3 aulas

Capítulo 7. Transformada z

7.1. Transformada z de sinais aperiódicos

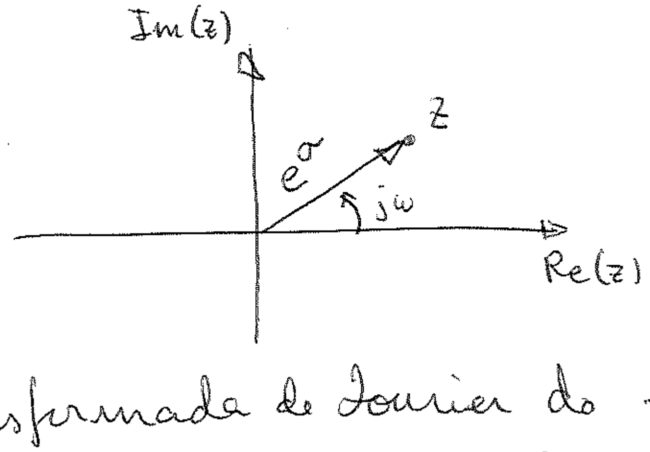
a) transformada direta

A transformada z direta $X(z)$ da sequência $x[n]$ é definida como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \mathcal{Z}\left[x[n]\right]$$

onde $X(z)$ é uma função real da variável complexa

$$z = e^{\sigma + j\omega} \quad \text{com} \quad \omega = 2\pi f T$$



A transformada de Fourier do tempo discreto é o caso particular quando $\sigma = 0$.

Ragazzini e Zadeh 1952, Jury 1960, Laplace 1785

b) transformada inversa.

A transformada z inversa ~~de Laplace~~ é definida como

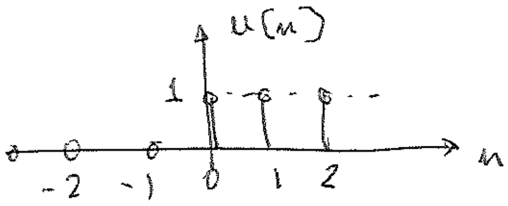
$$x[n] = \frac{1}{j2\pi} \int_{e^{\sigma - j\pi}}^{e^{\sigma + j\pi}} X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

c) par transformado $x[n] \Leftrightarrow X(z)$

A correspondência entre a sequência $x[n]$ e a função $X(z)$ é unívoca desde que seja respeitada a região de convergência de $X(z)$.

Exercício 7.1.

Calcule a transformada z direta $X(z)$ dos sinais a) $x[n] = u[n]$.



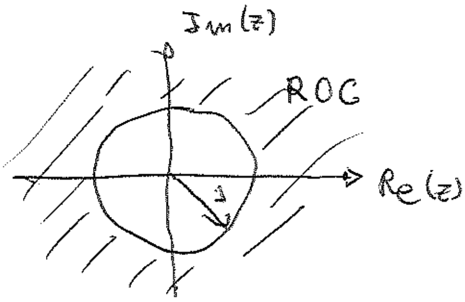
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]\, z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} 0 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots$$

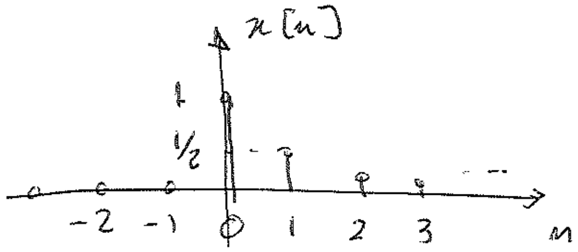
PG: $1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} = \dfrac{q^N - 1}{q - 1}$

$$X(z) = \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{\infty} - 1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{0 - 1}{\frac{1}{z} - 1} \quad \text{para} \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

