Cadeias de Markov
Exercícios

Carlos Marcelo Pedroso

19 de setembro de 2011

Exercício 1: Suponha uma matriz de transição de probabilidade dada por

$$P = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 & 0,0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{vmatrix}$$

Os estados são dados respectivamente por A, B e C. Suponha a seguinte notação: $X_0, X_1, \ldots, X_n$, onde n representa o passo da cadeia.

a) Escreva o diagrama de transição de estados correspondente.
b) Determine $P(X_1 = A|X_0 = B)$.
c) Determine $P(X_1 = C|X_0 = A)$.
d) Determine $P(X_2 = A|X_0 = A)$.
e) Determine $P(X_2 = B|X_0 = A)$.
f) Se $P[X_0 = A, X_0 = B, X_0 = C] = [\,0{,}1\ 0{,}5\ 0{,}4\,]$, calcule $P(X_1 = C)$.

□

Exercício 2: Considere o problema de transmitir uma mensagem binária (bit 0 ou 1) através de um canal consistindo de diversos estágios, onde a transmissão em cada estágio possui uma probabilidade fixa de erro, dada por α. Suponha que o bit 0 foi transmitido no primeiro estágio (ou $X_0 = 0$) e o sinal recebido no enésimo estágio seja dado por X_n. Utilizando cadeias de Markov, supondo que a ocorrência de erro em cada estágio é um evento independente, determine:

a) Matriz de transição de probablidade para o sistema e diagrama de transição de estados correspondente.

b) $P(X_1 = 0|X_0 = 0)$, ou seja a probabilidade de recebimento do bit correto no primeiro estágio.

c) $P(X_2 = 0|X_0 = 0)$, ou seja a probabilidade de recebimento do bit correto no segundo estágio.

d) $P(X_2 = 0, X_1 = 0|X_0 = 0)$, ou seja a probabilidade de recebimento do bit correto no primeiro e no segundo estágio. De que forma isto é diferente do item anterior?

e) Deduza a expressão com a probabilidade de recebimento do bit correto um sistema com 3 estágios.

f) Calcule as probabilidades de estado estacionário para o item anterior (sistema com 3 estágios) e forneça uma explicação para o significado destes resultados

g) Considere que o sistema possui 2 estágios, mas com probabilidade de erro diferente para cada estágio, respectivamente dado por α e β. Para este caso, calcule a expressão que indica a probabilidade de recebimento do bit correto na recepção.

□

Exercício 3: Partículas se movem entre os estados, que representam a localização de certa partícula em um dado intervalo fixo de tempo. A partícula pode se encontrar nos estados A, B e C, com matriz de transição de probabilidades correspondente dada por:

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}$$

Determine:

a) $P(X_1 = A|X_0 = A)$.

b) $P(X_2 = A|X_0 = A)$.

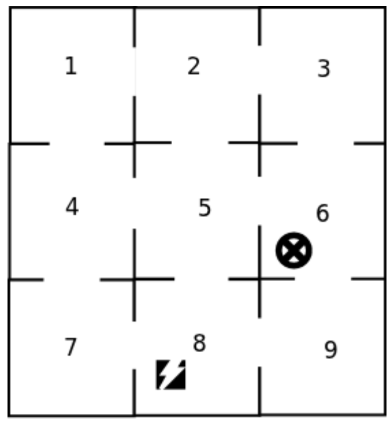
c) $P(X_3 = A|X_0 = A)$.

d) $P(X_4 = A|X_0 = A)$.

e) Probabilidades de estado estacionário.

□

Exercício 4: Considere novamento o problema do rato no labirinto. No entanto, desta vez, em um dos lugares estará a comida e em outro um dispositivo que dá um choque no rato. Estes dois estados serão considerados absorventes, encerrando o experimento. O rato pode iniciar em qualquer um dos lugares do labirinto, que tem a configuração apresentada a seguir.



Note que na célula 8 o rato leva um choque e na célula 6 ele encontra a comida. Quando atingir um destes dois lugares, o experimento é encerrado. Desta forma responda as seguintes questões:

a) Escreva a matriz de transição de probabilidade do sistema.
b) Determine o número médio de passos para absorção se o estado inicial é $X_0 = 1$.
c) Determine o número médio de visitas em cada estado (lugar, célula do labirinto) se o estado inicial é $X_0 = 1$.
d) Determine a probablidade do sistema encerrar no estado 8 ou no estado 6, para os casos onde o estado inicial é $X_0 = 1$, $X_0 = 4$ e $X_0 = 5$.

□

Exercício 5: Considere a cadeia de Markov com matriz de transição dada por:

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Note que a matriz apresentada é absorvente. Calcule o número médio de passos para a absorção.

□