

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 01_2 INTRODUÇÃO

Soluções de Algumas Equações Diferenciais



No caso dos exemplos da aula passada obtivemos

Queda livre:
$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - 0,28 v$$

Corujas e ratos:
$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450$$

Essas equações têm a **forma geral $y' = ay - b$**

Podemos usar métodos de cálculo para resolver equações diferenciais deste tipo.....vejamos como...

Soluções de Algumas Equações Diferenciais



Exemplo das corujas e os ratos

Para resolver a equação diferencial $\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450$

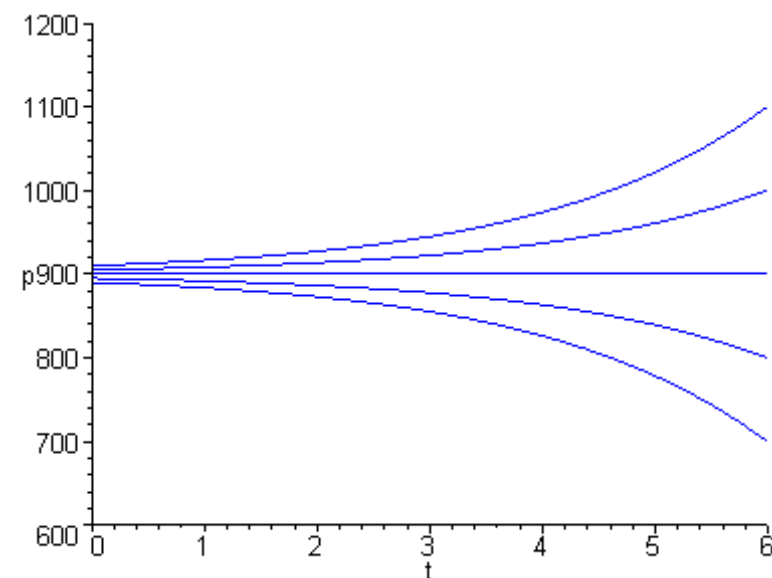
usamos métodos de cálculo, da seguinte forma:

$$\frac{dp}{dt} = 0.5(p - 900) \Rightarrow \frac{dp/dt}{p - 900} = 0.5 \Rightarrow \int \frac{dp}{p - 900} = \int 0.5 dt$$

$$\Rightarrow \ln|p - 900| = 0.5t + C \Rightarrow |p - 900| = e^{0.5t + C}$$

$$\Rightarrow p - 900 = \pm e^{0.5t} e^C \Rightarrow p = 900 + k e^{0.5t}, \quad k = \pm e^C$$

