LISTA 06_4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Sistema de equações homogêneas. Autovalores complexos
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 6:

(a) Expresse a solução geral do sistema de equações dado como combinação de funções reais.

(b) Desenhe, também, um campo de direções, esboce algumas trajetórias e descreva o comportamento das soluções quando t → ∞.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas 7 e 8, expresse a solução geral do sistema de equações dado em termos de funções reais.

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas 9 e 10, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Descreva o comportamento da solução quando t → ∞.

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Em cada um dos Problemas 11 e 12:

(a) Encontre os autovalores do sistema dado.

(b) Escolha um ponto inicial (diferente da origem) e desenhe a trajetória correspondente no plano x1x2.

(c) Para a sua trajetória encontrada em (b), desenhe os gráficos de x1 e x2 em função de t.

(d) Para a sua trajetória encontrada em (b), desenhe o gráfico correspondente no espaço tridimensional tx1x2.

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -2 \\ 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 2 \\ -1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Em cada um dos problemas de 13 a 20, a matriz de coeficientes contém um parâmetro α. Em cada um desses problemas:

(a) Determine os autovalores em função de α.

(b) Encontre o valor ou valores críticos de α em que muda a natureza qualitativa do retrato de fase para o sistema.

(c) Desenhe retratos de fase para um valor de α ligeiramente menor, e para outro valor ligeiramente maior, do que cada valor crítico.

13. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x}$

14. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x}$

15. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

16. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \alpha & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

17. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

18. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

19. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

20. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos Problemas 21 e 22, resolva o sistema de equações dado pelo método do Problema 19 da Seção 7.5. Suponha que t > 0.

21. $$t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

22. $$t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos Problemas 23 e 24:

(a) Encontre os autovalores do sistema dado.

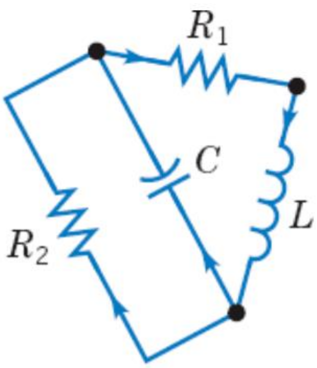
(b) Escolha um ponto inicial (diferente da origem) e desenhe as trajetórias correspondentes no plano x_1x_2. Desenhe, também, as trajetórias nos planos x_1x_3 e x_2x_3.

(c) Para o ponto inicial do item (b), desenhe a trajetória correspondente no espaço $x_1x_2x_3$.

23. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

24. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

25. Considere o circuito elétrico ilustrado na figura. Suponha que $R_1 = R_2 = 4\ \Omega$, C = F e L = 8 H.



(a) Mostre que esse circuito é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

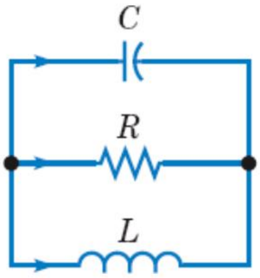
em que I é a corrente passando no indutor e V é a queda de tensão através do capacitor. Sugestão: Veja o Problema 20 da aula 06_1.

(b) Encontre a solução geral em termos de funções reais.

(c) Encontre I(t) e V(t) se I(0) = 2 A e V(0) = 3 V.

(d) Determine os valores limites de I(t) e V(t) quando t $\to \infty$. Esses valores limites dependem das condições iniciais?

26. O circuito elétrico ilustrado na Figura é descrito pelo sistema de equações diferenciais ao lado



$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

em que I é a corrente passando no indutor e V é a queda de tensão através do capacitor. Essas equações diferenciais foram deduzidas no Problema 19 da aula 06_1 e na própria da aula 06_1.

(a) Mostre que os autovalores da matriz de coeficientes são reais e distintos se $L > 4R_2C$; mostre que são complexos conjugados se $L < 4R_2C$.

(b) Suponha que R=1 Ω, C=1/2 F e L= 1 H Encontre a solução geral do sistema nesse caso.

