LISTA 05_7 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Equação de Bessel
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de **1** a **4**, mostre que a equação diferencial dada tem um ponto singular regular em x = 0, e determine duas soluções para x > 0.

1. $x^2y'' + 2xy' + xy = 0$
2. $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$
3. $x^2y'' + xy' + 2xy = 0$
4. $x^2y'' + 4xy' + (2 + x)y = 0$

5. Encontre duas soluções (que não sejam uma múltipla da outra) para a equação de Bessel de ordem 3/2

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{9}{4}\right) y = 0, \qquad x > 0$$

6. Mostre que a equação de Bessel de ordem meio

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right) y = 0, \qquad x > 0$$

pode ser reduzida à equação

$$v'' + v = 0$$

pela mudança da variável dependente $y = x^{-1/2}\boldsymbol{\nu}(x)$. Conclua disso que $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ e $y_2(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ são soluções da equação de Bessel de ordem meio.

7. Mostre diretamente que a série para $J_0(x)$, que é $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}$ converge absolutamente para todo x.

8. Mostre diretamente que a série para $J_1(x)$, $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m}(m+1)!m!}x^{2m}$, converge absolutamente para todo x e que $\frac{d}{dx}J_0(x) = -j_1(x)$

9. Considere a equação de Bessel de ordem $\boldsymbol{\nu}$, $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ em que $\boldsymbol{\nu}$ é real e positivo.

(a) Mostre que x = 0 é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são $\boldsymbol{\nu}$ e $-\boldsymbol{\nu}$.

$$y_1(x) = x^{\nu}\left[1 - \frac{1}{1!(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1+\nu)(2+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(1+\nu)\cdots(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

(b) Correspondendo à raiz maior $\boldsymbol{\nu}$, mostre que uma solução é

$$y_1(x) = x^{\nu}\left[1 - \frac{1}{1!(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1+\nu)(2+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(1+\nu)\cdots(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

(c) Se $2\boldsymbol{\nu}$ não for inteiro, mostre que a segunda solução será

$$y_2(x) = x^{-\nu}\left[1 - \frac{1}{1!(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1-\nu)(2-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(1-\nu)\cdots(m-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

Note que $y_1(x) \to 0$ quando $x \to 0$ e que $y_2(x)$ torna-se ilimitado quando $x \to 0$.

(d) Verifique, por métodos diretos, que as séries de potências nas expressões para $y_1(x)$ e $y_2(x)$ acima convergem absolutamente para todo x. Verifique, também, que y_2 é uma solução, bastando apenas que $\boldsymbol{\nu}$ não seja inteiro.

10. Mostramos, na aula, que uma solução da equação de Bessel de ordem zero $\boldsymbol{x^2y'' + xy' + x^2y = 0}$ é J_0, em que $J_0(x)$ é dada por $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}$ em que escolhemos $a_0 = 1$ (veja a aula). De acordo com o Teorema da aula 06_6, uma segunda solução tem a forma (x > 0)

(a) Mostre que

$$L[y_2](x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} + 2xJ_0'(x).$$

(b) Substituindo a representação em série de $J_0(x)$ na Eq. (i), mostre que

$$b_1x + 2^2b_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(n^2b_n + b_{n-2})x^n = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

(c) Note que na equação acima aparecem apenas potências pares de x na expressão à direita do sinal de igualdade. Mostre que $b_1 = b_3 = b_5 = \ldots = 0$, $b_2 = (1/4)\,(1!)^2$ e que

$$(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2} = -2(-1)^n(2n)/2^{2n}(n!)^2, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Deduza que

$$b_4 = -\frac{1}{2^2\,4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad b_6 = \frac{1}{2^2\,4^2\,6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

A solução geral da relação de recorrência é $b_{2n} = (-1)^{n+1}H_n/2^{2n}(n!)^2$. Substituindo b_n na expressão para $y_2(x)$, obtemos a solução dada na aula a seguir: $\boldsymbol{y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}}$

11. Encontre uma segunda solução da equação de Bessel de ordem 1 calculando os $c_n(r_2)$ e "a" da equação $\boldsymbol{y_2(x) = ay_1(x)\ln x + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}c_n(r_2)x^n\right]}$ da aula 05_6, de acordo com as fórmulas $\boldsymbol{c_n(r_2) = \frac{d}{dr}[(r - r_2)a_n(r)]_{r=r_2}}$ $\quad \boldsymbol{n = 1, 2, \ldots}$ e $\boldsymbol{a = \lim_{r\to r_2}[(r - r_2)a_N(r)]_{r=r_2}}$ daquela aula. Algumas diretrizes para esse cálculo são as seguintes: Primeiro, use a equação $\boldsymbol{(r^2 - 1)a_0x^r + [(r+1)^2 - 1]a_1x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\{[(r+n)^2 - 1]a_n + a_{n-2}\}\,x^{r+n} = 0}$ desta aula para mostrar que $a_1(-1)$ e $[a_1(-1)]'$ são iguais a 0.
Depois, mostre que $c_1(-1) = 0$ e, da relação de recorrência, que $c_n(-1) = 0$ para $n = 3, 5, \ldots$ Finalmente, use a equação $\boldsymbol{a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2 - 1}}$ $\quad \boldsymbol{n = 2, 3, \ldots}$desta aula para mostrar que

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+1)(r+3)}, \qquad a_4(r) = \frac{a_0}{(r+1)(r+3)(r+3)(r+5)}$$

e que

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+1)\cdots(r+2m-1)(r+3)\cdots(r+2m+1)}, \qquad m \geq 3.$$

Depois mostre que:

$$c_{2m}(-1) = (-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})/2^{2m}m!(m-1)!, \qquad m \geq 1$$

RESPOSTAS

1. $$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+1)!}, \quad y_2(x) = -y_1(x)\ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n + H_{n-1}}{n!(n-1)!}(-1)^n x^n\right]$$

2. $$y_1(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}, \quad y_2(x) = y_1(x)\ln x - \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2} x^n$$

3. $$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n!)^2} x^n, \quad y_2(x) = y_1(x)\ln x - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n H_n}{(n!)^2} x^n$$

4. $$y_1(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} x^n, \quad y_2(x) = -y_1(x)\ln x + \frac{1}{x^2}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n + H_{n-1}}{n!(n-1)!}(-1)^n x^n\right]$$

5. $$y_1(x) = x^{3/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+\frac{3}{2})(2+\frac{3}{2})\cdots(m+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]$$

$$y_2(x) = x^{-3/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1-\frac{3}{2})(2-\frac{3}{2})\cdots(m-\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]$$

Sugestão: Faça $n = 2m$ na relação de recorrência, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Para $r = -3/2$, $a_1 = 0$ e a_3 é arbitrário.