Desta forma a solução é $p = 900 + k e^{0,5 t}$



Soluções de Algumas Equações Diferenciais

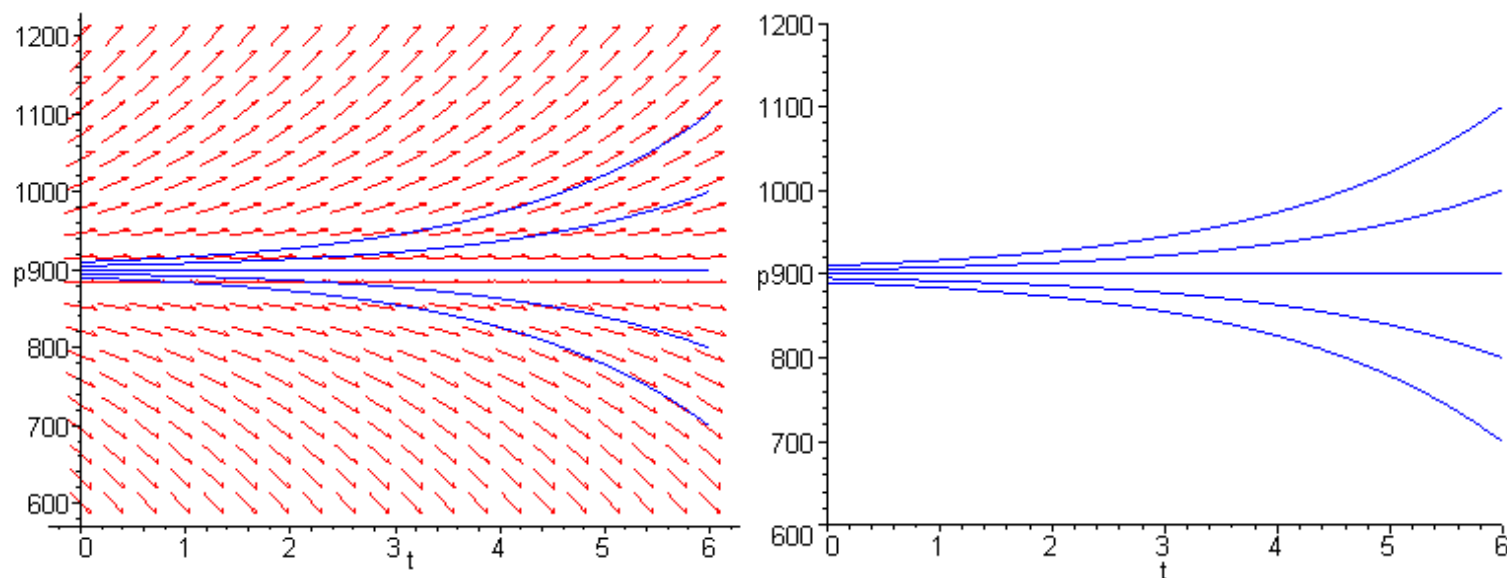
Exemplo das corujas e os ratos

Obtivemos **infinitas soluções** para nossa equação (pois k é uma constante qualquer)!

$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450 \quad \Rightarrow \quad p = 900 + k e^{0,5 t}$$

As soluções (**curvas integrais**) para vários valores de k e direções do campo são apresentadas na figura

Se escolhemos $k=0$ obtemos a **solução de equilíbrio** (estacionária)
Se escolhemos $k \neq 0$ as soluções divergem com o passar do tempo t



Soluções de Algumas Equações Diferenciais



Exemplo das corujas e os ratos

As equações diferenciais sempre apresentam **infinitas soluções** (pois temos integrações que fazem aparecer as constantes aleatórias)

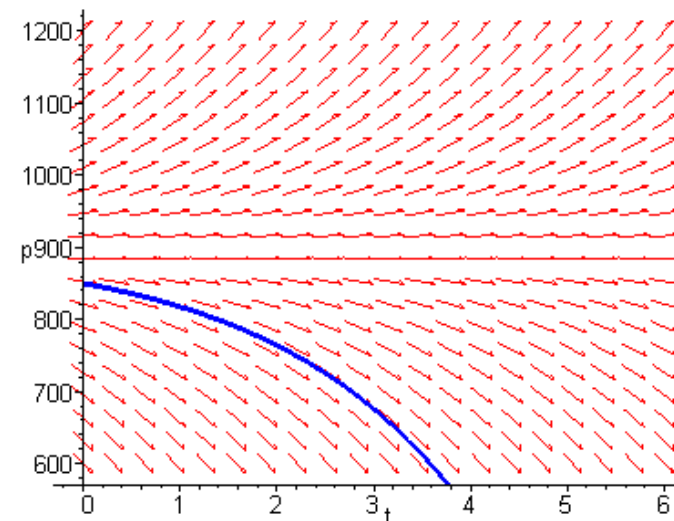
Se conhecemos algum ponto da solução (por exemplo uma condição inicial), podemos identificar a solução única para essa condição

No nosso exemplo vamos supor que a população inicial de ratos é 850 (**$p(0) = 850$**)

$$p = 900 + k e^{0,5 t} \quad \Rightarrow \quad p(0) = 850 = 900 + k e^0 \quad \Rightarrow \quad k = -50$$

A solução específica para essa condição inicial é:

$$p = 900 - 50 e^{0,5 t}$$



Soluções de Algumas Equações Diferenciais



Solução geral

Para resolver as equações do tipo geral: $y' = ay - b$

utilizamos o seguinte procedimento de cálculo:

$$\frac{dy}{dt} = a \left(y - \frac{b}{a} \right) \Rightarrow \frac{\frac{dy}{dt}}{y - \frac{b}{a}} = a \Rightarrow \int \frac{dy}{y - \frac{b}{a}} = \int a dt$$

$$\Rightarrow \ln \left| y - \frac{b}{a} \right| = at + C \Rightarrow \left| y - \frac{b}{a} \right| = e^{at+C} \Rightarrow y - \frac{b}{a} = \pm e^{at} e^C$$

$$\Rightarrow y = \frac{b}{a} + ke^{at} \quad k = \pm e^C$$

Portanto a solução geral é: $y(t) = \frac{b}{a} + ke^{at}$

Onde k é uma constante que só pode ser definida a partir de alguma informação do problema específico