(c) Encontre I(t) e V(t) se I(0) = 2 A e V(0) = 1 V.

(d) Para o circuito no item (b), determine os valores limites de I(t) e V(t) quando t $\to \infty$. Esses valores limites dependem das condições iniciais?

27. Vamos indicar, nesse problema, como mostrar que **u**(t) e **v**(t) são linearmente independentes. Sejam $r_1 = \lambda + i\mu$ e $\overline{r_1} = \lambda - i\mu$ um par de autovalores conjugados da matriz de coeficientes **A**; sejam $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ e $\overline{\boldsymbol{\xi}^{(1)}} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ os autovetores associados. Lembre-se que dois autovalores diferentes têm autovetores linearmente independentes, de modo que, se $r_1 \neq \overline{r_1}$, então $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e de $\overline{\boldsymbol{\xi}^{(1)}}$ são linearmente independentes.

(a) Vamos mostrar primeiro que a e b são linearmente independentes. Considere a equação $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Expresse a e b em função de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e de $\overline{\boldsymbol{\xi}^{(1)}}$, e depois mostre que $(c_1 - ic_2)\,\boldsymbol{\xi}^{(1)} + (c_1 - ic_2)\,\overline{\boldsymbol{\xi}^{(1)}} = \mathbf{0}$.

(b) Mostre que $c_1 - ic_2 = 0$ e $c_1 + ic_2 = 0$, e que, portanto, $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. Em consequência, **a** e **b** são linearmente independentes.

(c) Para mostrar que **u**(t) e **v**(t) são linearmente independentes, considere a equação $c_1\mathbf{u}(t_0) + c_2\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{0}$, em que t_0 é um ponto arbitrário. Reescreva essa equação em termos de **a** e **b**, e depois prossiga como no item (b) para mostrar que $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. Logo, **u**(t) e **v**(t) são linearmente independentes no ponto arbitrário t_0. Portanto, são linearmente independentes em qualquer ponto e em qualquer intervalo.

28. Uma massa m em uma mola com constante k satisfaz a equação diferencial (já vimos isso na aula)

$$mv'' + kv = 0.$$

em que v(t) é o deslocamento da massa no instante t a partir de sua posição de equilíbrio.

(a) Sejam $x_1 = v$ e $x_2 = v'$; mostre que o sistema resultante é

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(b) Encontre os autovalores da matriz para o sistema no item (a).

(c) Esboce diversas trajetórias do sistema. Escolha uma de suas trajetórias e esboce os gráficos correspondentes de x_1 e de x_2 em função de t. Esboce ambos os gráficos no mesmo conjunto de eixos.

(d) Qual é a relação entre os autovalores da matriz de coeficientes e a frequência natural do sistema massa mola?

29. Considere o sistema com duas massas e três molas do Exemplo 3 da aula. Em vez de converter o problema em um sistema de quatro equações de primeira ordem, vamos indicar aqui como proceder diretamente a partir das equações de segunda ordem...

(a) Mostre que as equações de segunda ordem podem ser escritas na forma

$$\mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

(b) Suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ e mostre que

$$(\mathbf{A} - r^2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$$

Note que r^2 (em vez de r) é um autovalor de **A** associado ao autovetor $\boldsymbol{\xi}$.

(c) Encontre os autovalores e autovetores de **A**.

(d) Escreva expressões para x_1 e x_2. Deve haver quatro constantes arbitrárias nessas expressões.

(e) Diferenciando os resultados do item (d), escreva expressões para x_1' e x_2'. Seus resultados nos itens (d) e (e) devem estar de acordo com as equações da aula.

30. Considere o sistema com duas massas e três molas cujas equações de movimento vimos na aula. Suponha que $m_1 = 1$, $m_2 = 4/3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ e $k_3 = 4/3$.

(a) Como no texto, transforme o sistema em quatro equações de primeira ordem da forma $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Determine a matriz de coeficientes **A**.

(b) Encontre os autovalores e autovetores de **A**.

(c) Escreva a solução geral do sistema.

(d) Descreva os modos fundamentais de vibração. Para cada modo fundamental, desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4.

(e) Considere as condições iniciais $\mathbf{y}(0) = (2, 1, 0, 0)^T$. Calcule as constantes arbitrárias na solução geral do item (c). Qual é o período do movimento nesse caso? Desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4. Certifique-se de que você compreende como as trajetórias são percorridas durante um período completo.

(f) Considere outras condições iniciais de sua escolha e desenhe gráficos semelhantes aos pedidos no item (e).

31. Considere o sistema com duas massas e três molas cujas equações de movimento vimos na aula. Suponha que $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

(a) Como no texto, transforme o sistema em quatro equações de primeira ordem da forma $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Determine a matriz de coeficientes **A**.

(b) Encontre os autovalores e autovetores de **A**.

(c) Escreva a solução geral do sistema.

(d) Descreva os modos fundamentais de vibração. Para cada modo fundamental, desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4.

(e) Considere as condições iniciais $\mathbf{y}(0) = (-1, 3, 0, 0)^T$. Calcule as constantes arbitrárias na solução geral do item (c). Desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Você acha que a solução é periódica? Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4.

(f) Considere outras condições iniciais de sua escolha e desenhe gráficos semelhantes aos pedidos no item (e).

RESPOSTAS

1. (a) $\mathbf{x} = c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$

2. (a) $\mathbf{x} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$

3. (a) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

4. (a) $\mathbf{x} = c_1 e^{t/2} \begin{pmatrix} 5\cos \frac{3}{2}t \\ 3(\cos \frac{3}{2}t + \operatorname{sen} \frac{3}{2}t) \end{pmatrix} + c_2 e^{t/2} \begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} \frac{3}{2}t \\ 3(-\cos \frac{3}{2}t + \operatorname{sen} \frac{3}{2}t) \end{pmatrix}$

5. (a) $\mathbf{x} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

6. (a) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} 3t \\ \operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\operatorname{sen} \sqrt{2}t \\ \cos \sqrt{2}t \\ -\cos \sqrt{2}t - \sqrt{2}\operatorname{sen} \sqrt{2}t \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos \sqrt{2}t \\ \operatorname{sen} \sqrt{2}t \\ \sqrt{2}\cos \sqrt{2}t - \operatorname{sen} \sqrt{2}t \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{x} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t - 3\operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t - 5\operatorname{sen} t \\ -2\cos t - 3\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

11. (a) $r = -\frac{1}{4} \pm i$

12. (a) $r = \frac{1}{5} \pm i$

13. (a) $r = \alpha \pm i$

(b) $\alpha = 0$

14. (a) $r = (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 20})/2$

(b) $\alpha = -\sqrt{20},\ 0,\ \sqrt{20}$

15. (a) $r = \pm\sqrt{4 - 5\alpha}$

(b) $\alpha = 4/5$

16. (a) $r = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3\alpha}$

(b) $\alpha = 0,\ 25/12$

17. (a) $r = -1 \pm \sqrt{-\alpha}$

(b) $\alpha = -1,\ 0$

18. (a) $r = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{49 - 24\alpha}$

(b) $\alpha = 2,\ 49/24$

19. (a) $r = \frac{1}{2}\alpha - 2 \pm \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha - 24}$

(b) $\alpha = -4 - 2\sqrt{10},\ -4 + 2\sqrt{10},\ 5/2$

20. (a) $r = -1 \pm \sqrt{25 + 8\alpha}$

(b) $\alpha = -25/8,\ -3$

21. $\mathbf{x} = c_1 t^{-1} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\ln t) \\ \sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln t) \end{pmatrix} + c_2 t^{-1} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln t) \\ -\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\ln t) \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos(\ln t) \\ 2\cos(\ln t) + \operatorname{sen}(\ln t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\operatorname{sen}(\ln t) \\ -\cos(\ln t) + 2\operatorname{sen}(\ln t) \end{pmatrix}$

23. (a) $r = -\frac{1}{4} \pm i,\ -\frac{1}{4}$

24. (a) $r = -\frac{1}{4} \pm i,\ \frac{1}{10}$

25.

