

7 Transformada Z

Aula 27 - Capítulo 7: páginas 4 a 7

7.3 Exercício Resolvido

Calcule transformada z direta da sequência $x[n] = -u[-n - 1]$ e especifique sua ROC.

- Passo 1: Gráfico da sequência $x[n]$.

A definição do degrau discreto estabelece

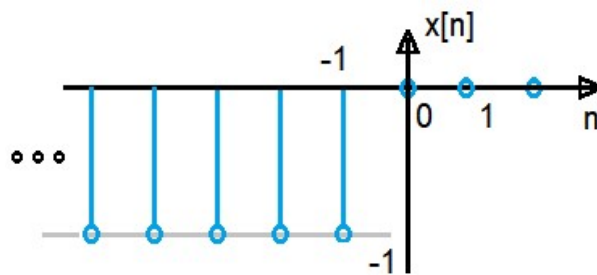
$$u[n] = \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ 1 & , n \geq 0 \end{cases}$$

logo

$$-u[-n - 1] = \begin{cases} 0 & , -n - 1 < 0 \\ -1 & , -n - 1 \geq 0 \end{cases}$$

ou

$$-u[-n - 1] = \begin{cases} 0 & , n > -1 \\ -1 & , n \leq -1 \end{cases}$$



- Passo 2: Usar a fórmula da definição (cap7/pag1).

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -u[-n - 1].z^{-n} \\ X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} -1.z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 0.z^{-n} = -z - z^2 - z^3 - \dots \end{aligned}$$

- Passo 3: Soma dos termos da progressão geométrica.

Os termos da expressão de $X(z)$ formam um progressão geométrica de razão z (valor que se multiplica um termo para obter o seguinte) e para usar a fórmula

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

é necessário colocar o primeiro termo em evidência e fazer $N = \infty$ e $q = z$, logo

$$X(z) = -z (1 + z + z^2 + \dots) = \lim_{N \rightarrow \infty} -z \frac{1 - (z)^N}{1 - z}$$

e considerando que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (z)^N = 0 \quad \text{somente se } |z| < 1$$

vem

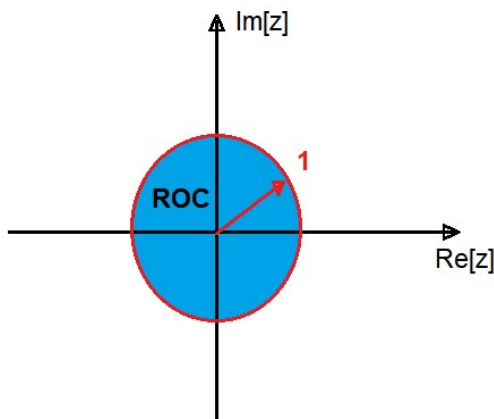
$$X(z) = -z \frac{1-0}{1-z}, \quad |z| < 1$$

ou melhor

$$X(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| < 1$$

Este exemplo consiste numa sequência à esquerda anulando-se a partir de $n = 0$, logo, pelas propriedades, a ROC é o interior de uma circunferência e inclui $|z| = 0$. A ROC não inclui os polos e é delimitada por estes. No caso, há um polo em $z = 1$ (valor de z que anula o denominador da função racional). Assim, a ROC deve ser o interior de uma circunferência de raio unitário, como já foi observado na resolução acima.

Vale a pena observar que a função de z resultante é a mesma da transformada z do degrau discreto do exercício resolvido 7.1, porém os valores de z que estão na ROC são diferentes.



7.4 Exercício Proposto

Calcule transformada z direta da sequência $x[n] = u[-n]$ e especifique sua ROC.