
P:Q:matrix([0,1/2,0],[1/2,0,1/2],[0,1/2,0]);
I:matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]);
N:invert(I-Q);
c:matrix([1],[1],[1]);
t:N.c;
R:matrix([1/2,0],[0,0],[0,1/2]);
B:N.R;
```

Cadeias de Markov Ergódicas

- Uma cadeia de Markov é chamada de ergódica se é possível ir de um estado para qualquer outro da cadeia (não necessariamente em um único passo).
  - Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov. Diz-se que P é regular se alguma potência de P contêm somente entradas positivas (ou seja, alguma potência de P não contem nenhuma entrada igual a zero), diz-se que a cadeia de Markov é regular.
  - Uma cadeia de Markov absorvente não pode ser regular.

Cadeias de Markov Ergódicas

- Suponha a matriz de transição de probabilidade dada por

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} .
$$

A cadeia é ergódica

- No entanto, não é regular (se o número de passo é ímpar não é possível atingir um dado estado)

Outro exemplo

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

- A cadeia é ergódica e regular?
- E a cadeia do exemplo do clima para astronomia em Curitiba?

Cadeias de Markov Regulares

- Seja P uma matriz de transição para uma cadeia de markov regular. Então, conforme *n* tende a infinito, as potências P^n se aproximam da matriz limite em que todas as linhas são iguais (vetor W). O vetor W é um vetor de probabilidade onde todos os componentes são positivos e sua soma é igual a 1.
  - Ver exemplo da terra do clima para astronomia em Curitiba.

Cadeias de Markov Regulares

- No exemplo,

$$\mathbf{P}^6 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathrm{R} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{R} \\ \mathrm{N} \\ \mathrm{S} \end{array} & \begin{pmatrix} .4 & .2 & .4 \\ .4 & .2 & .4 \\ .4 & .2 & .4 \end{pmatrix} \end{array}$$

- De modo geral,

$$\mathbf{W} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n ,$$

Cadeias de Markov Regulares

- Utilizando o resultado, é possível determinar o valor limite fazendo:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} .$$

Cadeias de Markov Regulares

- Resolvendo:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 1 \ , \\ (1/2)w_1 + (1/2)w_2 + (1/4)w_3 &= w_1 \ , \\ (1/4)w_1 + (1/4)w_3 &= w_2 \ , \\ (1/4)w_1 + (1/2)w_2 + (1/2)w_3 &= w_3 \ . \end{aligned}$$

$$\mathbf{w} = (\ .4 \quad .2 \quad .4\ )$$

Maxima:

```
W:matrix([w1,w2,w3]);
P:matrix([1/2,1/4,1/4],[1/2,0,1/2],[1/4,1/4,1/2]);
W.P=W;
solve( [w3/4+w2/2+w1/2-w1,w3/4+w1/4-w2,w1+w2+w3-1],[w1,w2,w3] );
```

Cadeias de Markov

- Para uma cadeia de Markov Ergodica, existe um único vetor W tal que W.P=W, com *w* positivo. Qualquer linha do vetor é tal que vP=v é múltiplo de W. Qualquer coluna do vetor *x* tal que P.*x*=*x* é um vetor constante.