$$X(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$



b) $x[n] = 2^{-n} u[n]$

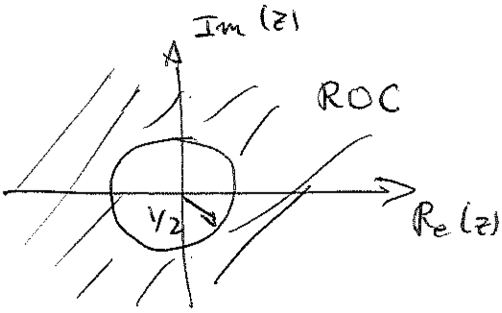


$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n} u[n] \, z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^{-n} = 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{8z^3} + \cdots$$

$$X(z) = \frac{\left(\frac{1}{2z}\right)^{\infty} - 1}{\frac{1}{2z} - 1} = \frac{0 - 1}{\frac{1}{2z} - 1} \quad \text{para} \quad \left|\frac{1}{2z}\right| < 1$$

$$X(z) = \frac{z}{z - 1/2}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$



7.2. Região de Convergência da Transformada z

A transformada z de uma sinal $x[n]$ é definida apenas para os valores de z no plano complexo que resultem em

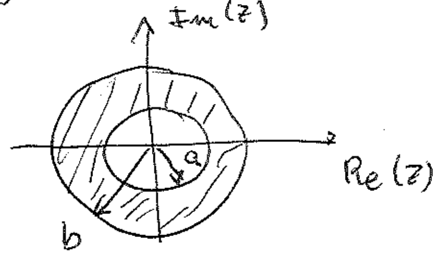
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]\, z^{-n}| < \infty$$

Os pontos no plano complexo z que satisfazem a condição acima definem a região de convergência ~~da transformada~~ função ~~X(z)~~.

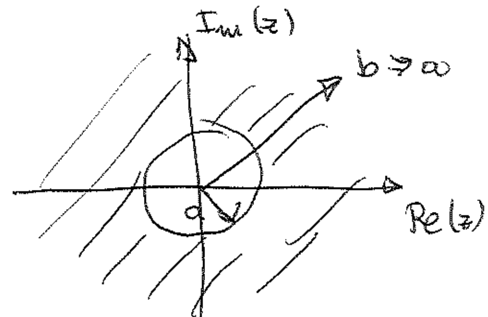
(ROC - region of convergence).

Propriedades da ROC

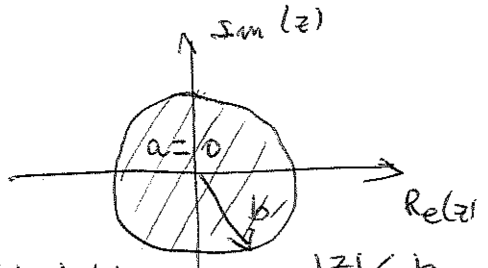
a) A ROC é uma região na forma de anel com centro na origem do plano complexo z, dada por $a < |z| < b$.



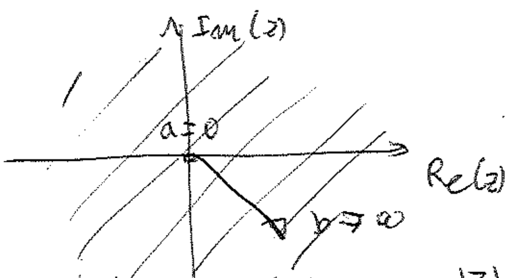
$a<|z|<b$



$a<|z|<\infty$ ou $|z|>a$



$0<|z|<b$ ou $|z|<b$

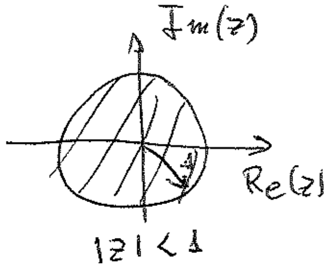


$0<|z|<\infty$, $|z|<\infty$ ou $|z|>0$

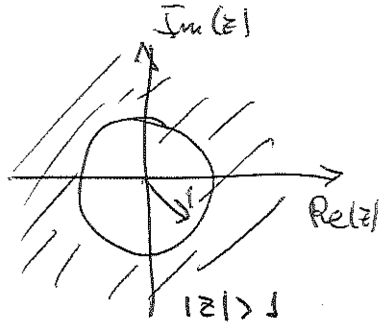
b) A ROC não contém os polos de $X(z)$ e é delimitada por estes. Polos são os valores de z que anulam o denominador de $X(z)$ quando na forma racional (divisão de polinômios em z).

exemplo

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \qquad z-1=0 \Rightarrow z=1=\lambda_1$$



ou

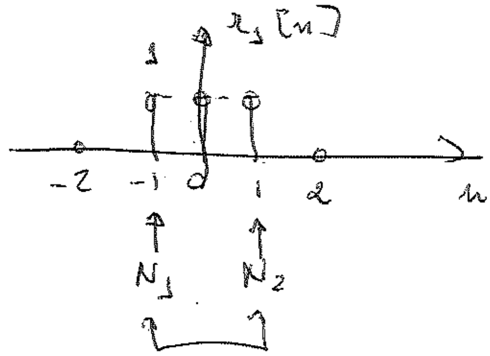


c) ROC de uma sequência finita

Uma sequência é dita finita quando satisfaz a condição $x[n]=0$ para $n<N_1$ e $n>N_2$.

exemplo

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq 1 \\ 0, & |n| > 1 \end{cases}$$



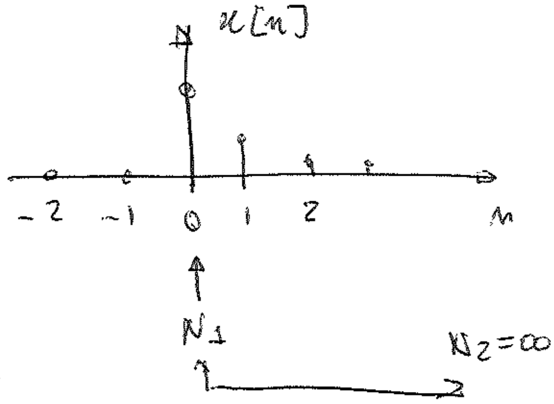
A ROC de uma sequência finita é todo o plano complexo z $(a=0, b=\infty)$ e inclui $\begin{cases} |z|=0 \text{ se } N_2 \leq 0 \\ |z|=\infty \text{ se } N_1 \geq 0 \end{cases}$

d) ROC de uma sequência à direita

Uma sequência é dita à direita quando satisfaz a condição $x[n] = 0$ para $n < N_1$.

exemplo

$$x[n] = 2^{-n} u[n]$$



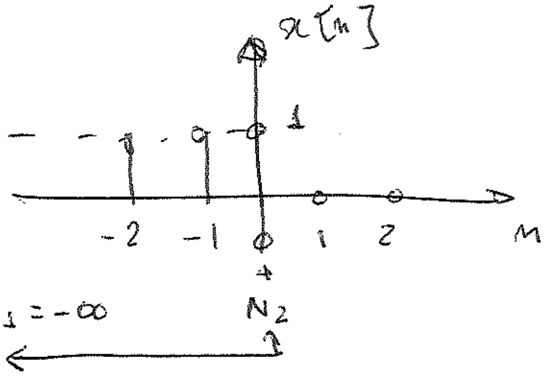
A ROC de uma sequência à direita é o exterior de uma circunferência ($a = \infty$) e inclui $|z| = \infty$ se $N_1 \geqslant 0$.

e) ROC de uma sequência à ~~di~~ esquerda

Uma sequência é dita à esquerda quando satisfaz a condição $x[n] = 0$ para $n > N_2$.

