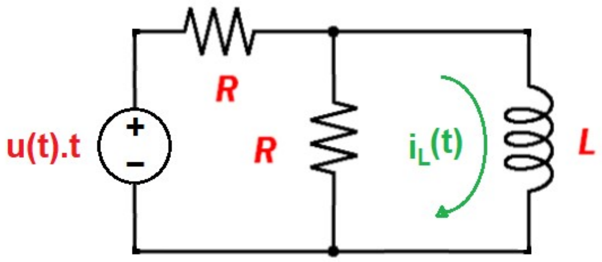
5 Transformada de Laplace

Aula 20 - Capítulo 5: páginas 17 a 18

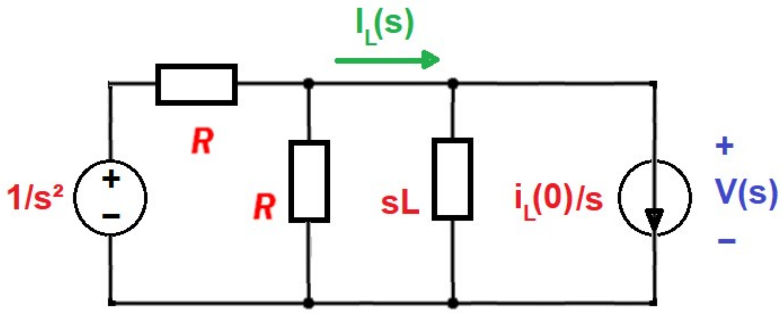
5.7 Exercício Resolvido

Calcule a corrente elétrica no indutor $i_L(t)$ indicada no circuito elétrico abaixo com $R = 1$, $L = 1$, $i_L(0) = 1$ (unidades SI).



- Passo 1: Transformar o circuito elétrico para o domínio s.

  Conhecendo o par transformado
  $$u(t).t \leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad \text{(cap5/pag5)}$$
  e usando o modelo de equivalente de Norton para o indutor vem o circuito elétrico equivalente abaixo com as impedâncias dos elementos indicadas.



- Passo 2: Lei dos nós.

  É possível resolver o circuito usando a lei dos nós aplicada ao nó superior do circuito com a introdução da variável auxiliar $V(s)$.

  Para as correntes que saem do nó superior tem-se
  $$\frac{V(s) - 1/s^2}{R} + \frac{V(s)}{R} + \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_L(0)}{s} = 0$$
  Isolando $V(s)$ vem
  $$V(s) = \frac{1/s^2R - i_L(0)/s}{2/R + 1/sL}.\frac{s^2}{s^2} = \frac{-s.i_L(0) + 1/R}{s^2.2/R + s/L}$$
  Das correntes que saem do nó superior direito tem-se
  $$-I_L(s) + \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_L(0)}{s} = 0$$

logo

$$\begin{aligned} I_L(s) &= \frac{1}{s}\left[\frac{V(s)}{L}+i_L(0)\right] \\ I_L(s) &= \frac{1}{s}\left[\frac{1}{L}\frac{-s.i_L(0)+1/R}{s^2.2L/R+s/L}+i_L(0)\right] \end{aligned}$$

Substituindo os valores numéricos obtém-se

$$I_L(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{-s+1}{s^2.2+s}+1\right)$$

que pode ser escrita na forma padrão

$$I_L(s)=\frac{1}{s}\frac{-s+1+s^2.2+s}{s^2.2+s}=\frac{s^2.2+1}{s^3.2+s^2}.\frac{1/2}{1/2}$$

$$I_L(s)=\frac{s^2+1/2}{s^3+s^2/2}$$

- Passo 3: Polos.

$$s^3+s^2/2=0\Rightarrow s=\begin{cases} 0=\lambda_1=\lambda_2 \\ -1/2=\lambda_3 \end{cases}$$

- Passo 4: Forma fatorada.

$$I_L(s)=\frac{s^2+1/2}{s^2(s+1/2)}$$

- Passo 5: Resíduos.
  Situação com polos duplos, logo

$$\begin{aligned} c_1 &= \left[(s-\lambda_1)^2 I_L(s)\right]_{s=\lambda_1}=\left[s^2\frac{s^2+1/2}{s^2(s+1/2)}\right]_{s=0} \\ c_1 &= \frac{0^2+1/2}{0+1/2}=1 \\ c_2 &= \left[\frac{d}{ds}(s-\lambda_1)^2 I_L(s)\right]_{s=\lambda_1}=\left[\frac{d}{ds}s^2\frac{s^2+1/2}{s^2(s+1/2)}\right]_{s=0} \\ c_2 &= \left[\frac{d}{ds}\frac{s^2+1/2}{s+1/2}\right]_{s=0}=\left[\frac{(s+1/2).2s-\left(s^2+1/2\right).1}{(s+1/2)^2}\right]_{s=0} \\ c_2 &= \frac{(0+1/2).2.0-\left(0^2+1/2\right).1}{(0+1/2)^2}=-2 \\ c_3 &= \left[(s-\lambda_3)I_L(s)\right]_{s=\lambda_3}=\left[(s+1/2)\frac{s^2+1/2}{s^2(s+1/2)}\right]_{s=-1/2} \\ c_3 &= \frac{(-1/2)^2+1/2}{(-1/2)^2}=3 \end{aligned}$$

- Passo 6: Substituir na equação da transformada inversa com polos duplos.

$$i_L(t)=u(t).\left(c_1.e^{\lambda_1 t}.t+c_2.e^{\lambda_1 t}+c_3.e^{\lambda_3 t}\right)$$

$$i_L(t)=u(t).\left(t-2+3.e^{-t/2}\right)$$

5.8 Exercício Proposto

Calcule a tensão elétrica no capacitor $v(t)$ indicada no circuito elétrico abaixo com $R = 1$, $C = 1$, $v(0) = 1$ (unidades SI).