- Para uma cadeia de Markov Ergodica, a longo prazo, a permanência em cada estado é dada pelo vetor W, independentemente do estado inicial

Cadeias de Markov - Simulação

```
SSRNRNSSSSSSNRSNSSRNSRNSSSNSRRRNSSSNRRSSSSNRSSNSRRRRRRNSSS
SSRRRSNSNRRRRSRSRNSNSRRNRRNRSSNSRNRNSSRRSRNSSSNRSRRSSNRSNR
RNSSSSNSSNSRSRRNSSNSSRNSSRRNRRRSRNRRRNSSSNRNSRNSNRNRSSSRSS
NRSSSNSSSSSSNSSSNSNSRRNRNRRRRSRRRSSSSNRRSSSSRSRRRNRRRSSSSR
RNRRRSRSSRRRRSSRNRRRRRRNSSRNRSSSNRNSNRRRRNRRRNRSNRRNSRRSNR
RRRSSSRNRRRNSNSSSSSRRRRSRNRSSRRRRSSSRRRNRNRRRSRSRNSNSSRRRR
RNSNRNSNRRNRRRRRRSSSNRSSRSNRSSSNSNRNSNSSSNRRSRRRNRRRRNRNRS
SSNSRSNRNRRSNRRNSRSSSRNSRRSSNSRRRNRRSNRRNSSSSSNRNSSSSSSSNR
NSRRRNSSRRRNSSSNRRSRNSSRRNRRNRSNRRRRRRRRRNSNRRRRRNSRRSSSSN
SNS
```

State	Times	Fraction
R	217	.413
N	109	.208
S	199	.379

Exercício

- Suponha que um experimento possui a matriz P como segue:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .5 & .5 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

  - O valor de p é desconhecido. No entanto, repetindo-se muitas vezes o experimento, 20% das vezes o sistema encontra-se no estado 1 e 80% no estado 2.
  - Encontre o valor p.

Número médio de passos médio para primeira passagem e recorrência

- Duas medidas quantitativas de interesse para cadeias de Markov ergódicas são:
  - Número médio de passos para retornar a um determinado estado;
  - Número médio de passos para ir de um estado para outro.

Número médio de passos para primeira passagem

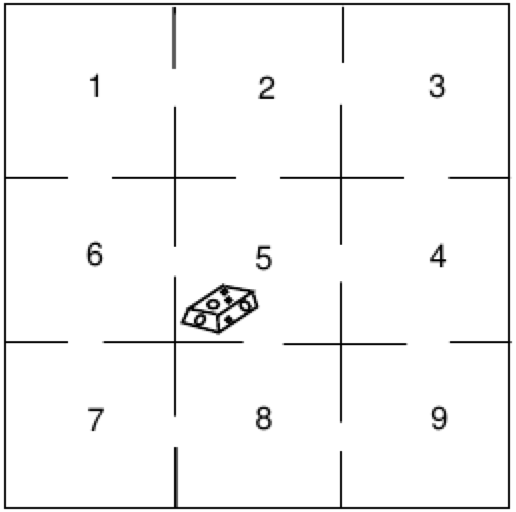
- Uma maneira de analisar o problema é o seguinte:
  - Suponha que a cadeia de Markov em estudo é ergódica (qualquer estado pode ser atingido a partir que qualquer estado inicial).
  - Para determinar o número médio de passos para atingir um determinado estado *i*, basta fazer este estado um estado absorvente.
  - Depois, apenas é necessário fazer o estudo com a teoria de cadeias de Markov absorventes.

Número médio de passos para primeira passagem

- Uma maneira de analisar o problema é o seguinte:
  - Suponha que a cadeia de Markov em estudo é ergódica (qualquer estado pode ser atingido a partir que qualquer estado inicial).
  - Para determinar o número médio de passos para atingir um determinado estado *i*, basta fazer este estado um estado absorvente.
  - Depois, apenas é necessário fazer o estudo com a teoria de cadeias de Markov absorventes.

Tempo médio para primeira passagem

- Exemplo: Labirinto



Número médio de passos para primeira passagem

- Exemplo: Labirinto

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \;1\; & \;2\; & \;3\; & \;4\; & \;5\; & \;6\; & \;7\; & \;8\; & \;9\; \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como podemos determinar se o rato é mais esperto ?

Número médio de passos para primeira passagem

- Exemplo: Para calcular o tempo médio para atingir o estado 5, fazemos este estado absorvente:

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\
1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Número médio de passos para primeira passagem

- Exemplo: Calculamos a matriz fundamental N

$$\mathbf{N} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 14 & 9 & 4 & 3 & 9 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 14 & 6 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 14 & 9 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 14 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 & 14 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 9 & 14 & 9 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 14 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 3 & 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

- Iniciando-se no estado 1, o número médio de vezes em que o sistema permanece nos estados 1, 2, 3 , … etc., será, respectivamente, 14, 9, 4.

Número médio de passos para primeira passagem

- Exemplo: Labirinto

$$\mathbf{t} = \mathbf{N}\mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Iniciando-se no estado 1, o sistema leva em média 6 passos para atingir o estado 5 (absorvente). Iniciando-se no estado 2, o sistema leva 5 passos para atingir o estado absorvente e assim por diante.

Número médio de passos para recorrência

- Qual será o número médio de passos em que um estado será visitado novamente?
  - Dado um estado s_i, qual será o número médio de passos que o sistema irá levar para se encontrar novamente no estado s_i no futuro?
  - Dado o vetor w, com a probabilidade limite, basta calcular $1/w_i$ e teremos o número médio de passos para visitar o estado

Número médio de passos para recorrência

- No exemplo do labirinto, pode ser calculado w.P=w (acrescentado somatório de w_i=1), obtendo-se:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

- De onde pode ser deduzido o vetor r (número médio de passos para recorrência):

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 12 & 8 & 6 & 8 & 12 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

- *Ergodic Continous Time Markov Chain*
- A novidade é considerar a variável *tempo*.
- Neste caso, o tempo de permanência em cada transição é considerado como exponencialmente distribuído (esta é uma *exigência,* hipótese básica para validade deste raciocínio).
- Considere que o parâmetro que determina a taxa de transição do estado i para o próximo estado j seja dado por q_{ij}

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

- Desta forma, podemos definir: $\Pi Q = 0, \sum_{i=1}^{s} \pi_i = 1$

  – Onde Q é a matriz de transição de taxas

  – O vetor Π é o vetor de estado estacionário

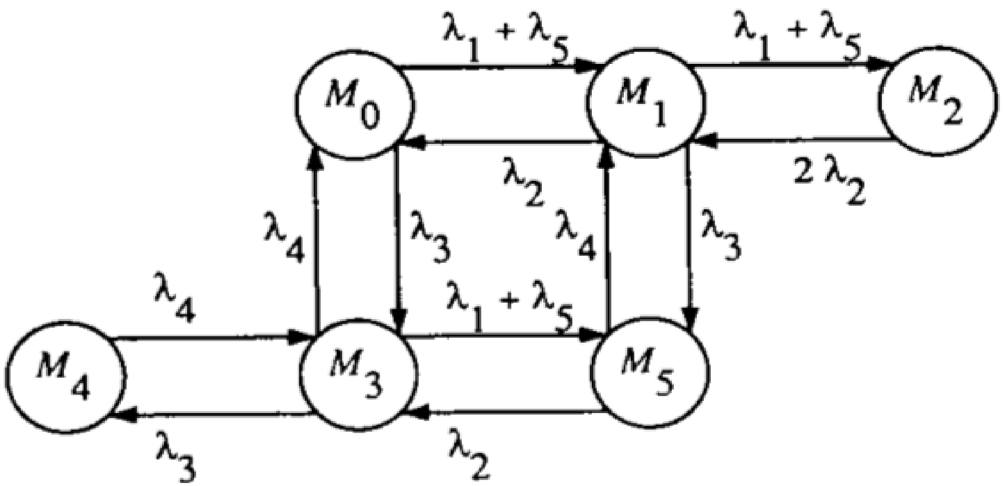
  – Para o vetor Q, o elemento q_{ii} (diagonal principal) é obtido fazendo-se o complemento do somantório dos demais elementos da linha (ver exemplo em sala).

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

- *Exemplo: Suponha dois servidores operando em cluster. Um servidor falha com uma taxa μ, exponencialmente distribuída (ou seja, o tempo médio entre falhas é dado por $1/\mu$). A taxa de reparo é dada por λ (ou seja, o tempo médio de reparo é dado por $1/\lambda$). Suponha que as instalações de reparo podem trabalhar em dois servidores simultaneamente.*
  - *Deseja-se descobrir expressões para o estado estacionário.*
  - *Qual a probabilidade de falha total do sistema?*
  - *Ver solução apresentada em sala*

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

- *Exercício:* Suponha um sistema com diagrama de transição de estados a seguir:



  – Suponha que as transições possuem distribuição exponencial e λ_i representa as taxas correspondentes. Calcule as probabilidades de estado estacionário.