LISTA 04_1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Teoria geral das equações de ordem superior
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 6, determine os intervalos nos quais existem, com certeza, soluções.

1. $y^{(4)} + 4y''' + 3y = t$
2. $ty''' + (\text{sen } t)y'' + 3y = \cos t$
3. $t(t-1)y^{(4)} + e^t y'' + 4t^2 y = 0$
4. $y''' + ty'' + t^2 y' + t^3 y = \ln t$
5. $(x-1)y^{(4)} + (x+1)y'' + (\tan x)y = 0$
6. $(x^2-4)y^{(6)} + x^2 y''' + 9y = 0$

Em cada um dos problemas de 7 a 10, determine se as funções dadas são linearmente dependentes ou linearmente independentes. Se forem linearmente dependentes, encontre uma relação linear entre elas.

7. $f_1(t) = 2t - 3, f_2(t) = t^2 + 1, f_3(t) = 2t^2 - t$
8. $f_1(t) = 2t - 3, f_2(t) = 2t^2 + 1, f_3(t) = 3t^2 + t$
9. $f_1(t) = 2t - 3, f_2(t) = t^2 + 1, f_3(t) = 2t^2 - t, f_4(t) = t^2 + t + 1$
10. $f_1(t) = 2t - 3, f_2(t) = t^3 + 1, f_3(t) = 2t^2 - t, f_4(t) = t^2 + t + 1$

Em cada um dos problemas de 11 a 16, verifique se as funções dadas são soluções da equação diferencial, e determine seu wronskiano.

11. $y''' + y' = 0; \quad 1, \quad \cos t, \quad \operatorname{sen} t$

12. $y^{(4)} + y = 0; \quad 1, \quad t, \quad \cos t, \quad \operatorname{sen} t$

13. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0; \quad e^t, \quad e^{-t}, \quad e^{-2t}$

14. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0; \quad 1, \quad t, \quad e^{-t}, \quad te^{-t}$

15. $xy''' - y'' = 0; \quad 1, \quad x, \quad x^3$

16. $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad x, \quad x^2, \quad 1/x$

---

17. Mostre que $W(5, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t) = 0$ para todo t. Você pode obter esse resultado sem calcular diretamente o wronskiano?

18. Verifique que o operador diferencial definido por

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdot \cdot \cdot + P_n(t)y$$

é um operador diferencial linear. Ou seja, mostre que

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2],$$

em que y_1 e y_2 são funções n vezes diferenciáveis e c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Portanto, mostre que, se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ forem soluções de $L[y] = 0$, então a combinação linear $c_1y_1 + \cdot \cdot \cdot + c_ny_n$ também será solução de $L[y] = 0$.

19. Seja L o operador diferencial linear definido por

$$L[y] = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdot \cdot \cdot + a_ny,$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes reais.

(a) Encontre $L[t^n]$.

(b) Encontre $L[e^{rt}]$.

(c) Determine quatro soluções da equação $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$. Você acha que essas quatro soluções formam um conjunto fundamental de soluções? Por quê?

20. Nesse problema, mostramos como generalizar o Teorema 3.2.7 (teorema de Abel) para equações de ordem maior. Vamos primeiro esboçar o procedimento para a equação de terceira ordem

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0.$$

Sejam y_1, y_2 e y_3 soluções dessa equação em um intervalo I.

(a) Se $W = W(y_1, y_2, y_3)$, mostre que

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}.$$

Sugestão: A derivada de um determinante 3 × 3 é a soma de três determinantes 3 × 3 obtidos derivando-se a primeira, a segunda e a terceira linhas, respectivamente.

(b) Substitua y_1''', y_2''' e y_3''' a partir da equação diferencial; multiplique a primeira linha por p_3, a segunda por p_2 e some-as à última linha para obter

$$W' = -p_1(t)W.$$

(c) Mostre que

$$W(y_1, y_2, y_3)(t) = c\exp\left[-\int p_1(t)\,dt\right].$$

Logo, W ou é sempre igual a zero ou nunca é nulo em I.

(d) Generalize esse argumento para a equação de ordem n

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)y = 0$$

com soluções $y_1, \ldots, y_n$. Ou seja, estabeleça a fórmula de Abel

$$W(y_1, \ldots, y_n)(t) = c\exp\left[-\int p_1(t)\,dt\right]$$

para esse caso.

Para cada um dos problemas de 21 a 24, use a fórmula de Abel (Problema 20) para encontrar o wronskiano de um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial dada.

21. $y''' + 2y'' - 3y' = 0$
22. $y^{(4)} + y = 0$
23. $ty''' + 2y'' - y' + ty = 0$
24. $t^2y^{(4)} + ty''' + y'' - 4y = 0$
25. (a) Mostre que as funções $f(t) = t^2|t|$ e $g(t) = t^3$ são linearmente dependentes em $0 < t < 1$ e em $-1 < t < 0$.

    (b) Mostre que $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente independentes em $-1 < t < 1$.

    (c) Mostre que $W(f, g)(t)$ é zero para todo t em $-1 < t < 1$.

26. Mostre que, se y_1 é uma solução de

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0,$$

então a substituição $y = y_1(t)v(t)$ nos leva à seguinte equação de segunda ordem para v':

$$y_1 v''' + (3y_1' + p_1 y_1)v'' + (3y_1'' + 2p_1 y_1' + p_2 y_1)v' = 0.$$

Em cada um dos Problemas 27 e 28, use o método de redução de ordem (Problema 26) para resolver a equação diferencial dada.

27. $(2 - t)y''' + (2t - 3)y'' - ty' + y = 0, \quad t < 2; \qquad y_1(t) = e^t$

28. $t^2(t + 3)y''' - 3t(t + 2)y'' + 6(1 + t)y' - 6y = 0, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = t^2, \qquad y_2(t) = t^3$

RESPOSTAS

1. $-\infty < t < \infty$

2. $t > 0$ ou $t < 0$

3. $t > 1$, ou $0 < t < 1$, ou $t < 0$

4. $t > 0$

5. $\ldots, -3\pi/2 < x < -\pi/2, \quad -\pi/2 < x < 1, \quad 1 < x < \pi/2, \quad \pi/2 < x < 3\pi/2, \ldots$

6. $-\infty < x < -2, \quad -2 < x < 2, \quad 2 < x < \infty$

7. Linearmente independente.

8. Linearmente dependente; $f_1(t) + 3f_2(t) - 2f_3(t) = 0$.

9. Linearmente dependente; $2f_1(t) + 13f_2(t) - 3f_3(t) - 7f_4(t) = 0$.

10. Linearmente independente.

11. 1

12. 1

13. $-6e^{-2t}$

14. e^{-2t}

15. $6x$

16. $6/x$

17. $\text{sen}^2\, t = \frac{1}{10}(5) - \frac{1}{2}\cos 2t$

19. **(a)** $a_0[n(n-1)(n-2)\cdots 1] + a_1[n(n-1)\cdots 2]t + \cdots + a_nt^n$

(b) $(a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n)e^{rt}$

(c) $e^t, e^{-t}, e^{2t}, e^{-2t}$; sim, $W(e^t, e^{-t}, e^{2t}, e^{-2t}) \neq 0, -\infty < t < \infty$

21. $W(t) = ce^{-2t}$

22. $W(t) = c$

23. $W(t) = c/t^2$

24. $W(t) = c/t$

27. $y = c_1e^t + c_2t + c_3te^t$

28. $y = c_1t^2 + c_2t^3 + c_3(t+1)$