PROJETO DE PESQUISA

Wilson Arnaldo Artuzi Junior

I. Título

Método de Galerkin Descontínuo para Simulação Numérica de Estruturas Eletromagneticamente Pequenas

- **Palavras-chave:** elementos finitos, simulação eletromagnética, método de Galerkin.

- **Resumo:**

Este projeto propõe estudar e aplicar o método de Galerkin descontínuo na simulação eletromagnética por elementos finitos de estruturas com relevância prática tais como circuitos de radiofrequência, circuitos integrados de microondas e antenas compactas, cujas dimensões são da mesma ordem de grandeza do comprimento de onda. A escolha de funções de base polinomiais vetoriais de baixa ordem adequadas à minimização de respostas espúrias aliada a técnicas de resolução computacionalmente eficientes nesta situação são objeto de investigação deste projeto. No final, almeja-se a elaboração de um programa computacional com melhor desempenho que seus similares disponíveis comercialmente para este tipo de aplicação.

II. Objetivos Geral e Específicos

- Objetivo Geral:

Desenvolver um programa computacional baseado em elementos finitos para a simulação eletromagnética de estruturas da ordem de grandeza de um comprimento de onda usando o método de Galerkin descontínuo como base da formulação teórica a fim de melhorar o desempenho computacional em relação aos métodos similares existentes para este caso específico de aplicação.

- Objetivos Específicos:

Estudar a relação da geração de respostas espúrias com a escolha das funções de base polinomiais de baixa ordem nos elementos finitos.

Estudar e aplicar técnicas de resolução que mantenham a estabilidade numérica sem provocar dissipações numéricas artificiais.

Buscar métodos para quantificar a descontinuidade da solução numérica e avaliar as suas consequências com relação à convergência e à exatidão da solução.

Comparar a eficiência computacional com os demais métodos baseados em elementos finitos disponíveis para este tipo de análise.

III. Fundamentação teórica

O embasamento teórico para o desenvolvimento deste projeto inicia na utilização do método de Galerkin em um espaço discretizado por uma malha de elementos finitos cuja capacidade de conformidade a geometrias complexas é superior em comparação a malhas cartesianas estruturadas [1], [2]. A geração da malha de elementos finitos não será objeto deste projeto tendo em vista que atualmente existem softwares de alto desempenho desenvolvidos para este fim. O método de Galerkin contínuo,

Wilson Arnaldo Artuzi Junior é lotado no Departmento de Engenharia Elétrica da UFPR (artuzi@eletrica.ufpr.br). Projeto de pesquisa submetido em conformidade com a INSTRUÇÃO NORMATIVA N° 03 CPDCT/PRPPG/UFPR, atualizada em 22 de Abril de 2019.

que já se consolidou como uma técnica consagrada na análise de estruturas eletromagnéticas, servirá como referência para comparação do desempenho computacional [2].

Por simplicidade de notação matemática, letras romanas minúsculas representarão vetores, enquanto as letras gregas representarão escalares. Para a análise eletromagnética no domínio do tempo, o método é desenvolvido com base nas equações rotacionais de Maxwell dadas por

$$\nabla \times e = -\mu h' \tag{1}$$

$$\nabla \times h = \varepsilon e' + \sigma e + j \tag{2}$$

onde e e h são os campos vetoriais elétrico e magnético, e' e h', suas correspondentes derivadas temporais, j é a fonte de corrente elétrica e μ, ε e σ são a permeabilidade magnética. a permissividade elétrica e a condutividade elétrica, respectivamente, dos meios a serem considerados lineares e isotrópicos. O fundamento dos métodos baseados em elementos finitos consiste em subdividir o domínio computacional em subdomínios convexos, denominados elementos finitos, que formam uma malha consistente sem sobreposição dos elementos. No interior de cada elemento o meio é tratado como homogêneo e os campos elétrico e magnético são aproximados por combinações lineares de funções vetoriais polinomiais a serem representadas por $\tilde{e}$ e $\tilde{h}$, respectivamente, cujos coeficientes escalares dependentes do tempo tornam-se as incógnitas a serem encontradas como solução do problema [3]. A aplicação do método de Galerkin transforma as equações (1) e (2) nas suas respectivas formas fracas conforme

