

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 05_6

Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular. Parte II

INTRODUÇÃO

Retomando, temos o ponto $x = x_0$ que é um ponto singular regular da equação:

$$x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0$$

em que:

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{e} \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad \text{convergem em } |x| < \rho$$

e a equação correspondente de Euler é: $x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0$

e assumimos que as soluções têm a forma:

$$y(x) = \phi(r, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad \text{para } a_0 \neq 0 \quad x > 0$$

INTRODUÇÃO

Logo calculamos as derivadas

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}$$

E substituimos elas na equação diferencial, obtendo a equação a seguir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^r \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n} \right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^r \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \right] = 0$$

INTRODUÇÃO

Os produtos de séries dessa equação podem ser desenvolvidos assim:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n} \right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \right] \\ &= [p_0 + p_1 x + \dots + p_n x^n + \dots] [a_0 r x^r + a_1 (r+1) x^{r+1} + \dots + a_n (r+n) x^{r+n} + \dots] + \\ & \quad [q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n + \dots] [a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + \dots + a_n x^{r+n} + \dots] \\ &= [p_0 r + q_0 a_0] x^r + [p_0 a_1 (r+1) + p_1 a_0 r + q_0 a_1 + q_1 a_0] x^{r+1} + \dots + \\ & \quad [p_0 a_n (r+n) + p_1 a_{n-1} (r+n-1) + \dots + p_n a_0 r + q_0 a_n + q_1 a_{n-1} + \dots + q_n a_0] x^{r+n} + \dots \\ &= [a_0 (p_0 r + q_0)] x^r + [a_0 (p_1 r + q_1) + a_1 (p_0 (r+1) + q_0)] x^{r+1} + \dots + \\ & \quad [a_0 (p_n r + q_n) + \dots + a_{n-1} (p_1 (r+n-1) + q_1) + a_n (p_0 (r+n) + q_0)] x^{r+n} + \dots \end{aligned}$$

De forma que equação diferencial com estes produtos desenvolvidos fica:

INTRODUÇÃO

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n} \right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \right] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + [a_0(p_0r + q_0)]x^r + [a_0(p_1r + q_1) + a_1(p_0(r+1) + q_0)]x^{r+1} + \dots$$
$$+ [a_0(p_nr + q_n) + \dots + a_{n-1}(p_1(r+n-1) + q_1) + a_n(p_0(r+n) + q_0)]x^{r+n} + \dots = 0$$

$$+ [a_0(p_nr + q_n) + \dots + a_n((r+n)(r+n-1) + p_0(r+n) + q_0)]x^{r+n} + \dots = 0$$

Se definimos a função $F(r) \equiv (r(r-1) + p_0r + q_0)$ podemos escrever esta equação de forma mais compacta...

EQUAÇÃO INDICIAL

$$[a_0(r(r-1) + p_0r + q_0)]x^r + [a_0(p_1r + q_1) + a_1(r(r+1) + p_0(r+1) + q_0)]x^{r+1} + \dots \\ + [a_0(p_nr + q_n) + \dots + a_n((r+n)(r+n-1) + p_0(r+n) + q_0)]x^{r+n} + \dots = 0$$

$$F(r) \equiv (r(r-1) + p_0r + q_0)$$

Assim:

$$a_0F(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_nF(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_k] \right\} x^{r+n} = 0$$

Como na aula passada, para que esta equação seja satisfeita para todo $x > 0$, o coeficiente de cada potência de x tem que ser igual a zero

Como $a_0 \neq 0$ (por definição, veja a aula passada) o termo envolvendo x^r leva à equação $F(r) = 0$. Essa equação é nossa chamada equação indicial; note que é exatamente a equação que obteríamos procurando por soluções da forma $y = x^r$ da equação de Euler.

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$$

RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA

Vamos chamar as raízes da equação indicial de r_1 e r_2 , com $r_1 \geq r_2$ se as raízes forem reais.

Lembrando que as raízes r_1 e r_2 são chamadas de **expoentes na singularidade**; elas determinam a natureza qualitativa das duas soluções em uma vizinhança do ponto singular.

Vamos agora generalizar o método estudado na aula passada para poder incluir todas as possíveis raízes da equação indicial.

Mas antes, ainda temos a relação de recorrência, que se obtém, igualando a zero os coeficientes de x^{r+n} da equação anterior, ou seja:

$$a_n F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_k] = 0 \quad n \geq 1$$

RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA E A PRIMEIRA SOLUÇÃO

$$a_n F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_k] = 0 \quad n \geq 1$$

A relação de recorrência mostra que, em geral, a_n depende do valor de r e de todos os coeficientes anteriores a_0, a_1, \dots, a_{n-1} .

Ela mostra, também, que podemos calcular sucessivamente os valores de $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ em função de a_0 e dos coeficientes (p_n e q_n) das séries para $xp(x)$ e para $x^2q(x)$, desde que $F(r+1), F(r+2), \dots, F(r+n), \dots$ não sejam nulos (veja acima).

Os únicos valores r para os quais $F(r) = 0$ são as raízes $r = r_1$ e $r = r_2$; como $r_1 \geq r_2$, segue que $r_1 + n$ não é igual a r_1 nem a r_2 se $n \geq 1$ e portanto sabemos que é $\neq 0$.

Portanto, $F(r_1 + n) \neq 0$ para $n \geq 1$ e teremos como encontrar os coeficientes a_n .

Logo, sempre poderemos determinar uma solução da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$, a saber,

$$y_1(x) = x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] \quad a_0 = 1 \quad x > 0$$

RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA E A SEGUNDA SOLUÇÃO

Nesta expressão
$$y_1(x) = x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n \right] \quad a_0 = 1 \quad x > 0$$

introduzimos a notação $a_n(r_1)$, para indicar que a_n foi determinado utilizando $r = r_1$ na relação de recorrência.

Para especificar a constante arbitrária na solução, foi feita a escolha de a_0 como 1 (que é irrelevante, pois procuramos todas as combinações lineares).

Vamos agora analisar **a segunda solução** tentando utilizar r_2 .

Se r_2 não for igual a r_1 e se $r_1 - r_2$ não for um inteiro positivo (n), então $r_2 + n$ será diferente de r_1 para todo valor de $n \geq 1$ (lembrando que definimos $r_1 > r_2$)..pense!

Ou seja, se $r_2 \neq r_1$, e $r_2 - r_1 \neq n$ para $n \geq 1$, então $r_2 + n \neq r_1$ para todo $n \geq 1$

Portanto, $F(r_2 + n) \neq 0$ (ou seja, não se anula) e sempre poderemos encontrar os coeficientes da série e obter uma segunda solução como no caso da primeira....

CONVERGÊNCIA DAS SOLUÇÕES

$$y_2(x) = x^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n \right], a_0 = 1, x > 0$$

Nesta expressão introduzimos a notação $a_n(r_2)$, para indicar que a_n foi determinado utilizando $r = r_2$ na relação de recorrência.

Da mesma forma que para as soluções em série em torno de um ponto ordinário, discutidas na aula 5.3, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ convergem, pelo menos no intervalo $|x| < \rho$ em que ambas as séries para $xp(x)$ e $x^2q(x)$ também convergem.

Dentro de seus raios de convergência, as séries de potências $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n$ e $g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ definem funções analíticas em $x = 0$. Isso significa que, o comportamento singular das funções y_1 e y_2 , se existirem, será devido aos fatores x^{r_1} e x^{r_2} que multiplicam essas duas funções analíticas.

CONVERGÊNCIA DAS SOLUÇÕES

A seguir, para obter soluções reais **para $x < 0$** , podemos fazer a substituição $x = -\xi$ com $\xi > 0$. Lembrando nossa discussão sobre a equação de Euler, basta substituir x^{r_1} e x^{r_2} por $|x^{r_1}|e^{|x^{r_2}|}$, respectivamente.

Finalmente, note que, se r_1 e r_2 forem números complexos, então serão, necessariamente, complexos conjugados e $r_2 \neq r_1 + n$ para qualquer inteiro positivo n .

Assim, nesse caso sempre podemos encontrar duas soluções em série da forma dos slides anteriores, no entanto, elas são funções complexas de x .

