Conjunto de problemas 1.4

1. Escreva as matrizes A e B 2 por 2 que tenham elementos $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = (-1)^{i+j}$. Multiplique-os para encontrar AB e BA.

2. Encontre dois produtos escalares e um produto matricial de:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

O primeiro fornece o módulo do vetor (ao quadrado).

3. Se uma matriz A m por n multiplicar um vetor x de dimensão n, quantas multiplicações distintas estarão envolvidas? E, se A multiplicar uma matriz B, n por p?

4. Dê exemplos 3 por 3 (que não seja a matriz nula) de

(a) uma matriz diagonal: $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.
(b) uma matriz simétrica: $a_{ij} = a_{ji}$, quaisquer que sejam i e j.
(c) uma matriz triangular superior: $a_{ij} = 0$ se $i > j$.
(d) uma matriz antissimétrica: $a_{ij} = -a_{ji}$, quaisquer que sejam i e j.

5. Calcule os produtos

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para o terceiro, esboce os vetores-coluna (2, 1) e (0, 3). Multiplicando por (1, 1), faça a soma dos vetores (graficamente).

6. Multiplique Ax para encontrar um vetor solução x para o sistema $Ax =$ *vetor nulo*. Você consegue encontrar mais soluções para $Ax = 0$?

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7. Operando uma coluna por vez, calcule os produtos

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

8. Estas sub-rotinas multiplicam Ax *por linhas ou por colunas*? Comece com $B(I) = 0$:

```
    DO 10 I = 1,N                  DO 10 J = 1,N
    DO 10 J = 1,N                  DO 10 I = 1,N
10  B(I) = B(I) + A(I,J) * X(J)    10  B(I) = B(I) + A(I,J) * X(J)
```

Os resultados $Bx = Ax$ são os mesmos. O segundo código é ligeiramente mais eficiente em FORTRAN e muito mais eficiente em máquinas de vetores (o primeiro altera os elementos simples $B(I)$, as segundas são capazes de atualizar vetores inteiros).

9. O produto de duas matrizes triangulares inferiores é também uma triangular inferior (todos os elementos acima da diagonal principal são nulos). Verifique isto com um exemplo 3 por 3 e explique como isso decorre das propriedades de multiplicação de matrizes.

10. Suponha que A comuta com qualquer matriz 2 por 2 ($AB = BA$), particularmente:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{comuta com} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $a = d$ e $b = c = 0$. Se $AB = BA$ para todas as matrizes B, então A é um múltiplo da matriz identidade.

11. Verdadeiro ou falso? Se a resposta for falso, dê um contraexemplo específico.

(a) Se as colunas 1 e 3 de B são iguais, então as colunas 1 e 3 de AB também são.

(b) Se as linhas 1 e 3 de B são iguais, então as linhas 1 e 3 de AB também são.

(c) Se as linhas 1 e 3 de A são iguais, então as linhas 1 e 3 de AB também são.

(d) $(AB)^2 = A^2B^2$.

12. Seja x o vetor-coluna $(1, 0, ..., 0)$, mostre que a regra $(AB)x = A(Bx)$ obriga a primeira coluna de AB ser igual a A vezes a primeira coluna de B.

13. Quais das seguintes matrizes são, com certeza, iguais a $(A + B)^2$?

$A^2 + 2AB + B^2$, $A(A + B) + B(A + B)$, $(A + B)(B + A)$, $A^2 + AB + BA + B^2$.

14. Se os elementos de A são a_{ij}, utilize a notação dos subscritos para escrever:

(a) o primeiro pivô.

(b) o multiplicador ℓ_{i1} da linha 1 a ser subtraído da linha i.

(c) o novo elemento que substitui a_{ij} após a subtração.

(d) o segundo pivô.

15. Por tentativa e erro, encontre exemplos de matrizes 2 por 2, de modo que:

(a) $A^2 = -I$, com A tendo apenas elementos reais.

(b) $B^2 = 0$, embora $B \neq 0$.

(c) $CD = -DC$, não sendo permitido o caso $CD = 0$.

(d) $EF = 0$, embora nenhum elemento de E ou F seja zero.

16. A primeira linha de AB é uma combinação linear de todas as linhas de B. Quais são os coeficientes nessa combinação e qual é a primeira linha de AB se:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}?$$

17. Descreva as linhas de EA e as *colunas* de AE se:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

18. *Uma quarta maneira de multiplicar matrizes é* ***colunas de A vezes linhas de B***:

$AB =$ (coluna 1)(linha 1) + ... + (coluna n)(linha n) = soma de matrizes simples.

Dê um exemplo 2 por 2 dessa importante regra da multiplicação de matrizes.

19. Encontre as potências A^2, A^3 (A^2 vezes A) e B^2, B^3, C^2, C^3. Quais são A^k, B^k e C^k?

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

20. Se A e B são matrizes n por n com todos os elementos iguais a 1, encontre $(AB)_{ij}$. A notação de somatório transforma o produto AB e a propriedade $(AB)C = A(BC)$ em:

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \qquad \sum_j \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right) c_{jl} = \sum_k a_{ik} \left(\sum_j b_{kj} c_{jl} \right).$$

Calcule ambos os lados, se C também for n por n, com cada $c_{jl} = 2$.

21. A matriz que gira o plano xy pelo ângulo θ é

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Verifique que $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$ a partir das identidades para $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ e $\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$. Quanto é $A(\theta)$ vezes $A(-\theta)$?

Os problemas 22 a 31 abordam matrizes de eliminação.

22. Suponha que $a_{33} = 7$ e que o terceiro pivô seja 5. Se você alterar a_{33} para 11, o terceiro pivô será ____. Se você alterar a_{33} para ____, haverá zero na posição de pivô.

23. Que matriz E_{31} subtrai 7 vezes a linha 1 da linha 3? Para reverter essa etapa, R_{31} deve ________ 7 vezes a linha ____ à linha ____. Multiplique E_{31} por R_{31}.

24. Se todas as colunas de A são um múltiplo de (1, 1, 1), então Ax sempre será um múltiplo de (1, 1, 1). Dê um exemplo 3 por 3. Quantos pivôs são gerados na eliminação?

25. No problema 26, aplicando-se E_{21} e, em seguida, E_{32} à coluna $b = (1, 0, 0)$, obtemos $E_{32}E_{21}b =$ ____. Aplicando-se E_{32} antes de E_{21}, obtemos $E_{21}E_{32}b =$ ____. Quando E_{32} é aplicada primeiro, a linha ____ não sofre nenhum efeito da linha ____.

26. Apresente matrizes 3 por 3 que produzam estas etapas de eliminação:

(a) E_{21} subtrai 5 vezes a linha 1 da linha 2.

(b) E_{32} subtrai –7 vezes a linha 2 da linha 3.

(c) P troca as linhas 1 e 2 e, em seguida, as linhas 2 e 3.

27. Qual das três matrizes E_{21}, E_{31}, E_{32} colocam A na forma triangular U?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_{32}E_{31}E_{21}A = U.$$

Multiplique esses Es para obter uma matriz M que realize a eliminação: $MA = U$.

28. Essa matriz 4 por 4 precisa de quais das matrizes de eliminação E_{21}, E_{32} e E_{43}?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

29. Multiplique estas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

30. (a) Que matriz E_{13} 3 por 3 soma a linha 3 à linha 1?
(b) Que matriz soma a linha 1 à linha 3 e, *ao mesmo tempo*, soma a linha 3 à linha 1?
(c) Que matriz soma a linha 1 à linha 3 e, *em seguida*, soma a linha 3 à linha 1?

31. (a) E_{21} subtrai a linha 1 da linha 2 e, em seguida, P_{23} troca as linhas 2 e 3. Que matriz $M = P_{23}E_{21}$ executa ambas as etapas de uma vez?
(b) P_{23} troca as linhas 2 e 3 e, em seguida, E_{31} subtrai a linha 1 da linha 3. Que matriz $M = E_{31}P_{23}$ executa ambas as etapas de uma vez? Explique por que as M's são iguais, mas as E's são diferentes.

Os problemas 32 a 44 abordam criação e multiplicação de matrizes.

32. A é 3 por 5, B é 5 por 3, C é 5 por 1 e D é 3 por 1. *Todos os elementos são* 1. Quais dessas operações de matrizes são possíveis e quais são os seus resultados?

$$BA \qquad AB \qquad ABD \qquad DBA \qquad A(B + C).$$

33. Se E soma a linha 1 à linha 2 e F soma a linha 2 à linha 1, EF é igual a FE?

34. A primeira componente de Ax é $\Sigma a_{1j}x_j = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n$. Escreva fórmulas para a terceira componente de Ax e o elemento (1, 1) de A^2.

35. A parábola $y = a + bx + cx^2$ passa pelos pontos $(x, y) = (1, 4)$, $(2, 8)$ e $(3, 14)$. Encontre e resolva uma equação matricial para as incógnitas (a, b, c).

36. Multiplique essas matrizes nas ordens EF, FE e E^2:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

37. Escreva esses antigos problemas na forma matricial 2 por 2 $Ax = b$ e resolva-os:
(a) X é duas vezes tão velho quanto Y e suas idades somam 39.
(b) $(x, y) = (2, 5)$ e $(3, 7)$ localizam-se na reta $y = mx + c$. Encontre m e c.

38. (a) Suponha que todas as colunas de B sejam iguais. Então, todas as colunas de EB são iguais, pois cada uma corresponde a E vezes ____.
(b) Suponha que todas as linhas de B sejam [1 2 4]. Mostre, por meio de exemplo, que todas as linhas de EB *não* são [1 2 4]. É verdade que essas linhas são ____.

39. Se $AB = I$ e $BC = I$, utilize a associatividade para provar que $A = C$.

40. Verdadeiro ou falso?

(a) Se A^2 for definido, então A será necessariamente quadrada.

(b) Se AB e BA forem definidos, então A e B serão quadradas.

(c) Se AB e BA forem definidos, então AB e BA serão quadradas.

(d) Se $AB = B$, então $A = I$.

41. Se A for m por n, quantas multiplicações separadas estarão envolvidas se:

(a) A multiplicar um vetor x com n componentes?

(b) A multiplicar uma matriz B n por p? Então, AB será m por p.

(c) A multiplicar a si mesma para produzir A^2? Aqui $m = n$.

42. Para provar que $(AB)C = A(BC)$, utilize os vetores-coluna $b_1, ..., b_n$ de B. Em primeiro lugar, suponha que C possui apenas uma coluna c com elementos $c_1, ..., c_n$:

AB possui colunas $Ab_1, ..., Ab_n$ e Bc possuem uma coluna $c_1b_1 + ... + c_nb_n$.

Então, $(AB)c = c_1Ab_1 + ... + c_nAb_n$ é igual a $A(c_1b_1 + ... + c_nb_n) = A(Bc)$.

A *linearidade* resulta na igualdade dessas duas somas e $(AB)c = A(Bc)$. O mesmo é verdadeiro para todas as outras _____ de C. Portanto $(AB)C = A(BC)$.

43. Que linhas, colunas ou matrizes devem ser multiplicadas para encontrar:

(a) a terceira coluna de AB?

(b) a primeira linha de AB?

(c) o elemento da linha 3, coluna 4 de AB?

(d) o elemento da linha 1, coluna 1 de CDE?

44. (Matrizes 3 por 3.) Escolha a única matriz B de modo que para qualquer matriz A:

(a) $BA = 4A$.

(b) $BA = 4B$.

(c) BA possua as linhas 1 e 3 de A invertidas e a linha 2 inalterada.

(d) Todas as linhas de BA sejam iguais à linha 1 de A.

Os problemas a seguir utilizam multiplicação coluna-linha e multiplicação de blocos.

45. A ***multiplicação de blocos*** separa as matrizes em blocos (submatrizes). Se os seus formatos tornarem a multiplicação de blocos possível, então ela será permitida. Substitua esses x por números e confirme que a multiplicação de blocos funciona.

$$[A \quad B]\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = [AC + BD] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cc|c} x & x & x \\ x & x & x \\ \hline x & x & x \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} x & x & x \\ x & x & x \\ \hline x & x & x \end{array}\right].$$

46. Multiplique AB utilizando colunas vezes linhas:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}[3 \quad 3 \quad 0] + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}.$$

47. Trace os cortes em A, B e AB para mostrar como cada uma das quatro regras de multiplicação é, na verdade, uma multiplicação de blocos para encontrar AB:

(a) Matriz A vezes colunas de B.
(b) Linhas de A vezes matriz B.
(c) Linhas de A vezes colunas de B.
(d) Colunas de A vezes linhas de B.

48. Se você multiplicar uma *matriz noroeste* A e uma *matriz sudeste* B, que tipo de matrizes serão AB e BA? "Nordeste" e "sudeste" significam zeros abaixo e acima da diagonal secundária, que vai de $(1, n)$ a $(n, 1)$.

49. Se as três soluções do problema 58 são $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (0, 1, 1)$ e $x_3 = (0, 0, 1)$, resolva $Ax = b$ quando $b = (3, 5, 8)$. Questão desafio: qual é a matriz A?

50. Represente $2x + 3y + z + 5t = 8$ como uma matriz A (quantas linhas?) multiplicando o vetor-coluna (x, y, z, t) para produzir b. As soluções preenchem um plano no espaço quadridimensional. *O plano é tridimensional, sem volume* 4D.

51. Represente o produto escalar de $(1, 4, 5)$ e (x, y, z) como uma multiplicação de matrizes Ax. A possui uma linha. As soluções para $Ax = 0$ localizam-se em um _______ perpendicular ao vetor _______. As colunas de A estão no espaço de dimensão _______ .

52. *Eliminação para uma matriz de blocos 2 por 2*: se $A^{-1}A = I$, multiplique a primeira linha de blocos por CA^{-1} e subtraia da segunda linha para encontrar o "*complemento de Schur*" S:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & S \end{bmatrix}.$$

53. Que matriz P_1 2 por 2 projeta o vetor (x, y) sobre o eixo x para gerar $(x, 0)$? Que matriz P_2 projeta sobre o eixo y para gerar $(0, y)$? Se você multiplicar $(5, 7)$ por P_1 e, em seguida, multiplicar por P_2, você obterá (_______) e (_______).

54. Em notação do MATLAB, apresente os comandos que definem a matriz A e os vetores-coluna x e b. Que comando testaria se $Ax = b$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

55. A multiplicação de blocos diz que a eliminação na coluna 1 produz:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}/a & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \_\_ \end{bmatrix}.$$

56. Encontre todas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{que satisfaçam} \quad A\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}A.$$

57. Com $i^2 = -1$, o produto $(A + iB)(x + iy)$ é $Ax + iBx + iAy - By$. Utilize blocos para separar a parte real da parte imaginária que multiplica i:

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ ? & ? \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax - By \\ ? \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{parte real} \\ \text{parte imaginária} \end{matrix}$$

58. Suponha que você resolva $Ax = b$ para três lados direitos b:

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Ax_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se as soluções x_1, x_2, x_3 são as colunas de uma matriz X, qual é a matriz AX?

59. Crie uma **matriz mágica** $\boldsymbol{M}$ 3 por 3 com elementos 1, 2, ..., 9. Todas as linhas, colunas e diagonais devem somar 15. A primeira linha pode ser 8, 3, 4. Quanto é M vezes (1, 1, 1)? Quanto é o vetor-linha $[1 \quad 1 \quad 1]$ vezes M?

60. Os comandos do MATLAB A = eye(3) e v = [3:5]' produzem a matriz identidade 3 por 3 e o vetor-coluna (3, 4, 5). Quais são os resultados de A * v e v' * v? (Não é necessário utilizar o computador!) Se você tentar calcular v * A, o que acontece?

61. Se você multiplicar a matriz 4 por 4 composta apenas por 1 A = ones(4,4) e a coluna v = ones(4,1), quanto será A * v? (Não é necessário utilizar o computador!) Se você multiplicar B = eye(4) + ones (4,4) vezes w = zeros(4,1) + 2 * ones(4,1), quanto será B * w?