

1 Sinais de Tempo Contínuo

Aula 02 - Capítulo 1: páginas 13 e 14

1.3 Exercício Resolvido

Desenvolva a expressão matemática e desenhe o gráfico do sinal

$$y(t) = [u(t).e^{-kt}] * u(t)$$

- Passo 1: Equação da convolução (cap1/pag14).

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) * x_2(t - \tau) d\tau$$

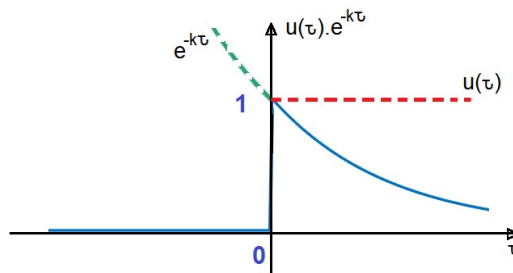
Fazendo

$$x_1(t) = u(t).e^{-kt} \quad \text{e} \quad x_2(t) = u(t)$$

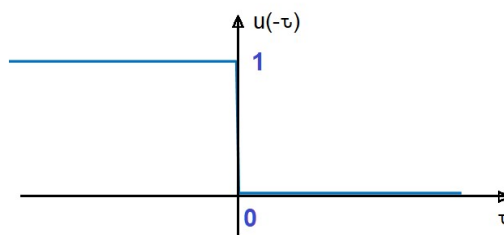
vem

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau).e^{-k\tau}.u(t - \tau) d\tau$$

- Passo 2: Gráfico de $u(\tau).e^{-k\tau}$ (propriedade do produto pelo degrau cap1/pag13).



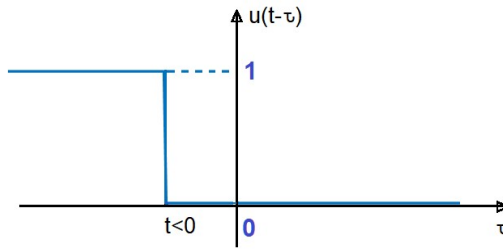
- Passo 3: Gráfico de $u(-\tau)$ (operação de reversão cap1/pag9).



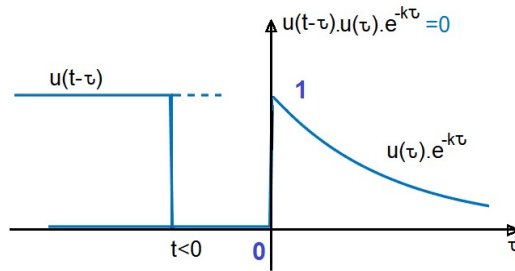
- Passo 4: Deslocamento de $t < 0$ (operação do deslocamento cap1/pag8).

Ao se fazer um deslocamento com $k = t$ no eixo τ obtém-se

$$u(-(\tau - k)) = u(-(\tau - t)) = u(t - k)$$



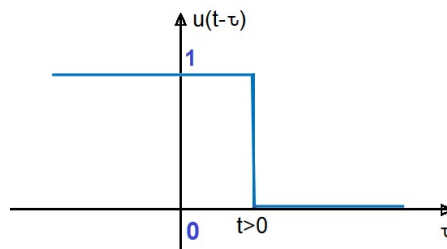
- Passo 5: Convolução para $t < 0$.



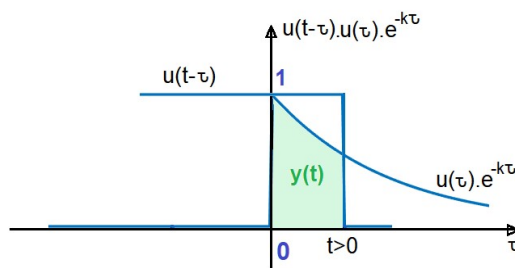
Assim,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot e^{-k\tau} \cdot u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 d\tau = 0, \quad t < 0$$

- Passo 6: Deslocamento de $t > 0$ (operação do deslocamento cap1/pag8).



- Passo 7: Convolução para $t > 0$.



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot e^{-k\tau} \cdot u(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 0 d\tau + \int_0^t e^{-k\tau} d\tau + \int_t^{\infty} 0 d\tau$$

Sabendo que

$$\int e^{kt} dt = \frac{e^{kt}}{k}$$

tem-se

$$y(t) = \left[\frac{e^{-kt}}{-k} \right]_0^t = \frac{e^{-kt} - e^0}{-k} = \frac{1 - e^{-kt}}{k}, \quad t > 0$$

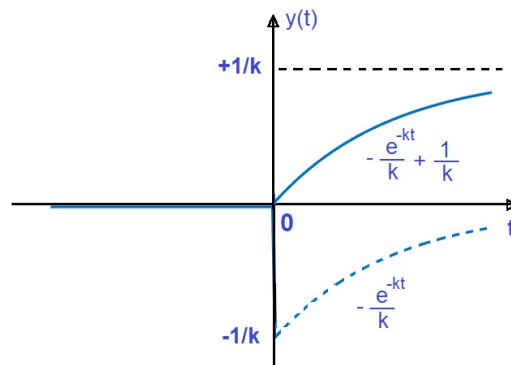
- Passo 8: Resultado final e gráfico.

Resumindo

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ \frac{1 - e^{-kt}}{k} & , t \geq 0 \end{cases}$$

sendo que o produto pelo degrau pode deixar a expressão numa forma mais compacta (cap1/pag13) conforme

$$y(t) = u(t) \cdot \frac{1 - e^{-kt}}{k}$$



▷ **Complementação:** Veja uma animação gráfica da convolução do sinal exponencial com um pulso retangular no endereço abaixo.

<https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution>

1.4 Exercício Proposto

Desenvolva a expressão matemática e desenhe o gráfico do sinal

$$y(t) = [u(t) \cdot e^{-kt}] * u(t)$$

usando a propriedade da convolução pelo degrau (final da pag14).