

ALGEBRA LINEAR

Prof. Dr. Patricio R. Impinnisi

Aula 2

Eliminação de Gauss

Multiplicação de matrizes

Matrizes inversas

Eliminação de Gauss

É o método utilizado pelos softwares para resolver as equações

- ❖ Eliminação (se bem sucedida)
- ❖ Retro substituição
- ❖ Operações com matrizes
- ❖ Multiplicação de matrizes

Exemplo

- $x + 2y + z = 2$
- $3x + 8y + z = 12$
- $4y + z = 2$

$$A \mathbf{X} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

A

Eliminação de Gauss

Inicialmente vamos eliminar x logo y ...

- $x + 2y + z = 2$
- $3x + 8y + z = 12$
- $4y + z = 2$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{1}^{\text{er}} \text{ pivô} \\ \left[\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{(2)-3x(1)} & \begin{array}{c} \text{2}^{\text{do}} \text{ pivô} \\ \left[\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{(3)-2x(2)} & \begin{array}{c} \text{3}^{\text{er}} \text{ pivô} \\ \left[\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{array} \right] \equiv U$$

- Evidentemente os pivôs não podem ser zero!!!
- E se tivermos zeros nessa posição?
- Trocamos as linhas!
- E se a as outras linhas tem zeros nessa posição?
- Nesses casos teremos uma falha irreparável
- Neste caso a matriz será singular.

Eliminação de Gauss

Retornamos a nosso **caso não singular** e vamos transformar b!

$$\begin{array}{l}
 \bullet \quad x + 2y + z = 2 \\
 \bullet \quad 3x + 8y + z = 12 \\
 \bullet \quad 4y + z = 2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2 & 1 & 2 \\
 3 & 8 & 1 & 12 \\
 0 & 4 & 1 & 2
 \end{array} \right] \xrightarrow{(2)-3x(1)} \left[\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2 & 1 & 2 \\
 0 & 2 & -2 & 6 \\
 0 & 4 & 1 & 2
 \end{array} \right] \xrightarrow{(3)-2x(2)} \left[\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2 & 1 & 2 \\
 0 & 2 & -2 & 6 \\
 0 & 0 & 5 & -10
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 1 \\
 0 & 2 & -2 \\
 0 & 0 & 5
 \end{array} \right] \equiv U$$

$$\left[\begin{array}{c}
 2 \\
 6 \\
 -10
 \end{array} \right] \equiv c$$

$$A \rightarrow U$$

$$b \rightarrow c$$

Vamos agora resolver as equações executando a retro substituição!

Eliminação de Gauss

Retornamos a nosso caso não singular e vamos transformar b!

- $x + 2y + z = 2$
- $3x + 8y + z = 12$
- $4y + z = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-3x(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-2x(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

Retro substituição!

- $x + 2y + z = 2$
- $2y - 2z = 6$
- $5z = -10$

$$\mathbf{U} \mathbf{X} = \mathbf{c}$$

$y = 1$
 $x = 2$
 $z = -2$

Agora vamos executar este procedimento com matrizes...

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

Vamos lembrar como se opera com matrizes...

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_{11} + 4a_{12} + 5a_{13} \\ 3a_{21} + 4a_{22} + 5a_{23} \\ 3a_{31} + 4a_{32} + 5a_{33} \end{bmatrix}$$

$$[3 \quad 4 \quad 5] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [3a_{11} + 4a_{21} + 5a_{31} \quad \dots \quad \dots]$$

$$3 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_{11} + 4a_{12} + 5a_{13} \\ 3a_{21} + 4a_{22} + 5a_{23} \\ 3a_{31} + 4a_{32} + 5a_{33} \end{bmatrix}$$

1x3

3x3 = 1x3

Matriz x Vetor Coluna = Vetor Coluna

Vetor linha x Matriz = Vetor linha

CL de Colunas!!!

CL de linhas!!!

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

No nosso caso tínhamos...

- $x + 2y + z = 2$
- $3x + 8y + z = 12$
- $4y + z = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Qual matriz vai executar o primeiro passo da nossa eliminação?

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

A primeira linha não muda então a CL das linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

E a linha do meio é...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Como seria a linha do meio para que nada mude?

Essa matriz particular é a matriz identidade!!! Desempenha o papel da multiplicação por 1...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos subtrair 3 da linha 1 e somar à linha 2...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

De onde veio o elemento marcado?

E_{21}

E agora?Precisamos eliminar o elemento a_{32}

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

Vamos subtrair 2x a linha 2 da linha 3....será a matriz E_{32} ...que é:

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

A linha 1 fica sem modificação, o mesmo que a dois então...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

A terceira será a linha 3 menos 2x a linha 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Agora vamos juntar todo o procedimento numa única operação....

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

Colocando tudo junto (na mesma sequencia)...

$$E_{32} (E_{21} A) = U$$

Uma questão muito importante ...

...o parêntesis pode ser removido mas sem alterar a ordem de multiplicação das matrizes!!! (o produto de matrizes é associativo mas não comutativo)

$$(E_{32} E_{21}) A = U$$

Antes de continuar vamos ver um tipo de matriz especial que permite comutar as linhas...a matriz permutação!

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

Matriz permutação...vejam um exemplo no caso 2 x 2

$$\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

P

Como permutar as colunas?

$$\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

Assim não é possível!!!!

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

Moral da historia: para operar com linhas multiplicamos a partir da esquerda, se for para combinar colunas multiplicamos pela direita

Lembrar sempre que, em geral $A \cdot B \neq B \cdot A$

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

Quantas matrizes de permutação de linhas existem no caso de A ser 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$$

Existem 6 matrizes P para uma matriz 3×3 !

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A$$

O que acontece se multiplicamos entre elas duas destas matrizes?
E se invertemos?

Ficamos sempre dentro do grupo destas 6 matrizes

E quais são as inversas...

Aqui, curiosamente, temos que $P^{-1} = P^T$ e portanto $P^T P = I$

Quantas P existem num sistema 4×4 ?

24 $P!$... $n!$

Retornemos a nosso problema de juntar todo numa única operação $(E_{32} E_{21}) A = U$

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

A forma mais simples de fazer isso é transformar U em A e não A em U!!!

Ou seja, a operação inversa!!

Por isso vamos começar estudando a matriz inversa, o que é a matriz inversa e como se acha?

Vamos achar a matriz que desfaz a eliminação do termo a_{21} (-3 col1 + col2)...esta matriz é a matriz inversa! E ela deve satisfazer a condição:

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E_{21}^{-1} E_{21} **I**

Para poder resolver o problema das matrizes inversas precisamos primeiro estudar como se multiplicam matrizes...

Multiplicação de matrizes

Há quatro formas de multiplicar matrizes...

1 forma (normal):

Vamos supor as matrizes A, B e C de forma que :

The diagram shows the multiplication of matrix A and matrix B to produce matrix C. Matrix A is represented as a row vector with three dots above and below the first and last elements, and a red horizontal line under the second element. Matrix B is represented as a column vector with three dots to the left and right of the first and last elements, and a red vertical line to the right of the second element. Matrix C is represented as a column vector with three dots to the left and right of the first and last elements, and a red circle around the second element. A red arrow points from the label C_{34} to the red circle. The labels 'Linha 3' and 'Col 4' are placed above and to the right of matrix A and B respectively.

$$\begin{matrix} \text{Linha 3} & \begin{bmatrix} \dots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dots \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Col 4} \\ \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} & = & \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dots \end{bmatrix} \\ & A & B & & C \end{matrix}$$

Lembremos como se obtém um elemento específico de C, por exemplo o C_{34}

É a linha 3 de A vezes a coluna 4 de B ...e se faz assim:

$$C_{34} = (\text{linha 3 de A}) \cdot (\text{coluna 4 de B}) = a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} + \dots = \sum_{k=1}^n a_{3k}b_{k4}$$

Para poder multiplicar matrizes a regra é $A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$

Vamos ver agora a segunda forma de multiplicar matrizes...

Multiplicação de matrizes

2 forma (por colunas):

Quando multiplicamos a matriz A, pela primeira coluna de B obtemos a primeira coluna de C....

$$\begin{bmatrix} \cdots & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

A B C

$$A (\text{col1 de B}) = (\text{col1 de C})$$

Desta forma, as colunas da matriz C são combinações das colunas da matriz A (pois $A \times \text{coluna B}$ é uma combinação das colunas de A!!!). Lembrando, a combinação é dada pelo vetor coluna (neste caso abaixo o vetor coluna x,y,z)...

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

3 forma (por linhas):

Quando multiplicamos uma linha da matriz A, pela matriz B obtemos uma linha da matriz C que é uma **combinação de todas as linhas da matriz B**

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \dots & & \\ \color{red}{\dots} & \color{red}{\vdots} & \color{red}{\vdots} \\ \dots & & \dots \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \color{red}{\dots} \\ \color{red}{\dots} \\ \color{red}{\dots} \\ \color{red}{\dots} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} \dots & & \\ \color{red}{\dots} & \color{red}{\vdots} & \color{red}{\vdots} \\ \dots & & \dots \end{array} \right] \\ A \qquad \qquad B \qquad \qquad C \end{array}$$

As linhas de C são combinações das linhas de B, lembrando....

$$[3 \quad 4 \quad 5] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [3a_{11} + 4a_{21} + 5a_{31} \quad \dots \quad \dots]$$

Desta forma, **as linhas de C são CL das linhas de B, e as colunas de C são CL das colunas de A**

Qual é a quarta forma?

Já vimos matriz x matriz, coluna x matriz e linha x matriz ...falta....

Multiplicação de matrizes

4 forma (coluna x linha):

O que acontece se multiplicamos uma coluna de A por uma linha de B?

É diferente da **1 forma** onde tomamos uma linha vezes uma coluna!!!

$$\begin{bmatrix} \vdots & \color{red}{|} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \dots & \vdots \\ \color{red}{-} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}$$

A B C
mx1 1xp mxp

Vejam um exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \ 6] = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

Todos os vetores linha estão numa mesma linha reta
Todos os vetores coluna estão numa mesma linha reta

Neste exemplo as colunas de C são múltiplos da coluna A

As linhas de C são múltiplos das linhas de B

Por isso a **4 forma** é que $AB = \text{soma das (colunas de A)} \times (\text{linhas de B})$

O espaço das linhas (que são todas as combinações da linha 1,6) é uma linha para esta matriz e o espaço das colunas (todas as combinações da coluna 2,3,4) é uma linha também, e o motivo é terem sido $(mx1) \cdot (1xp)$

Vejam um exemplo mais complexo que o caso acima de 1 coluna vezes 1 linha...

Multiplicação de matrizes

4 forma (coluna x linha):

Vejamos o caso de uma matriz 3x2 vezes uma matriz 2x2

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 6 \\ 7 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 17 \\ 9 & 24 \\ 11 & 51 \end{bmatrix}$$

Uma última coisa sobre produtos de matrizes...

O produto em bloco!

Imaginemos uma matriz A (10 x 10) multiplicada por outra matriz B (10x10) que resulta numa matriz C (10x10) e dividimos as matrizes em blocos A_i e B_j

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

Na primeira posição teríamos $A_1B_1 + A_2B_3$ e assim sucessivamente...

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Conjunto de problemas 1.3 (página 15)

Resolver: 1; 2; 4; 7; 8; 10; 13; 14; 16; 18; 27; 30

Conjunto de problemas 1.4 (página 26)

Resolver: 2; 4; 5; 6; 14; 15; 16; 18; 22; 23; 25; 28; 30; 32; 34;
35; 46; 47; 50; 51; 56;

Matrizes inversas

Voltando às **matrizes inversas**, vamos começar com matrizes quadradas

Pela definição: se $b = A x$ então $A^{-1} b = x$

Substituindo encontramos algo evidente: $b = A x = A A^{-1} b = b$ $A^{-1} A = I = A A^{-1}$

Imaginemos uma matriz A Existe A^{-1} ?

Vamos ver o caso singular (quando NÃO EXISTE a matriz inversa)

Vejam um exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Por que esta matriz A não é invertível?

Imaginemos o caso em que $A x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se A fosse invertível teríamos que

Assim, se existe um vetor x para o qual $A x = 0$ então A não tem inversa!

$A^{-1} 0 = x \dots \rightarrow x=0$ mas $x \neq 0$

Matrizes inversas

Vamos conferir se de fato essa matriz é A^{-1} $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Como foi feito? Por que funcionou?

Ao aplicar o método da eliminação ao produto AI (neste caso foram dois passos com duas E 's) para obter $[I \ ?]$ o produto das E 's vezes A (multiplicação por bloco) deu I à direita (portanto $E=A^{-1}$) e o outro produto das E 's vezes I da E que vimos é A^{-1})

Assim: $\overset{\curvearrowright}{E} [A \ I] = [I \ ?]$ Logo.... $EA = I \rightarrow E = A^{-1}$ $E [A \ I] = [I \ A^{-1}]$
 \uparrow
 E 's

Mais um exemplo, neste caso de um sistema 3x3

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$A \quad \quad \quad x \quad \quad \quad b$

A equação $Ax=b$ será no final resolvida através de A^{-1} de forma que $A^{-1}b = x$

Matrizes inversas

Vejam os repassar **tudo de novo para 3x3** começando pelo método da eliminação

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(3)+(1)}]{\text{(2)-2(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(3)+(2)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor coluna b se transforma em c...que é: $c = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$

Após a transformação, agora temos o mesmo sistema inicial reescrito da forma $U x = c$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$U \quad \quad x \quad \quad c$

Matrizes inversas

Agora podemos resolver por retrossubstituição (começando pela última linha)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} w=2 \\ -8v-2w=-12 \text{ (} v=1\text{)} \\ 2u+v+w=5 \text{ (} u=1\text{)} \end{array}$$

Este método tem como foco transformar A em U (matriz diagonal superior)

Agora vamos executar este procedimento com matrizes...

Qual matriz vai executar o primeiro passo da nossa eliminação?

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2) - 2(1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizes inversas

O primeiro passo (eliminar a_{21}) é realizado pela matriz (CL de linhas!)....

A primeira linha de E_{21} é a CL das linhas de $1x(1)+0(2)+0(3)$ (não alteramos ela)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

A segunda linha de E_{21} é a CL das linhas de $-2x(1)+1(2)+0(3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

A terceira linha de E_{21} é simplesmente $0x(1)+0(2)+1(3)$ (não alteramos ela)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

E_{21}

A

U'

Matrizes inversas

A seguinte passo foi eliminar o termo a_{31}

A CL para a terceira linha foi $1x(1)+0(2)+1(3)$ portanto a E_{31} é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

E_{31}

A'

U''

Por último falta eliminar o termo a_{32} para o qual a E_{32} é....

Matrizes inversas

A CL para eliminar o termo a_{32} (sem mudar as linhas 1 e 2) é $0x(1)+1(2)+1(3)$ portanto a E_{32} é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E_{32}

A''

U'''

Destas forma as três matrizes que eliminam os termos $a_{2,1}$, $a_{3,1}$ e $a_{3,2}$ são:

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes inversas

Temos que fazer as mesmas operações na direção oposta (lembrando que $(ABC)^{-1} = (C^{-1} B^{-1} A^{-1})$ se inverte a ordem igual que com E!)

Por exemplo, se $E_{21}A = U'$ agora queremos que $(E_{21})^{-1} U' = A$

Isso é simplesmente desfazer a CL que executamos para eliminar a_{21} !

Ou seja desfazer para a_{21} a operação $-2x(1)+1(2)+0(3)$ realizada pela matriz E_{21}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

E_{21}

A

U'

Para isso realizamos as mesma operações na direção oposta!, ou seja agora pegamos U' e fazemos $2x(1)+1(2)+(3)$ para obter novamente A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$(E_{21})^{-1}$

U'

A

Matrizes inversas

Portanto a $(E_{21})^{-1}$ pode ser obtida diretamente de E_{21} simplesmente invertendo os sinais da operação **que altera a linha (os 1 na diagonal não alteram!!!)**

$$E_{21} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (E_{21})^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nosso problema agora é que no caso de produtos de matrizes (por exemplo no caso da matriz $E = E_{32} E_{31} E_{21}$) não sabemos como encontrar diretamente $(E)^{-1}$

Vamos encontrar, uma a uma, as matrizes inversas para desfazer o caminho de A até U ou seja de tal forma que $A = (E_{21})^{-1} (E_{31})^{-1} (E_{32})^{-1} U$, e a seguir, identificar a matriz L que multiplicada por U (LU) faz isso de uma única vez, ou seja, $L = (E_{21})^{-1} (E_{31})^{-1} (E_{32})^{-1}$

Matrizes inversas

Portanto podemos escrever estas inversas individualmente assim:

$$E_{21} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{31} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{32} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(E_{21})^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(E_{31})^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(E_{32})^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Assim $LE = I$ (verificar!) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

L E I

Matrizes inversas

Vamos verificar que $LU = A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

L U A

Agora no lugar de todo isso vamos aplicar o **método de Gauss-Jordan** para encontrar L (que é a inversa de E).

Matrizes inversas

Como sabemos que $AA^{-1} = I$ temos que

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ E & L & & I \end{matrix}$$

Portanto teríamos que resolver todas estas equações!!!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O método de Gauss-Jordam as resolve todas as $(n \times n)$ equações de uma vez !!!!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)+2(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} E & I \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ L=E^{-1} \end{matrix} \end{matrix}$$

$(3)-(2)$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por que tanta confusão?
por que não fazer
diretamente $A^{-1}b = x$?

Matrizes inversas

Calcular diretamente a inversa de A por Gauss-Jordam

Lembrando que tudo começou com:

$$\begin{matrix} & A & x & b \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{4} & -6 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ \color{red}{-2} & 7 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \color{red}{8} & 3 & | & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{A} & | & \\
 \\
 \begin{bmatrix} 2 & \color{red}{1} & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & \color{red}{3} & | & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & \frac{6}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -8 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{U !!} & \text{E!!=L}^{-1} & \\
 \\
 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & \frac{6}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -8 & 0 & | & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & &
 \end{array}$$

O problema aqui é que os pivôs não são unitários, para arrumar isso temos que dividir cada linha pelos seus pivôs (dividir qualquer equação por uma constante não altera a equação!!!)

Continuando

Matrizes inversas

Vamos verificar se de fato funcionou e $A^{-1}b$ é a solução x ?

Vamos resolver nossa equação assim: no lugar de $Ax = b \rightarrow A^{-1}b = x$!

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

A x b

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{8} & -\frac{5}{16} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{8} & -\frac{5}{16} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$u = 1$$

$$v = 1$$

$$w = 2$$

Não resolvemos assim porque ficamos igual que no início (ou pior pelos coeficientes fracionários) com 3 equações com 3 incógnitas!!! (imaginem um sistema nxn)

Matrizes inversas

Por ser importante vamos lembrar a propriedade mais importante da matriz inversa....

Se você multiplicar por A e, em seguida, multiplicar por A^{-1} voltará ao início!

$$b = A x \quad A^{-1} b = x \quad \text{Por isso } A^{-1}A = I$$

Nem todas as matrizes possuem inversas.

Se Ax for nulo ($Ax=0$) para um x diferente de zero, A^{-1} teria que retornar x a partir de um zero ($A^{-1} 0 = x$) o que é impossível!

Nosso problema é calcular A^{-1} e utilizar ela (quando existe) e compreender quais matrizes não possuem inversas.

Matrizes inversas

A matriz inversa existe se, e somente se, a eliminação produzir n pivôs

O método de eliminação resolve $Ax=b$ sem encontrar explicitamente A^{-1} .

$$b = A x \quad A^{-1} b = x \quad \text{Por isso } A^{-1}A = I$$

A matriz A não pode ter duas matrizes inversas diferentes.

Suponha que $BA=I$ e que $AC=I$. Então $B=C$ pois se fazemos:

$$B(AC)=(BA)C \text{ implica } BI=IC \text{ que é } B=C$$

Isso também mostra que a inversa à esquerda (IB) é igual à inversa à direita (BI)...o que não é geralmente válido para o produto de matrizes (em geral não podem ser comutadas).

Desta forma se queremos resolver $Ax=b$ podemos fazer isso utilizando a equação $x=A^{-1}b$

Por isso a importância das matrizes inversas

Matrizes especiais

Matriz inversa: $A = LU$

Matriz permutação: em $n \times n$ temos $n!$ todas invertíveis e $P^{-1} = P^T$ e $P^T P = I$

Matriz transposta: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ Matrizes $m \times n$ passam a ser $n \times m$

Matriz simétrica: $R^T = R$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Evidentemente: $R^T R$ é sempre simétrica!!!! (verifiquem por quê!)

Tomando $(R^T R)^T =$ direção inversa! $= R^T R^{TT} = R^T R$ por isso é simétrica!

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Conjunto de problemas 1.5 (página 39)

Resolver: 1; 2; 4; 5; 7; 14; 16; 17; 18; 19; 22; 25; 27; 28; 29; 32;

Conjunto de problemas 1.6 (pagina 52)

Resolver: 1; 2; 3; 8; 9; 16; 17a; 17b; 21; 22; 23; 29; 32; 35; 36;
38; 42; 49; 50