Soluções reais podem ser obtidas tomando-se as partes real e imaginária das soluções complexas (como já explicado).

Antes de vermos um exemplo, alguns comentários:

COMENTÁRIOS

É importante lembrar que r_1 e r_2 , os expoentes no ponto singular, são fáceis de encontrar e que eles determinam o comportamento qualitativo das soluções. Para calcular r_1 e r_2 , **basta resolver a equação indicial de segundo grau...**

$$F(r) = r(r - 1) + p_0 r + q_0 = 0$$

cujos coeficientes são dados por $p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x p(x)$ e $q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x)$

Note que esses são exatamente os limites que precisam ser calculados para classificar o ponto singular como ponto singular regular; assim, **em geral, eles já foram determinados** em um estágio anterior do exercício.

COMENTÁRIOS

Além disso, se $x = 0$ é um ponto singular regular da equação

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

em que as funções P , Q e R são polinômios, então $xp(x) = xQ(x)/P(x)$ e $x^2q(x) = x^2R(x)/P(x)$. Logo,

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{Q(x)}{P(x)} \quad e \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)}$$

Finalmente, há que lembrar que os raios de convergência das séries que representam as soluções (y_1 e y_2), são pelo menos, iguais à distância da origem ao zero mais próximo do polinômio $P(x)$ (diferente do próprio $x = 0$).

Vamos resolver um exercício como exemplo.

EXEMPLO 1

Vamos estudar as soluções da equação a seguir perto dos pontos singulares

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

Esta equação é do tipo $P(x) \frac{d^2y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$

Comparando vemos que $P(x) = 2x(1+x)$, $Q(x) = 3+x$ e $R(x) = -x$.

Para identificar os pontos singulares claramente, reescrevemos a equação assim:

$$y'' + \frac{3+x}{2x(1+x)}y' - \frac{x}{2x(1+x)}y = 0$$

Evidentemente, os pontos $x = 0$ e $x = -1$ são os únicos pontos singulares.

EXEMPLO 1

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

Vamos começar com o primeiro ponto singular $x=0$.

Para saber que tipo de ponto singular é aplicamos o critério dos limites...

Para o ponto $x=0$ temos:

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{3+x}{2x(1+x)} = \frac{3}{2} < \infty \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{-x}{2x(1+x)} = 0 < \infty$$

Logo, como o limite é finito ele **é regular**

Agora vamos à equação indicial...ela é:

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$$

Que no nosso caso fica:

$$r(r-1) + \frac{3}{2}r = 0$$

Os expoentes no ponto singular são as raízes desta equação que são 0 e $-1/2$ pois:

$$2r(r-1) + 3r = 0$$

$$2r^2 + r = 0$$

$$r(2r+1) = 0$$

EXEMPLO 1

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

Como as raízes (0 e $-1/2$) **não são iguais nem diferem por um inteiro**, existem duas soluções da forma $y_{1,2}(x) = x^{r_{1,2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_{1,2})x^n \right]$ que já vimos, ou seja:

$$y_1(x) = 1 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n \right] \qquad y_2(x) = x^{-1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(-\frac{1}{2}\right)x^n \right]$$

em que os coeficientes a_n são obtidos a partir da relação de recorrência

Sobre a convergência:

Uma cota inferior para o raio de convergência de cada série é 1, que é a distância da origem $x = 0$ até $x = -1$, **que é o único zero de $P(x)$ que conta**, (lembrando que se excluem desta conta as raízes de $P(x)$ que forem iguais a zero).

Note que a solução $y_1(x)$ permanece limitada quando $x \rightarrow 0$ (veja a série) e é, de fato, analítica aí; a segunda solução y_2 torna-se ilimitada quando $x \rightarrow 0$ (os colchetes são sempre analíticos, como já vimos).

EXEMPLO 1

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

No caso do ponto $x = -1$ ele também é um ponto singular regular, pois lembrando os comentários no slide 21 da aula 5.5 sobre **expressões do tipo $(x-x_0)$** ...temos:

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \frac{3+x}{2x(1+x)} = -1 < \infty \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 \frac{-x}{2x(1+x)} = 0 < \infty$$

Neste caso a equação indicial é: $F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$

$$r(r-1) - r = 0 \quad r^2 - 2r = 0 \Leftrightarrow r(r-2) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 2 \quad r_2 = 0$$

As raízes da equação indicial são $r_1 = 2$ e $r_2 = 0$.