exemplo

$$x[n] = u[-n]$$

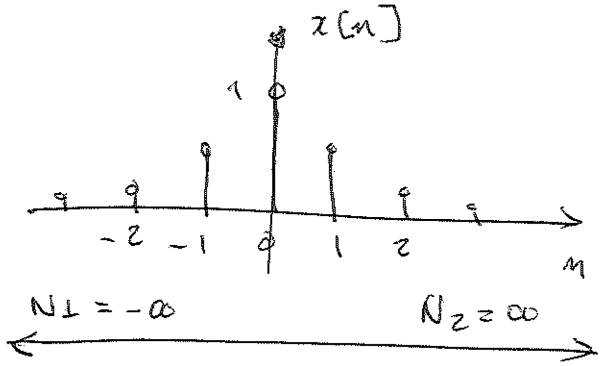


A ROC de uma sequência à esquerda é o interior de uma circunferência ($a = 0$) e inclui $|z| = 0$ se $N_2 \geqslant 0$.

f) ROC de uma sequência bilateral

Uma sequência é dita bilateral quando não se enquadra nos casos anteriores e não é periódica.

<u>exemplo</u> $x[n] = 2^{-|n|}$

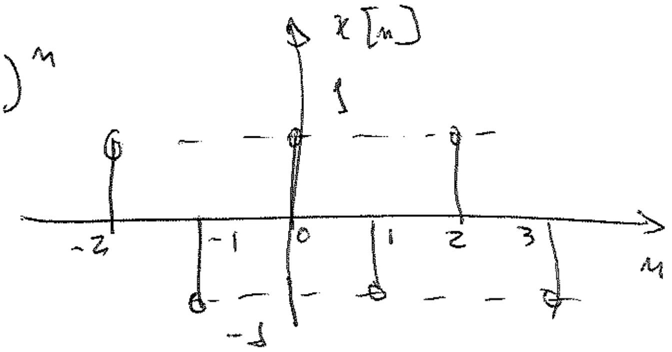


a ROC de uma sequência bilateral é um anel.

g) ROC de uma sequência periódica

Uma sequência é dita periódica quando apresenta um padrão que se repete infinitamente com a mesma intensidade.

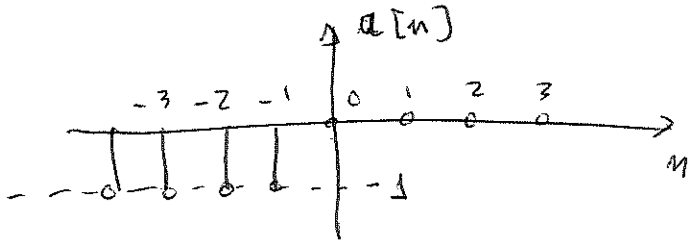
<u>exemplo</u> $x[n] = (-1)^n$



Não existe ROC para sequências periódicas, logo a transformada z não se aplica nesses casos.

Exercício ~~Exemplo~~ 7.2 Calcule a transformada z do sinal $x[n] = -u[-n-1]$.

$$-u[-n-1] = \begin{cases} 0 \ , & -n-1 < 0 \text{ ou } n > -1 \\ -1 \ , & -n-1 \leq 0 \text{ ou } n \leq -1 \end{cases}$$



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -u[-n-1]\, z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -z^{-n} = -z - z^2 - z^3 - \cdots = -z\left(1 + z + z^2 + \cdots\right)$$

$$X(z) = -z\,\frac{(z)^{\infty} - 1}{z - 1} = -z\,\frac{0 - 1}{z - 1} \quad \text{para } |z| < 1$$

$$X(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| < 1$$

7.3 Propriedades da transformada z

a) linearidade

$$y[n] = k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n] \Leftrightarrow Y(z) = k_1 X_1(z) + k_2 X_2(z)$$

para $a_1 < |z| < b_1 \cap a_2 < |z| < b_2$ (não se aplica quando há cancelamento de polos).

b) deslocamento

$$y[n] = x[n-N] \Leftrightarrow Y(z) = X(z) \cdot z^{-N}$$

para $a < |z| < b$ podendo alterar em $a = 0$ e $b = \infty$.

c) reversão

$$y[n] = x[-n] \Leftrightarrow Y(z) = X(1/z)$$

para $a < |1/z| < b$.

d) produto por exponencial

$$y[n] = k^n x[n] \Leftrightarrow Y(z) = X(z/k)$$

para $a < |z/k| < b$.

e) produto por n

$$y[n] = n\, x[n] \Leftrightarrow Y(z) = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

para $a < |z| < b$

f) acumulação

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \Leftrightarrow Y(z) = \frac{z}{z-1} X(z)$$

para $a < |z| < b \cap |z| > 1$ (não se aplica quando há cancelamento de polos).

g) convolução

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] \Leftrightarrow Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

para $a_1 < |z| < b_1 \cap a_2 < |z| < b_2$. (não se aplica quando há cancelamento de polos).

h) cancelamento de polos

As ~~As propriedades com~~ interseções ($\cap$) das ROCs não se aplicam quando houver cancelamento de polos resultante da aplicação da respectiva propriedade.

~~Exemplo 6.8~~ 4

Exercício 7.3 Calcule a transformada z direta $X(z)$ e especifique sua ROC usando o par transformado $u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}$, $|z|>1$, para os sinais:

a) $x[n] = r_1[n]$

b) $x[n] = -u[-n-1]$

c) $x[n] = 2^{-|n|}$

Calcule a transformada z direta da sequência $r_1[n]$ usando

a) a definição

$$r_1[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq 1 \\ 0, & |n| > 1 \end{cases}$$

$$R_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} 0\, z^{-n} + \sum_{n=-1}^{1} 1\, z^{-n} + \sum_{n=2}^{\infty} 0\, z^{-n}$$

$$R_1(z) = z + 1 + \frac{1}{z} = \frac{z^2 + z + 1}{z}$$

sequência finita $\Rightarrow$ $0 < |z| < \infty$

b) ~~usando~~ o par $u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}$, $|z| > 1$

$$r_1[n] = u[n+1] - u[n-2]$$

$$R_1(z) = \frac{z}{z-1} z - \frac{z}{z-1} z^{-2}, \quad 1 < |z| < \infty \ \cap \ 1 < |z| \leq \infty$$

$$R_1(z) = \frac{z^2}{z-1} - \frac{1}{z(z-1)} = \frac{z^3 - 1}{z(z-1)}, \quad 1 < |z| < \infty$$

$$R_1(z) = \frac{(z^2 + z + 1)\cancel{(z-1)}}{z\cancel{(z-1)}}$$ cancelamento do polo em $z = 1$

Exemplo 6.6

Calcule a transformada z direta da sequência $y[n] = 2^{-|n|}$ usando

a) a definição

b) o par $u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}, \; |z| > 1$

$$y[n] = 2^{n} u[-n] + 2^{-n} u[n-1]$$

$$u[-n] \Leftrightarrow \frac{1/z}{1/z - 1}, \quad 1 < \left|\frac{1}{z}\right| \leq \infty$$

$$\frac{1}{1-z}, \quad 0 \leq |z| < 1$$

$$2^{n} u[-n] \Leftrightarrow \frac{1}{1 - z/2}, \quad 0 \leq \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \text{ ou } 0 \leq |z| < 2$$

$$u[n-1] \Leftrightarrow \frac{z}{z-1} \cdot z^{-1}, \quad 1 < |z| \leq \infty$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n-1] \Leftrightarrow \frac{1}{2z-1}, \quad 1 < |2z| \leq \infty$$

$$\frac{1/2}{z - 1/2}, \quad \frac{1}{2} < |z| \leq \infty$$

$$Y(z) = \frac{2}{2-z} + \frac{1/2}{z - 1/2} = \frac{2z \cancel{-1} \cancel{+1} - z/2}{-z^{2} + \frac{5}{2} z - 1} = \frac{-\frac{3}{2} z}{z^{2} - \frac{5}{2} z + 1}$$

$$0 \leq |z| < 2 \;\wedge\; \frac{1}{2} < |z| \leq \infty \Rightarrow \frac{1}{2} < |z| < 2.$$