$$\int_\Omega \tilde{h}.\nabla \times e \; d\Omega = -\int_\Omega \tilde{h}.\mu h \, d\Omega \tag{3}$$

$$\int_\Omega \tilde{e}.\nabla \times h \, d\Omega = \int_\Omega \tilde{e}.\varepsilon e' \, d\Omega + \int_\Omega \tilde{e}.\left(\sigma e + j\right) \, d\Omega \tag{4}$$

onde Ω denota o subdomínio de um elemento [2], [4]. No método de Galerkin descontínuo é necessário tornar explícitas as descontinuidades dos campos entre elementos adjacentes. As integrações por partes dos membros esquerdos das equações (3) e (4) fornecem

$$\int_\Omega \tilde{h}.\nabla \times e \; d\Omega = \int_\Omega \nabla \times \tilde{h} \,.\tilde{e} \, d\Omega + \frac{1}{2}\oint_\Gamma \tilde{h}.\hat{n} \times \left(\hat{e} + \tilde{e}\right) \, d\Gamma \tag{5}$$

$$\int_\Omega \tilde{e}.\nabla \times h \; d\Omega = \int_\Omega \nabla \times \tilde{e} \,.\tilde{h} \, d\Omega + \frac{1}{2}\oint_\Gamma \tilde{e}.\hat{n} \times \left(\hat{h} + \tilde{h}\right) \, d\Gamma \tag{6}$$

onde Γ denota o contorno do elemento, $\hat{n}$, o vetor unitário normal ao contorno no sentido para fora do elemento e, $\hat{e}$ e $\hat{h}$, as aproximações dos campos elétrico e magnético dos elementos adjacentes. A média aritmética simples dos campos internos e externos no contorno é a forma mais simples, porém não a única, de resolver a descontinuidade, sendo esta responsável pela comunicação entre elementos que formam o domíno completo [4]. As formas fracas das equações de Maxwell, contendo as descontinuidades dos campos explícitas, passam a ser

$$\int_\Omega \nabla \times \tilde{h}.\tilde{e} \; d\Omega + \frac{1}{2}\oint_\Gamma \tilde{h}.\hat{n} \times \left(\hat{e} + \tilde{e}\right) \, d\Gamma = -\int_\Omega \tilde{h}.\mu \tilde{h}' \, d\Omega \tag{7}$$

$$\int_\Omega \nabla \times \tilde{e}.\tilde{h} \, d\Omega + \frac{1}{2}\oint_\Gamma \tilde{e}.\hat{n} \times \left(\hat{h} + \tilde{h}\right) \, d\Gamma = \int_\Omega \tilde{e}.\varepsilon \tilde{e}' \, d\Omega + \int_\Omega \tilde{e}.\left(\sigma \tilde{e} + j\right) \, d\Omega \tag{8}$$

A integração por partes pode ser aplicada mais uma vez usando

$$\int_\Omega \nabla \times \tilde{h} \,.\tilde{e} \, d\Omega = \int_\Omega \tilde{h}.\nabla \times \tilde{e} \; d\Omega - \oint_\Gamma \tilde{h}.\hat{n} \times \tilde{e} \, d\Gamma \tag{9}$$

$$\int_\Omega \nabla \times \tilde{e} \,.\tilde{h} \, d\Omega = \int_\Omega \tilde{e}.\nabla \times \tilde{h} \; d\Omega - \oint_\Gamma \tilde{e}.\hat{n} \times \tilde{h} \, d\Gamma \tag{10}$$

para obter representações equivalentes de (7) and (8) respectivamente como

$$\int_\Omega \tilde{h}.\nabla \times \tilde{e}\; d\Omega + \frac{1}{2}\oint_\Gamma \tilde{h}.\hat{n} \times (\hat{e} - \tilde{e})\; d\Gamma = -\int_\Omega \tilde{h}.\mu\tilde{h}'\, d\Omega \tag{11}$$

$$\int_\Omega \tilde{e}.\nabla \times \tilde{h}\, d\Omega + \frac{1}{2}\oint_\Gamma \tilde{e}.\hat{n} \times \left(\hat{h} - \tilde{h}\right)\; d\Gamma = \int_\Omega \tilde{e}.\varepsilon\tilde{e}'\, d\Omega + \int_\Omega \tilde{e}.\left(\sigma\tilde{e} + j\right)\, d\Omega \tag{12}$$