Estas raízes diferem por um inteiro positivo (o número 2).

Assim, no ponto singular $x=-1$, no caso da maior raiz ($r_1=2$) sabemos que existe uma solução da forma $y_1(x) = x^{r_1} [1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n]$, vamos escrever ela...

EXEMPLO 1

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

$$y_1(x) = (x+1)^2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n \right]$$

Esta série converge.

Podemos verificar isso pelo método da razão ou notar que o zero de $1+x$ é $x = -1$. Como a distância de 0 a -1 , é 1 , o raio de convergência da série de potências em torno de $x = -1$ é pelo menos 1 . Assim a série converge pelo menos para $|x+1| < 1$, e y_1 é uma função analítica aí (mais detalhes veja a aula 5.1 sobre critérios de convergência novamente).

A questão vem a seguir, no caso da segunda raiz ($x=0$). **Como as duas raízes diferem por um inteiro positivo, pode existir ou não uma segunda solução da forma:**

$$y_2(x) = 1 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)(x+1)^n \right]$$

RAÍZES IGUAIS

Vamos considerar, agora, os casos em que a equação indicial tem **raízes iguais ou que diferem por um inteiro positivo**, $r_1 - r_2 = N$.

Como mostramos anteriormente, sempre existe uma solução da forma $y_1(x) = x^{r_1} [1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n]$ correspondente à maior raiz r_1 da equação indicial.

Por analogia com a equação de Euler, poderíamos esperar que, se $r_1 = r_2$, então a segunda solução conteria um **termo logarítmico**. Isso também poderá ser verdade se as raízes diferirem por um inteiro.

Vamos começar pelo caso das **raízes iguais**.

O método para encontrar a segunda solução é o mesmo que usamos para encontrar **a segunda solução da equação de Euler** (veja a aula 5.4) quando as raízes da equação indicial eram iguais.

Vamos considerar r como uma variável contínua e determinar a_n em função de r resolvendo a relação de recorrência, vejamos como :

RAÍZES IGUAIS

Retomando a equação do slide 6 (onde desenvolvemos a equação geral abaixo, a partir da qual obtivemos a relação indicial e a de recorrência),

$$a_0 F(r) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_k] \right\} x^{r+n} = 0$$

Nesta equação todos os termos $a_n(r)$ para $n \geq 1$, envolvendo x^{r+1} , x^{r+2} , x^{r+3} , ... têm coeficientes nulos e como a_0 é diferente de zero (pela definição de quem é a_0) obteremos que:

$$a_0 F(r) x^r = 0$$

em que $F(r)$ tem que ser zero. Lembrando que a função $F(r)$ foi definida como $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$ portanto:

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

RAÍZES IGUAIS

$$F(r) = r(r - 1) + p_0r + q_0$$

A expressão de $F(r)$ se reduz (no caso de raízes iguais) a

$$F(r) = (r - r_1)^2$$

de forma que podemos escrever (lembrando a definição do operador diferencial $L[\phi] \equiv \phi'' + p\phi' + q$)

$$L[\phi](r, x) = a_0 F(r) x^r = a_0 (r - r_1)^2 x^r$$

Como já sabemos, **neste caso existe para $r = r_1$ uma solução $y_1(x)$ na forma $x^{r_1} [1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n]$** . Porém, mais importante, é que segue também, desta última igualdade (da mesma forma que para a equação de Euler) ($x^r = e^{r \ln x}$), que

$$L \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \phi \right] (r_1, x) = a_0 \frac{\partial}{\partial r} (r - r_1)^2 x^r \Big|_{r=r_1} = a_0 [(r - r_1)^2 x^r \ln x + 2(r - r_1) x^r] \Big|_{r=r_1}$$

RAÍZES IGUAIS

Portanto, graças ao fato de termos o parêntesis em $L[\phi](r, x) = a_0 (r - r_1)^2 x^r$ ao quadrado, segue uma segunda solução:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \left. \frac{\partial \phi(r, x)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \left. \frac{\partial}{\partial r} \left\{ x^r \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) x^n \right] \right\} \right|_{r=r_1} \\ &= (x^{r_1} \ln x) \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n \\ &= y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n, \quad x > 0, \end{aligned}$$

$$\text{em que } a'_n(r_1) = \left. \frac{\partial a_n}{\partial r} \right|_{r=r_1}$$

Embora esta expressão seja explícita para a segunda solução $y_2(x)$, pode ser difícil determinar $a_n(r)$ como função de r a partir da relação de recorrência e depois diferenciar a expressão resultante em relação a r , por isso veremos outra forma de obter esta solução...

RAÍZES IGUAIS

Obtivemos:
$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n$$
 em que $a'_n(r_1) = \left. \frac{\partial a_n}{\partial r} \right|_{r=r_1}$

Outra maneira de obter y_2 é, simplesmente, **supor que y tem a forma da equação acima**, onde desconhecemos os coeficientes b_n ou seja, suponha que, após encontrar $y_1(x)$:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^n$$

E agora os coeficientes b_n são calculados (como já fizemos) substituindo a solução proposta na equação diferencial, juntando os termos correspondentes e igualando os coeficientes de cada potência de x a zero.

Por último, uma terceira possibilidade é usar o método de redução de ordem (que já estudamos) para encontrar $y_2(x)$, uma vez conhecida $y_1(x)$.

RAÍZES IGUAIS

Resumindo obtivemos que as soluções para o caso de raízes iguais são:

$$y_1(x) = x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n \right] \quad y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n \right]$$

Agora nos falta ver o caso de raízes que diferem por um inteiro...

RAÍZES DIFERINDO POR UM INTEIRO N

Neste caso, a dedução da segunda solução é bem mais complicada e não será deduzida aqui. As soluções neste caso são:

$$y_1(x) = x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n \right] \quad y_2(x) = ay_1(x) \ln x + x^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n \right]$$

em que:
$$c_n(r_2) = \frac{d}{dr} [(r - r_2)a_n(r)]_{r=r_2} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a = \lim_{r \rightarrow r_2} [(r - r_2)a_N(r)]_{r=r_2} \quad \text{em que } r_1 - r_2 = N$$

Vamos resumir tudo num teorema:

TEOREMA (RESUMO)

Considere a equação diferencial $x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0$

em que $x = 0$ é um ponto singular regular.

Então, $xp(x)$ e $x^2 q(x)$ são analíticas em $x = 0$ com expansão em séries de potências convergentes

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

para $|x| < \rho$, em que $\rho > 0$ é o mínimo entre os raios de convergência das séries de potências para $xp(x)$ e $x^2 q(x)$.

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação indicial $F(r) = r(r - 1) + p_0 r + q_0 = 0$

Se $r_1 \geq r_2$, e ambas são reais, então, em um dos intervalos $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$, existe **uma solução da forma**

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] \qquad a_0 = 1 \qquad x > 0$$

em que os $a_n(r_1)$ são dados pela relação de recorrência com $a_0 = 1$ e $r = r_1$

TEOREMA (RESUMO)

Se $r_1 - r_2$ não é zero nem um inteiro positivo, então, em um dos intervalos $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$, existe uma **segunda solução** da forma

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n \right] \quad a_0 = 1 \quad x > 0$$

em que os $a_n(r_2)$ também são dados pela relação de recorrência com $a_0 = 1$ e $r = r_2$

Se $r_1 = r_2$, então a **segunda solução** é:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n \right]$$

Se $r_1 - r_2 = N$ então a **segunda solução** é:

$$y_2(x) = ay_1(x) \ln x + x^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n \right]$$

Os coeficientes $a_n(r_1)$, $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ e a constante “a” podem ser determinados substituindo-se a forma da solução em séries para y na equação diferencial. A constante “a” pode ser nula, caso no qual não há termo logarítmico na última solução. Cada uma das séries converge pelo menos para $|x| < \rho$ e define uma função analítica em alguma vizinhança de $x = 0$.

Em todos os três casos, as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial dada.

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR



Lista de exercícios disponível em:

<http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial>

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço