Conjunto de problemas 5.4

1. Seguindo o primeiro exemplo desta seção, encontre os autovalores, os autovetores e a exponencial e^{At} para

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Para a matriz anterior, apresente a solução geral de $du/dt = Au$ e a solução específica que coincida com $u(0) = (3, 1)$. Qual é o *estado estacionário* quando $t \to \infty$ (trata-se de um processo contínuo de Markov; $\lambda = 0$ em uma equação diferencial corresponde a $\lambda = 1$ em uma equação das diferenças, já que $e^{0t} = 1$)?

3. Suponha que a direção do tempo seja invertida para obter a matriz $-A$:

$$\frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u \qquad \text{com} \qquad u_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre $u(t)$ e mostre que ele *aumenta* em vez de cair quando $t \to \infty$ (a difusão é irreversível e a equação do calor não pode ir para trás).

4. A partir de seus traços e determinantes, determine em que tempo t as matrizes abaixo alternam entre estáveis com autovalores reais, estáveis com autovalores complexos e instáveis?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ t & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4-t \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}.$$

5. Determine a estabilidade ou instabilidade de $dv/dt = w$, $dw/dt = v$. Há uma solução que decresça?

6. Determine a estabilidade de $u' = Au$ para as seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. (d) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

7. Suponha que a população de coelhos r e a população de lobos w sejam determinadas por

$$\frac{dr}{dt} = 4r - 2w$$
$$\frac{dw}{dt} = r + w.$$

(a) Esse sistema é estável, neutramente estável ou instável?
(b) Se inicialmente $r = 300$ e $w = 200$, qual é a população no tempo t?
(c) Após um longo tempo, qual é a proporção de coelhos em relação a lobos?

8. Converta $y'' = 0$ em um sistema de primeira ordem $du/dt = Au$:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}.$$

Essa matriz A 2 por 2 possui apenas um autovetor e não pode ser diagonalizada. Calcule e^{At} a partir da série $I + At + \dots$ e apresente a solução $e^{At}u(0)$, começando a partir de $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$. Verifique se o seu (y, y') satisfaz $y'' = 0$.

9. A equação de ordem superior $y'' + y = 0$ pode ser apresentada como um sistema de primeira ordem introduzindo-se a velocidade y' como outra incógnita:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^1 \\ -y \end{bmatrix}.$$

Se isso for $du/dt = Au$, qual é a matriz A 2 por 2? Encontre seus autovalores e seus autovetores e calcule a solução que começa a partir de $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

10. Uma matriz diagonal como $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ satisfaz a regra usual $e^{\Lambda(t+T)} = e^{\Lambda t}e^{\Lambda T}$, pois a regra se mantém para todos os elementos diagonais.

(a) Explique por que $e^{A(t+T)} = e^{At}e^{AT}$ utilizando a fórmula $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$.

(b) Mostre que $e^{A+B} = e^A e^B$ *não é verdadeiro* para matrizes a partir do seguinte exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(utilize série para } e^A \text{ e } e^B\text{)}.$$

---

11. Se P for uma matriz de projeção, a partir da série infinita, mostre que

$$e^P \approx I + 1{,}718P.$$

12. Quais são os autovalores λ, as frequências ω e a solução geral da seguinte equação?

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} u.$$

13. Com uma matriz de fricção F na equação $u'' + Fu' - Au = 0$, substitua um exponencial puro $u = e^{\lambda t}x$ e encontre um problema de autovalores quadráticos para λ.

14. Encontre os autovalores e autovetores de

$$\frac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} u.$$

Por que é possível saber, sem cálculos, que e^{At} será uma matriz ortogonal e $\|u(t)\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ será constante?

15. Para a equação (16) no texto, com $\omega = 1$ e $\sqrt{3}$, encontre o deslocamento se o primeiro peso for lançado em $t = 0$; $u(0) = (0, 0)$ e $u'(0) = (1, 0)$.

16. Por retrossubstituição ou cálculo de autovetores, resolva

$$\frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} u \quad \text{com} \quad u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

17. Na maioria das aplicações, a equação de segunda ordem se parece com $Mu'' + Ku = 0$, com uma *matriz de massa* multiplicando as segundas derivadas. Substitua a exponencial pura $u = e^{i\omega t}x$ e encontre o "problema dos autovalores generalizado" que deve ser resolvido para a frequência ω e o vetor x.

18. Toda matriz 2 por 2 com traço nulo pode ser apresentada como

$$A = \begin{bmatrix} a & b+c \\ b-c & -a \end{bmatrix}.$$

Mostre que seus autovalores são reais exatamente quando $a^2 + b^2 \geq c^2$.

19. Para a seguinte equação antissimétrica

$$\frac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

(a) apresente u'_1, u'_2, u'_3, e confirme que $u'_1u_1 + u'_2u_2 + u'_3u_3 = 0$

(b) deduza que o módulo $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ é uma constante.

(c) encontre os autovalores de A.

A solução girará ao redor do eixo $w = (a, b, c)$, pois Au é o "produto vetorial" $u \times w$ – que é perpendicular a u e w.

20. Resolva a seguinte equação de segunda ordem

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} u \quad \text{com} \quad u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

21. Uma porta é aberta entre salas que contêm $v(0) = 30$ pessoas e $w(0) = 10$ pessoas. O movimento entre as salas é proporcional à diferença $v - w$:

$$\frac{dv}{dt} = w - v \qquad \text{e} \qquad \frac{dw}{dt} = v - w.$$

Mostre que o total $v + w$ é constante (40 pessoas). Encontre a matriz em $du/dt = Au$ e seus autovalores e autovetores. Quais são v e w em $t = 1$?

22. Encontre os valores de λ e x de modo que $u = e^{\lambda t}x$ resolva

$$\frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u.$$

Que combinação $u = c_1e^{\lambda_1 t}x_1 + c_2e^{\lambda_2 t}x_2$ começa a partir de $u(0) = (5, -2)$?

23. A solução para $y'' = 0$ é uma linha reta $y = C + Dt$. Converta para equação matricial:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \text{ possui a solução } \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = e^{At}\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}.$$

Essa matriz A não pode ser diagonalizada. Encontre A^2 e calcule $e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots$. Multiplique seu e^{At} por $(y(0), y'(0))$ para verificar a linha reta $y(t) = y(0) + y'(0)t$.

24. Substitua $y = e^{\lambda t}$ em $y'' = 6y' - 9y$ para mostrar que $\lambda = 3$ é uma raiz repetida. Isto é um problema; precisamos de uma segunda solução após e^{3t}. A equação matricial é

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}.$$

Mostre que essa matriz possui $\lambda = 3, 3$ e apenas uma reta de autovetores. *Aqui também temos um problema*. Mostre que a segunda solução é $y = te^{3t}$.

25. Encontre A para alterar $y'' = 5y' + 4y$ em uma equação vetorial para $u(t) = (y(t), y'(t))$:

$$\frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = Au.$$

Quais são os autovalores de A? Encontre-os também substituindo $y = e^{\lambda t}$ na equação escalar $y'' = 5y' + 4y$.

26. Resolva o problema 22 para $u(t) = (y(t), z(t))$, por retrossubstituição:

$$\text{Primeiro, resolva } \frac{dz}{dt} = z, \text{ partindo de } z(0) = -2.$$

$$\text{Em seguida, resolva } \frac{dy}{dt} = 4y + 3z, \text{ partindo de } y(0) = 5.$$

A solução para y será uma combinação de e^{4t} e e^{t}.

27. Reverta a difusão de pessoas do problema 21 para $du/dt = -Au$:

$$\frac{dv}{dt} = v - w \quad \text{e} \quad \frac{dw}{dt} = w - v.$$

O total $v + w$ permanece constante. Como os valores de λ se alteram agora que A é modificada para $-A$? Mostre, no entanto, que $v(t)$ cresce até o infinito a partir de $v(0) = 30$.

28. Uma solução particular para $du/dt = Au - b$ é $u_p = A^{-1}b$, se A for invertível. As soluções para $du/dt = Au$ fornecem u_n. Encontre a solução completa $u_p + u_n$ para

(a) $\dfrac{du}{dt} = 2u - 8$. (b) $\dfrac{du}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$.

29. Se c não for um autovalor de A, substitua $u = e^{ct}v$ e encontre v para resolver $du/dt = Au - -e^{ct}b$. Este $u = e^{ct}v$ é uma solução particular. Como ela falha quando c é um autovalor?

30. Explique um modo de apresentar $my'' + by' + ky = 0$ como uma equação vetorial $Mu' = Au$.

31. Encontre uma matriz A para ilustrar cada uma das regiões instáveis da Figura 5.2:

(a) $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$.
(b) $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$.
(c) Valores de λ complexos com parte real $a > 0$.

32. (a) Encontre duas funções familiares que resolvam a equação $d^2y/dt^2 = -y$. Qual começa com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$?

(b) Essa equação de segunda ordem $y'' = -y$ produz uma equação vetorial $u' = Au$:

$$u = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \qquad \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = Au.$$

Coloque $y(t)$ do item (a) em $u(t) = (y, y')$. Isto resolve novamente o problema 9.

Os problemas 33 a 43 abordam o exponencial matricial e^{At}.

33. Partindo de $u(0)$, a solução no tempo T é $e^{AT}u(0)$. Execute um tempo adicional t para obter $e^{At}(e^{AT}u(0))$. Esta solução no tempo $t + T$ também pode ser apresentada como _______. Conclusão: e^{At} vezes e^{AT} é igual a _______.

34. Em geral, $e^A e^B$ é diferente de $e^B e^A$. Ambas são diferentes de e^{A+B}. Verifique isto utilizando os problemas 36, 37 e 34:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

35. Apresente $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ na forma $S\Lambda S^{-1}$. Encontre e^{At} a partir de $Se^{\Lambda t}S^{-1}$.

36. Apresente $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ como $S\Lambda S^{-1}$. Multiplique $Se^{\Lambda t}S^{-1}$ para encontrar a matriz exponencial e^{At}. Verifique $e^{At} = I$ quando $t = 0$.

37. A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ possui $B^2 = 0$. Encontre e^{Bt} a partir da série infinita (curta). Verifique que a derivada de e^{Bt} é Be^{Bt}.

38. Apresente cinco termos da série infinita para e^{At}. Extraia a derivada em relação a t de cada termo. Mostre que você possui quatro termos de Ae^{At}. Conclusão: $e^{At}u(0)$ resolve $u' = Au$.

39. Se $A^2 = A$, mostre que a série infinita produz $e^{At} = I + (e^t - 1)A$. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ do problema 36, isto resulta em $e^{At} =$ ________.

40. Encontre uma solução $x(t)$, $y(t)$ do primeiro sistema que aumenta quando $t \to \infty$. Para evitar essa instabilidade, um cientista pensou em trocar as duas equações!

$$\begin{aligned} dx/dt &= 0x - 4y \\ dy/dt &= -2x + 2y \end{aligned} \qquad \text{torna-se} \qquad \begin{aligned} dy/dt &= -2x + 2y \\ dx/dt &= 0x - 4y. \end{aligned}$$

Agora a matriz $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ é estável. Ela possui $\lambda < 0$. Comente essa loucura.

41. Coloque $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ em uma série finita para encontrar e^{At}. Primeiro, calcule A^2:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} + \cdots = \begin{bmatrix} e^t & \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

42. A partir desta solução geral para $du/dt = Au$, encontre a matriz A:

$$u(t) = c_1e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

43. Apresente duas razões para o fato de que o exponencial matricial e^{At} nunca é singular:

(a) Apresente sua inversa.

(b) Apresente seus autovalores. Se $Ax = \lambda x$, então $e^{At}x =$ ________x.