2 aulas

# 4. Análise de Fourier no Tempo Discreto



## 4.1. Transformada de Fourier de sinais aperiódicos

a) variável frequência angular $\omega$

Considere o par transformado ~~de~~ tempo contínuo

$$x(t) \Leftrightarrow X_c(f)$$

e o par transformado da sua amostragem a intervalos regulares de tempo T

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, T.\, \delta(t-nT) \Leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_c\left(f-\frac{m}{T}\right)$$

Aplicando-se a definição da transformada direta de Fourier obtém-se

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_c\left(f-\frac{m}{T}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, T\, \delta(t-nT)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad t = nT$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, T\, e^{-j2\pi f nT} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\, dt}_{1}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\omega-2\pi m}{2\pi T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].\, e^{-j\omega n}$$

onde $\omega = 2\pi f T$ é a variável frequência angular e $X(\omega)$ é uma função periódica com período $2\pi$.

b) transformadas de Fourier

A transformada direta de Fourier no tempo discreto é a operação

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

e a transformada inversa segue o mesmo procedimento usado para a obtenção dos coeficientes da série exponencial de Fourier que resulta em

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

visto que $X(\omega)$ tem período $2\pi$.

c) sinal no domínio do tempo discreto $n$

$x[n]$ é uma sequência real da variável real e discreta $n$ que representa o sinal no domínio do tempo discreto

d) sinal no domínio da frequência angular $\omega$

$X(\omega)$ é uma função complexa da variável real e contínua $\omega$ com período $2\pi$ que representa o sinal no domínio da frequência angular.

e) par transformado $x[n] \Leftrightarrow X(\omega)$

A correspondência entre $x[n]$ e $X(\omega)$ é unívoca.

# 4.2 Transformada de Fourier de sinais periódicos

a) sequência periódica

Sequência periódica é aquela que satisfaz a condição $x[n \pm N] = x[n]$ onde $N$ (inteiro) é o período.

b) transformadas de Fourier

<u>transformada direta</u>

$$X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi C_m \, \delta(\omega - 2\pi m/N) \quad \text{com} \quad C_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi m n}{N}}$$

<u>transformada inversa</u>

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} C_m e^{j 2\pi m n / N}$$

c) transformadas discretas de Fourier

A transformada discreta de Fourier é uma sequência complexa que contém apenas os $N$ coeficientes $C_m$ num período de $X(\omega)$ $(0 \leq m < N)$

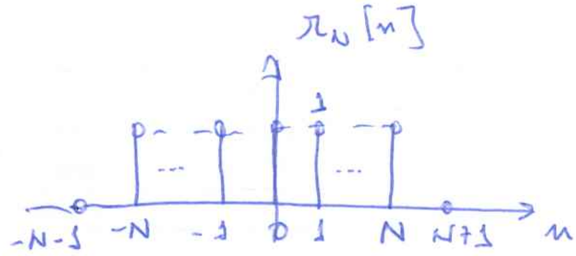
$$X[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j 2\pi n m / N}$$

$$\leftrightarrow$$

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j 2\pi m n / N}$$

Exercício 4.1 Calcule as transformadas diretas de Fourier dos ~~sequências abaixo:~~ sinais:

a) $x[n] = r_N[n]$




$$r_N[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ 0, & |n| > N \end{cases}$$

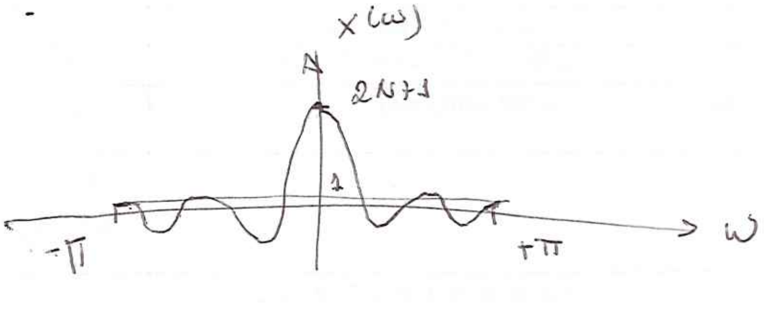
$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_N[n]\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N}^{N} e^{-j\omega n}$$

$$X(\omega) = e^{+j\omega N} + \dots + e^{-j\omega N} \quad (2N+1 \text{ termos, razão } e^{-j\omega})$$

$$X(\omega) = e^{j\omega N} \, \frac{\left(e^{-j\omega}\right)^{2N+1} - 1}{e^{-j\omega} - 1}$$

$$X(\omega) = e^{j\omega N} \, \frac{e^{-j\omega(N+1/2)}}{e^{-j\omega/2}} \cdot \frac{e^{-j\omega(N+1/2)} - e^{j\omega(N+1/2)}}{e^{-j\omega/2} - e^{j\omega/2}}$$

$$X(\omega) = \frac{\operatorname{sen}\left[\omega(N+1/2)\right]}{\operatorname{sen}(\omega/2)}$$



b) $x[n] = g_1[n]$

# 4.3 Propriedades da Transformada de Fourier

a) combinação linear

$$y[n] = k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n] \Leftrightarrow Y(\omega) = k_1 X_1(\omega) + k_2 X_2(\omega)$$

b) deslocamento

$$y[n] = x[n-\ell] \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega)\, e^{-j\omega \ell}$$

c) reversão

$$y[n] = x[-n] \Leftrightarrow Y(\omega) = X(-\omega)$$

d) acumulação

$$y[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{n} x[\ell] \Leftrightarrow Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(0)\,\delta(\omega)$$

e) produto por n

$$y'[n] = n \cdot x[n] \Leftrightarrow Y(\omega) = j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$$

f) produto

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \Leftrightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

g) convolução

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_1[\ell] \cdot x_2[n-\ell]$$

$$\Leftrightarrow Y(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

h) ~~sequência~~ sinal real

se $Im[x[n]] = 0$ então $X(-\omega) = X(\omega)^*$

i) ~~sequência~~ sinal real e par

se $x[-n] = x[n]$ então $Im[X(\omega)] = 0$

e $X(-\omega) = X(\omega)$

j) ~~sequência~~ sinal real e ímpar

se $x[-n] = -x[n]$ então $Re[X(\omega)] = 0$ e

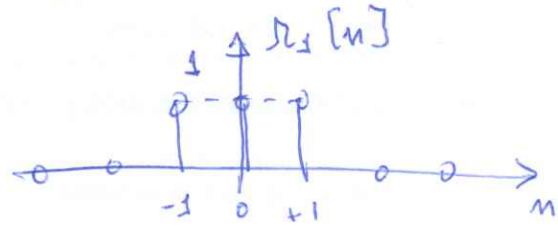
$X(-\omega) = -X(\omega)$

# Exercício 4.2

Sabendo que $r_N[n] \leftrightarrow R_N(\omega) = \dfrac{\operatorname{sen}[\omega(N+1/2)]}{\operatorname{sen}(\omega/2)}$,

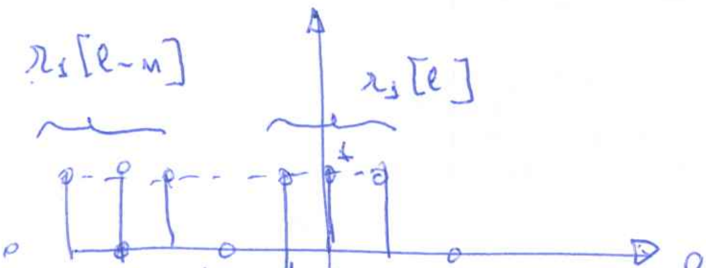
calcule a transformada direta de Fourier $G_N(\omega)$ da ~~sinal~~ janela triangular $g_N[n]$.

$$r_1[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq 1 \\ 0, & |n| > 1 \end{cases}$$




$$r_1[n] * r_1[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_1[l] \cdot r_1[n-l]$$

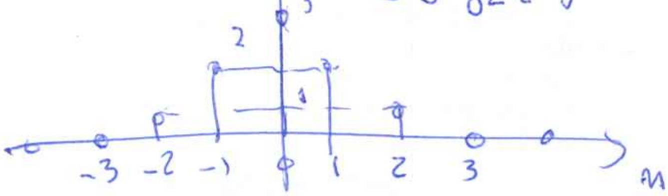
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_1[l] \cdot r_1[l-n]$$




| n+1 | n | $r_1[n] * r_1[n]$ |
|---|---|---|
| < -1 | < -2 | 0 |
| -1 | -2 | 1 |
| 0 | -1 | 2 |
| 1 | 0 | 3 |
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 1 |
| > 3 | > 2 | 0 |

$r_1[n] * r_1[n]$

$= 3\, g_2[n]$




$$g_2[n] = \frac{1}{3} r_1[n] * r_1[n]$$

$$g_N[n] = \frac{1}{N+1} r_{\frac{N}{2}}[n] * r_{\frac{N}{2}}[n] \leftrightarrow G_N(\omega) = \frac{1}{N+1}\left[\frac{\operatorname{sen}[\omega(N+1)/2]}{\operatorname{sen}(\omega/2)}\right]^2$$

Exercício 4.3.

Sabendo que $\delta[n] \Leftrightarrow 1$, calcule a transformada ~~direta~~ de Fourier do ~~sequência~~ sinal

$$y[n] = \cancel{n}\, u[n]$$

$$u[n] = \sum_{l=-\infty}^{n} \delta[n] \Leftrightarrow U(\omega) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\delta(\omega)$$

$$y[n] = u[-n] \Leftrightarrow Y(\omega) = U(-\omega) = \frac{1}{1-e^{j\omega}} + \pi\delta(\omega)$$