(b) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ 4\,\text{sen}(t/2) \end{pmatrix} + c_2 e^{-t/2} \begin{pmatrix} \text{sen}(t/2) \\ -4\cos(t/2) \end{pmatrix}$

(c) Use $c_1 = 2, \quad c_2 = -\frac{3}{4}$ na resposta do item (b).

(d) $\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} V(t) = 0;$ não

26.

(b) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \text{sen}\, t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \text{sen}\, t \\ -\text{sen}\, t + \cos t \end{pmatrix}$

(c) Use $c_1 = 2$ e $c2 = 3$ na resposta do item (b).

(d) $\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} V(t) = 0;$ não

28. **(b)** $r = \pm\, i\sqrt{k/m}$

(d) $|r|$ é a frequência natural.

29.

(c) $r_1^2 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2^2 = -4, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

(d) $x_1 = 3c_1 \cos t + 3c_2\,\text{sen}\, t + 3c_3 \cos 2t + 3c_4\,\text{sen}\, 2t, \quad x_2 = 2c_1 \cos t + 2c_2\,\text{sen}\, t - 4c_3 \cos 2t - 4c_4\,\text{sen}\, 2t$

(e) $x'_1 = -3c_1\,\text{sen}\, t + 3c_2 \cos t - 6c_3\,\text{sen}\, 2t + 6c_4 \cos 2t, \quad x'_2 = -2c_1\,\text{sen}\, t + 2c_2 \cos t + 8c_3\,\text{sen}\, 2\,t - 8c_4 \cos 2t$

30.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 9/4 & -13/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b)

$r_1 = i, \ \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}; \quad r_2 = -i, \ \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}; \ r_3 = \frac{5}{2}i, \ \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 10i \\ -\frac{15}{2}i \end{pmatrix}; \quad r_4 = -\frac{5}{2}i, \ \xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -10i \\ \frac{15}{2}i \end{pmatrix}$

(c)

$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\text{sen}\, t \\ -\text{sen}\, t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \text{sen}\, t \\ \text{sen}\, t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 4\cos \frac{5}{2}t \\ -3\cos \frac{5}{2}t \\ -10\,\text{sen}\, \frac{5}{2}t \\ \frac{15}{2}\,\text{sen}\, \frac{5}{2}t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 4\,\text{sen}\, \frac{5}{2}t \\ -3\,\text{sen}\, \frac{5}{2}t \\ 10\cos \frac{5}{2}t \\ -\frac{15}{2}\cos \frac{5}{2}t \end{pmatrix}$

(e) $c_1 = \frac{10}{7}, \ c_2 = 0, \ c_3 = \frac{1}{7}, \ c_4 = 0.$ Período $= 4\pi$.

31.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b)

$r_1 = i, \ \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}; \quad r_2 = -i, \ \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}; \ r_3 = \sqrt{3}i, \ \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{3}i \\ -\sqrt{3}i \end{pmatrix}; \quad r_4 = -\sqrt{3}i, \ \xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{3}i \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix}$

(c)

$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\text{sen}\, t \\ -\text{sen}\, t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \text{sen}\, t \\ \text{sen}\, t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos \sqrt{3}t \\ -\cos \sqrt{3}t \\ -\sqrt{3}\,\text{sen}\, \sqrt{3}t \\ \sqrt{3}\,\text{sen}\, \sqrt{3}t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \text{sen}\, \sqrt{3}t \\ -\text{sen}\, \sqrt{3}t \\ \sqrt{3}\cos \sqrt{3}t \\ -\sqrt{3}\cos \sqrt{3}t \end{pmatrix}$

(e) $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -2, c_4 = 0.$