Estas duas últimas equações permitem uma formulação com matrizes e vetores, na qual os elementos das matrizes são resultados do cálculo numérico das integrais pela técnica de quadratura gaussiana e os elementos dos vetores são coeficientes das combinações lineares das funções de base a serem encontrados [4]. A solução do problema é calculada passo a passo no tempo usando um método numérico para a resolução de equações diferenciais ordinárias, tais como *leap-frog*, trapezoidal ou Runge-Kutta, para citar alguns exemplos [4].

A principal contribuição científica deste projeto consiste no adequado tratamento da integral de superfície no membro esquerdo da equação (11) onde o termo $\hat{n} \times (\hat{e} - \tilde{e})$ significa a presença de uma densidade superficial de corrente magnética no contorno de cada elemento. As correntes magnéticas não existem nos fenômenos físicos reais e sua presença na simulação numérica pode gerar soluções sem significado físico, denominadas respostas espúrias, coexistindo com as soluções fisicamente aceitáveis nas quais se está interessado [5].

O sucesso do método de Galerkin contínuo veio com a adoção das funções de base de aresta, que permitem que dois elementos adjacentes compartilhem coeficientes das combinações lineares de suas respecitvas funçoes de base de forma que o campo elétrico tangencial à face comum seja contínuo, impondo assim a condição $\hat{n} \times (\hat{e} - \tilde{e}) = 0$ e como consequência imediada, a completa eliminação das respostas espúrias [6]. A desvantagem do método recai no fato de que o conjunto de equações algébricas resultante tem as incógnitas associadas a mais de um elemento simultaneamente, logo um grande sistema de equações lineares envolvendo todos os elementos deve ser solucionado pada cada passo de avanço no tempo.

O método de Galerkin descontínuo surgiu como uma alternativa para abrandar o peso computacional da solução do sistema de equações algébricas, permitindo que estes se limitassem a pequenos sistemas individuais para cada elemento e assim, impactasse de forma contrastante no desempenho computacional em relação ao método de Galrkin contínuo [4]. Por outro lado, surge neste a desvantagem de não se impor a condição $\hat{n} \times (\hat{e} - \tilde{e}) = 0$, logo o método é suscetível à aparição das respostas espúrias. Para contornar tal problema, foram criadas formas alternativas à simples média aritmética dos campos interno e externo descritas pelas equações (3) e (4), que neutralizam a geração das respostas espúrias, mas ao mesmo tempo causam dissipação numérica da energia eletromagnética. Esta dissipação artificial de energia é reduzida ao passo que se aumenta a ordem das funções de base polinomiais que aproximam os campos [7]. Apesar de ser eficaz, tal abordagem acaba sendo útil apenas em problemas eletromgneticamente grandes onde é possível ter elementos com dimensões lineares da ordem de um comprimento de onda nos quais o aumento da ordem polinomial das funções de base resulta também na melhoria da exatidão da solução [8]. Em estruturas eletromagneticamente pequenas, caso deste estudo, a dimensão linear do elemento é, em geral, menor que um décimo do comprimento de onda, portanto o aumento da ordem polinomial não tem outro efeito benéfico senão o de eliminar as respostas espúrias sem provocar a dissipação numérica, fato que acarreta na redução do desempenho computacional do método.

Trabalhos divulgados recentemente mostram que é possível usar as equações (3) e (4) e obter soluções livres das respostas espúrias, sem provocar dissipação numérica, mesmo com funçoes polinomiais de baixa ordem [9], [10]. A base da estratégia consiste em usar funções polinomiais para aproximar o campo elétrico diferentes daquelas para aproximar o campo magnético. Os motivos responsáveis pelo sucesso dessa estratégia ainda permanecem em investigação, sendo esta a linha norteadora para o desenvolvimento desta pesquisa.

IV. Materiais e metodologias

O desenvolvimento do programa computacional será baseado no software MATLAB para a execução dos algoritmos e no software GiD para desenho das estruturas e geração da malha de elementos finitos. Os softwares encontram-se disponíveis para uso no Departamento de Engenharia Elétrica onde será desenvolvido o projeto. A coleta de dados será realizada mediante a simulação numérica de estruturas baseadas em linhas de transmissão do tipo microstrip e de guias de onda metálicos [11]. Tais estruturas proporcionam a criação de ambientes artificiais controláveis com alta precisão e servirão para análise da exatidão dos resultados obtidos a fim de comprovar a eficácia da metodologia em investigação.

V. Equipe

- Coordenador:

  Professor Wilson Arnaldo Artuzi Junior

- Estudantes do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica:

  Sob demanda.

VI. Cronograma

- Primeiro Ano:

Estudo com funções de base polinomiais de primeira ordem: desenvolvimento dos algoritmos e testes de desempenho.

- Segundo Ano:

Estudo com funções de base polinomiais de segunda ordem: desenvolvimento dos algoritmos e testes de desempenho.

- Terceiro Ano:

Estudo com elementos curvilíneos: desenvolvimento dos algoritmos e testes de desempenho.

- Quarto Ano:

Elaboração do programa computacional com as técnicas de sucesso: manual de utilização com testes de *benchmark*.

VII. Infraestrutura disponível

Computadores e softwares MATLAB e GiD, todos disponíveis no Departamento de Engenharia Elétrica.

VIII. Produtos e impactos esperados

Ao final de cada etapa do projeto será escrito um artigo para publicação em periódico científico relevante nas áreas de eletromagnetismo aplicado, microondas e computação científica.

O projeto estará aberto a participação de estudantes do último ano do curso de graduação em Engenharia Elétrica para contribuições com trabalhos de conclusão de curso.

No final do projeto está prevista a elaboração do programa computacional que ficará disponível para uso no Departamento de Engenharia Elétrica para alunos de graduação, pós-graduação e professores interessados. O programa será usado como material de apoio na disciplina TE364 Circuitos de Radiofrequência do curso de graduação em Engenharia Elétrica.

References

[1] Taflove, A., *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, ed. Artech House, Boston, 1995.

[2] Jin, J.M., *The Finite Element Method in Electromagnetics*, 2ed., Wiley, 2002.

[3] Graglia R. D., Wilton, D. R., Peterson, A. F., "Higher Order Interpolatory Vector Bases," *IEEE Trans. Antennas and Prop*, vol. 45, pp. 329-342, 1997.

[4] Chen J., Liu Q. H., "Discontinuous Galerkin Time-Domain Methods for Multiscale Electromagnetic Simulations: A Review," *Proceedings of the IEEE,* vol.101, pp.242-254, 2013.

[5] Alvarez J., Angulo, L. D., Bretones A. R., Garcia, S. G., "A Spurious-Free Discontinuous Galerkin Time-Domain Method for the Accurate Modeling of Microwave Filters." *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 60, pp. 2359-2369, 2002.

[6] Lee, J-F., "WETD-A finite element time-domain approach for solving Maxwell's equations", *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 4, pp. 11-13, 1994.

[7] Songoro H., Vogel, M., Cendes, Z., "Keeping time with Maxwell equations", *IEEE Microwave Magazine*, pp. 42-49, Abril 2010.

[8] Alvarez, J., Angulo, L. D., Bretones, A. R., Cabello, M. R., Garcia, S. G.,"A Leap-Frog Discontinuous Galerkin Time-Domain Method for HIRF Assessment", *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 55, pp. 1250-1259, 2013.

[9] Tobón, L. E., Ren, Q., Liu, Q. H., "A new efficient 3D Discontinuous Galerkin Time Domain (DGTD) method for large and multiscale electromagnetic simulations," *Journal of Computational Physics*, vol. 283, 374-387, 2015.

[10] Jagher, E., "Método de Galerkin descontínuo com funções de base de baixa ordem", Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFPR, 2018.

[11] Hammerstad, E. O., "Accurate Models for Microstrip Computer-aided Design," *IEEE Int. Microwave Symp.*, pp. 407-409, 1980.