

LISTA 05_1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Séries de potências

Respostas no final

Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 8, determine o raio de convergência da série de potências dada

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$$

2.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$$

3.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

4.
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2}$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n}$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 (x+2)^n}{3^n}$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$$

Em cada um dos problemas de 9 a 16, determine a série de Taylor da função dada em torno do ponto x_0 . Determine, também, o raio de convergência da série.

9. $\sin x, \quad x_0 = 0.$

10. $e^x, \quad x_0 = 0.$

11. $x, \quad x_0 = 1$

12. $x^2, \quad x_0 = -1$

13. $\ln x, \quad x_0 = 1$

14. $\frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0$

15. $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$

16. $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2$

17. Dado que $y = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$, calcule y' e y'' e escreva os quatro primeiros termos de cada uma das séries, assim como o coeficiente de x^n no termo geral.

18. Dado que $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calcule y' e y'' e escreva os quatro primeiros termos de cada uma das séries, assim como o coeficiente de x^n no termo geral. Mostre que, se $y'' = y$, então os coeficientes a_0 e a_1 são arbitrários; determine a_2 e a_3 em função de a_0 e a_1 . Mostre que $a_{n+2} = a_n / [(n+2)(n+1)]$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Em cada um dos Problemas 19 e 20, verifique a equação dada.

19.
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n$$

20.
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} + a_{k-1}) x^k$$

Em cada um dos problemas de 21 a 27, escreva a expressão dada como uma série cujo termo geral envolve x^n .

$$21. \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$22. \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

$$23. x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$24. (1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$25. \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$27. x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

RESPOSTAS

1. $\rho = 1$

2. $\rho = 2$

3. $\rho = \infty$

4. $\rho = \frac{1}{2}$

5. $\rho = \frac{1}{2}$

6. $\rho = 1$

7. $\rho = 3$

8. $\rho = e$

9.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \rho = \infty$$

10.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \rho = \infty$$

11. $1 + (x-1), \quad \rho = \infty$

12. $1 - 2(x+1) + (x+1)^2, \quad \rho = \infty$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad \rho = 1$$

14.
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \rho = 1$$

15.
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \rho = 1$$

16.
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-2)^n, \quad \rho = 1$$

17. $y' = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \dots + (n+1)^2x^n + \dots$

$$y'' = 2^2 + 3^2 \cdot 2x + 4^2 \cdot 3x^2 + 5^2 \cdot 4x^3 + \dots + (n+2)^2(n+1)x^n + \dots$$

18. $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$21. \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$22. \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

$$23. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^n$$

$$24. \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n]x^n$$

$$25. \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n]x^n$$

$$26. a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}]x^n$$

$$27. \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)na_{n+1} + a_n]x^n$$