Soluções de Algumas Equações Diferenciais



O problema do valor inicial

Como proceder quando temos uma condição inicial?

$$y' = ay - b$$

$$y(0) = y_0$$

Como sabemos a solução dessa equação é $y(t) = \frac{b}{a} + ke^{at}$

Utilizamos essa condição para determinar k $y(0) \equiv y_0 = \frac{b}{a} + ke^0 \Rightarrow k = y_0 - \frac{b}{a}$

Desta forma a solução particular para nosso problema com essa condição inicial é:

$$y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a} \right] e^{at}$$

Soluções de Algumas Equações Diferenciais



A solução de equilíbrio

Retornemos à questão da solução estacionária

Para encontrar esta solução consideramos $y'=0$ e obtemos y para essa condição

$$y' = ay - b = 0$$

$$y(t) = \frac{b}{a}$$

Vamos analisar a solução geral que obtivemos anteriormente

$$y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a} \right] e^{at}$$

- Se $y_0 = b/a$ y é constante $y(t) = b/a$
- Se $y_0 > b/a$ e $a > 0$... y cresce exponencialmente (ratos e corujas)
- Se $y_0 > b/a$ e $a < 0$... y decai assintoticamente a b/a (queda livre)
- Se $y_0 < b/a$ e $a > 0$... y decresce exponencialmente (ratos e corujas)
- Se $y_0 < b/a$ e $a < 0$... y cresce assintoticamente a b/a (queda livre)

Voltando ao exemplo da queda livre...

Vamos supor um objeto de 10 kg caindo em queda livre e consideremos o coeficiente $\gamma=2$ kg/s

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - 0,2 v$$

Vamos supor que o objeto é solto de uma altura de 300 m

- (a) Determine a velocidade em função do tempo
- (b) O tempo até o impacto com o solo
- (c) Sua velocidade no momento do impacto

Para responder à questão (a) é necessário resolver um problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - 0,2 v \quad v(0) = 0$$

Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Voltando ao exemplo da queda livre...

Utilizando a solução geral...

$$y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a} \right] e^{at} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{9,8}{0,2} + \left[0 - \frac{9,8}{0,2} \right] e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad v = 49(1 - e^{-2t})$$

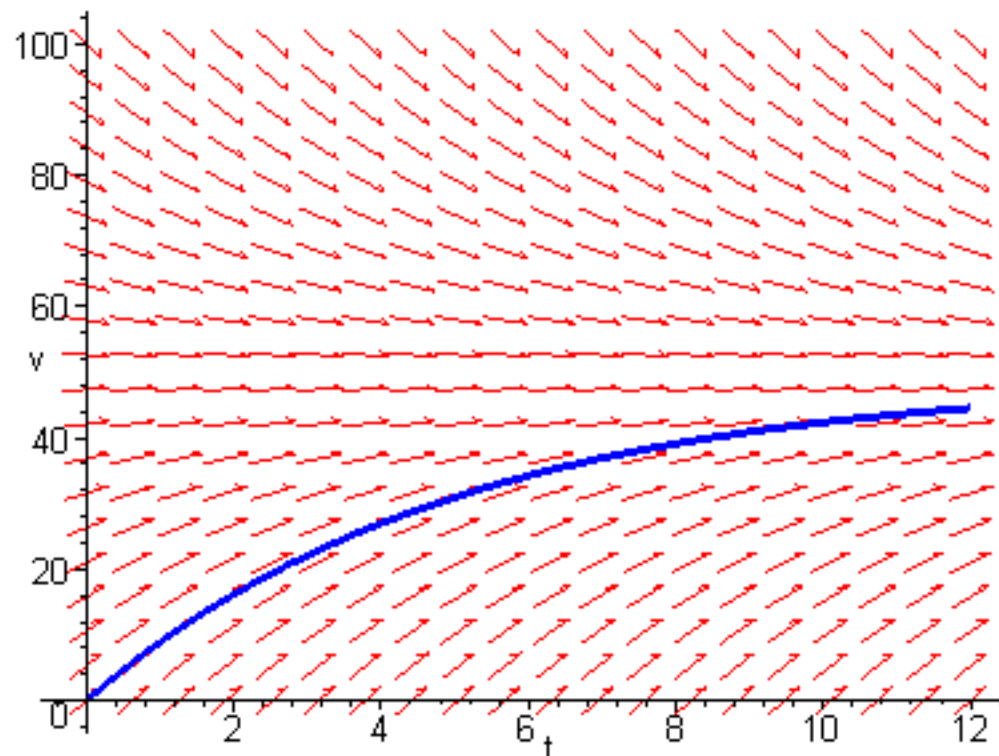
O gráfico da dessa solução na figura do campo de direções da equação é

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - 0,2v$$

$$v = 49(1 - e^{-2t})$$

$$v(0) = 0$$

Esta é a dependência da velocidade com o tempo.



Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Vamos responder às questões (b) e (c)

Definimos $s(t)$ como a distância percorrida no tempo t $s' = v(t) = 49(1 - e^{-2t})$

$$\Rightarrow s(t) = 49t + 24,5 e^{-2t} + C \quad s(0) = 0 \Rightarrow C = -24,5$$

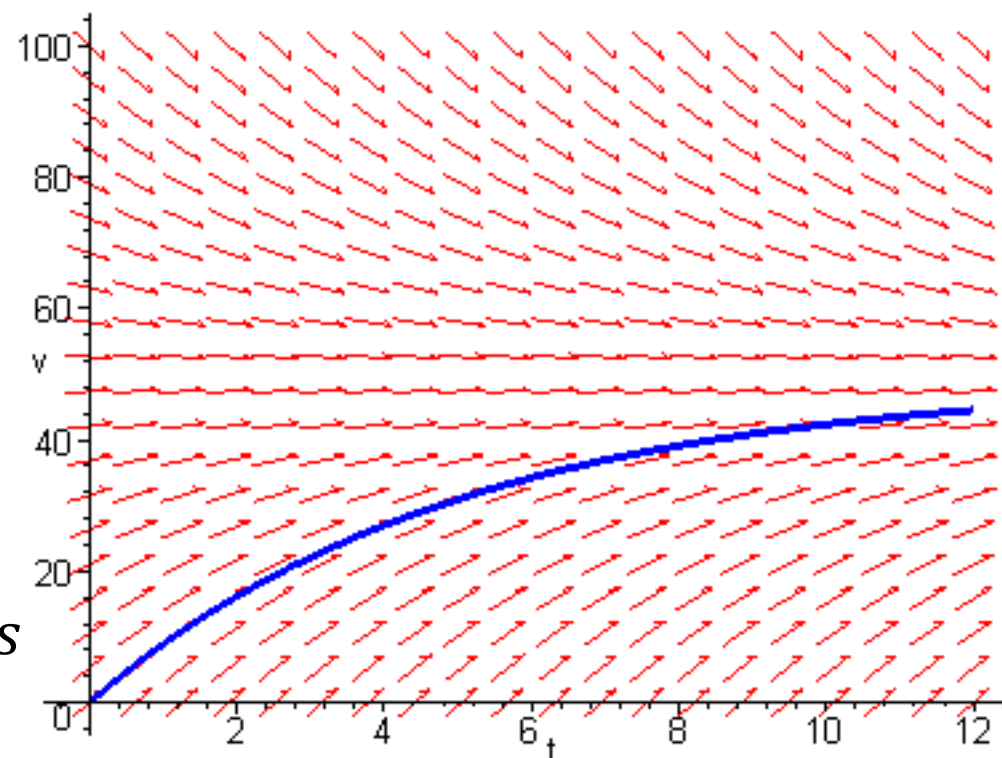
$$\Rightarrow s(t) = 49t + 24,5 e^{-2t} - 24,5$$

Se T é o tempo para o impacto se cumpre:

$$s(T) = 49T + 24,5 e^{-2T} - 24,5 = 300$$

Resolvendo essa equação (utilizando o Solver) obtemos $T \cong 10,51$ s

$$v(10,51) = 49(1 - e^{-0,2 \cdot 10,51}) \approx 43,01 \text{ m/s}$$



Soluções de Algumas Equações Diferenciais



Lista de exercícios disponível em:

<http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial>

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço