

Forças internas

Objetivos da aula:

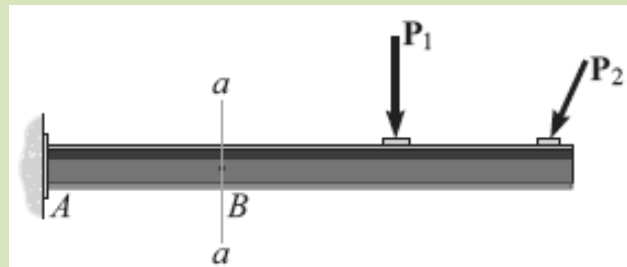
- Mostrar como usar o método de seções para **determinar as cargas internas** em um membro.
- Generalizar esse procedimento formulando equações que podem ser representadas de modo que descrevam o **cisalhamento e o momento interno** ao longo de um membro.

Forças internas desenvolvidas em membros estruturais

Para projetar um membro estrutural ou mecânico, **é preciso conhecer a carga atuando dentro do membro**, a fim de garantir que o material possa resistir a essa carga.

As cargas internas podem ser determinadas usando **o método das seções**.

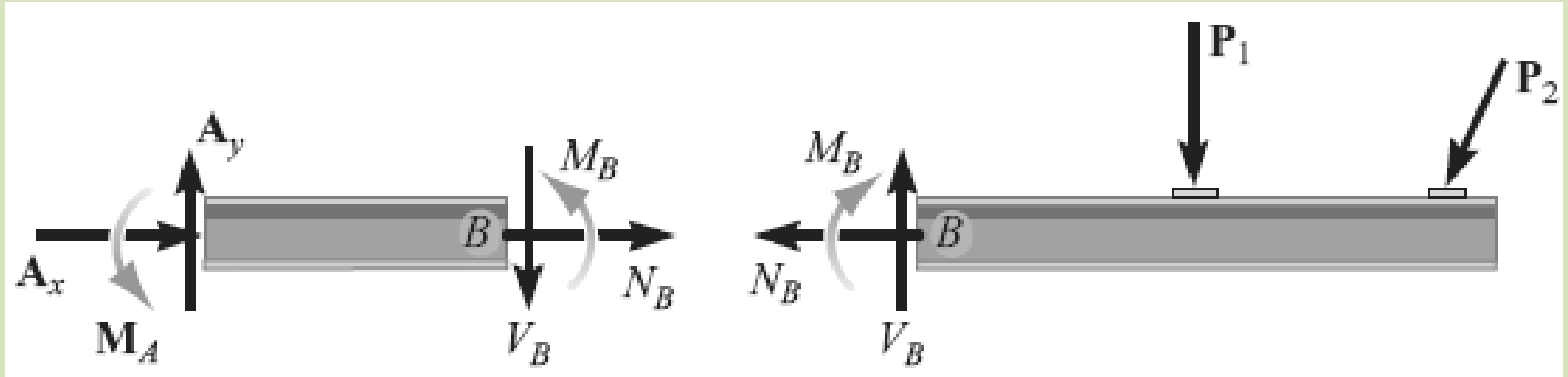
Como exemplo, considere a viga na figura abaixo. **Quais as forças internas que atuam na seção a-a em B?**



Ao seccionar a viga em a-a, as cargas internas que atuam em B serão expostas e se tornarão externas no diagrama de corpo livre de cada segmento.

Forças internas desenvolvidas em membros estruturais

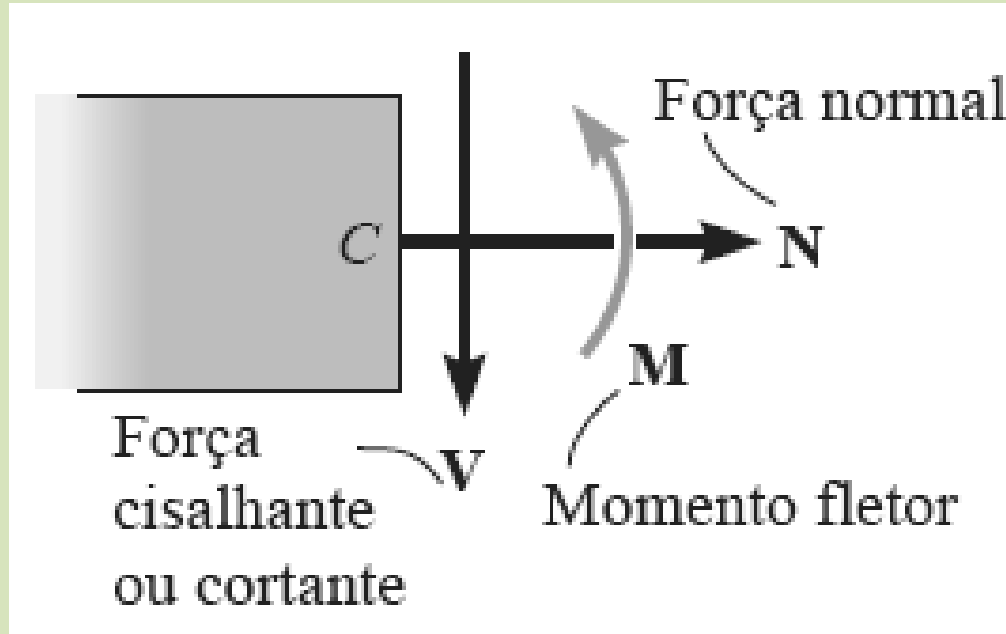
De acordo com a **terceira lei de Newton**, essas cargas devem atuar em **direções opostas em cada segmento**, conforme mostra a figura abaixo:



Aqui as direções foram escolhidas **aleatoriamente**. A verdadeira direção deve sair das condições de equilíbrio $\Sigma F_x=0$ $\Sigma F_y=0$ e $\Sigma M_B=0$

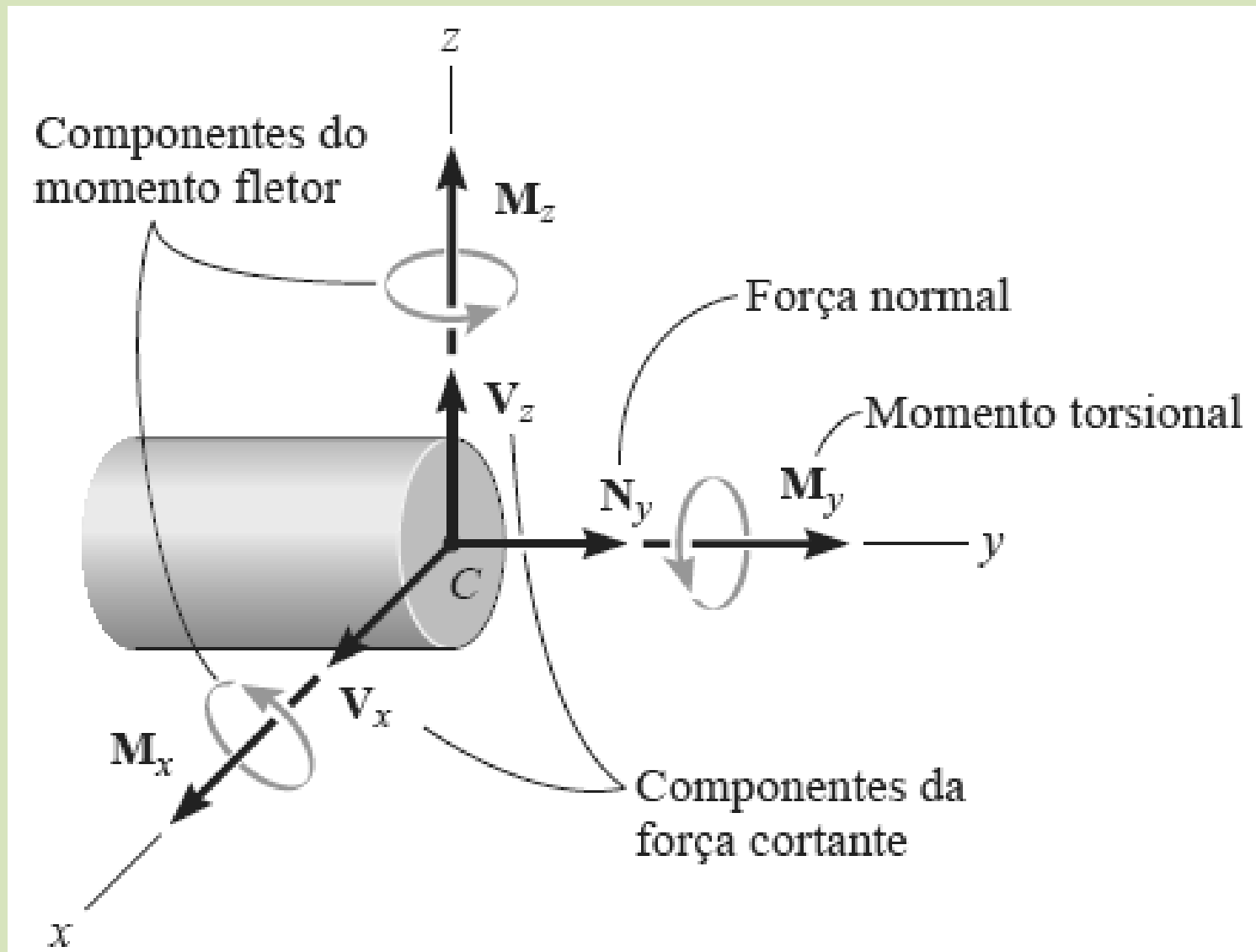
Forças internas desenvolvidas em membros estruturais

Em duas dimensões, **existem três resultantes de carga internas:**



Forças internas desenvolvidas em membros estruturais

Em 3D essas cargas aparecem na figura abaixo:



Procedimentos para análise

Reações de suporte

- Antes que o membro seja seccionado, pode ser preciso primeiro determinar suas **reações de apoio**, de modo que as equações de equilíbrio possam ser utilizadas para solucionar as cargas internas somente depois que o membro for seccionado.

Procedimentos para análise

Diagrama de corpo livre

- Mantenha todas as cargas distribuídas, momentos e forças que atuam sobre o membro em seus **locais exatos**, depois passe um **corte imaginário** pelo membro, perpendicular ao seu eixo, no ponto onde as cargas internas devem ser determinadas.
- Depois que o corte foi feito, desenhe um **diagrama de corpo livre** do segmento que tem o menor número de cargas sobre ele e indique as componentes das resultantes da força e do momento de binário na seção transversal, conforme a convenção de sinal estabelecida.

Procedimentos para análise

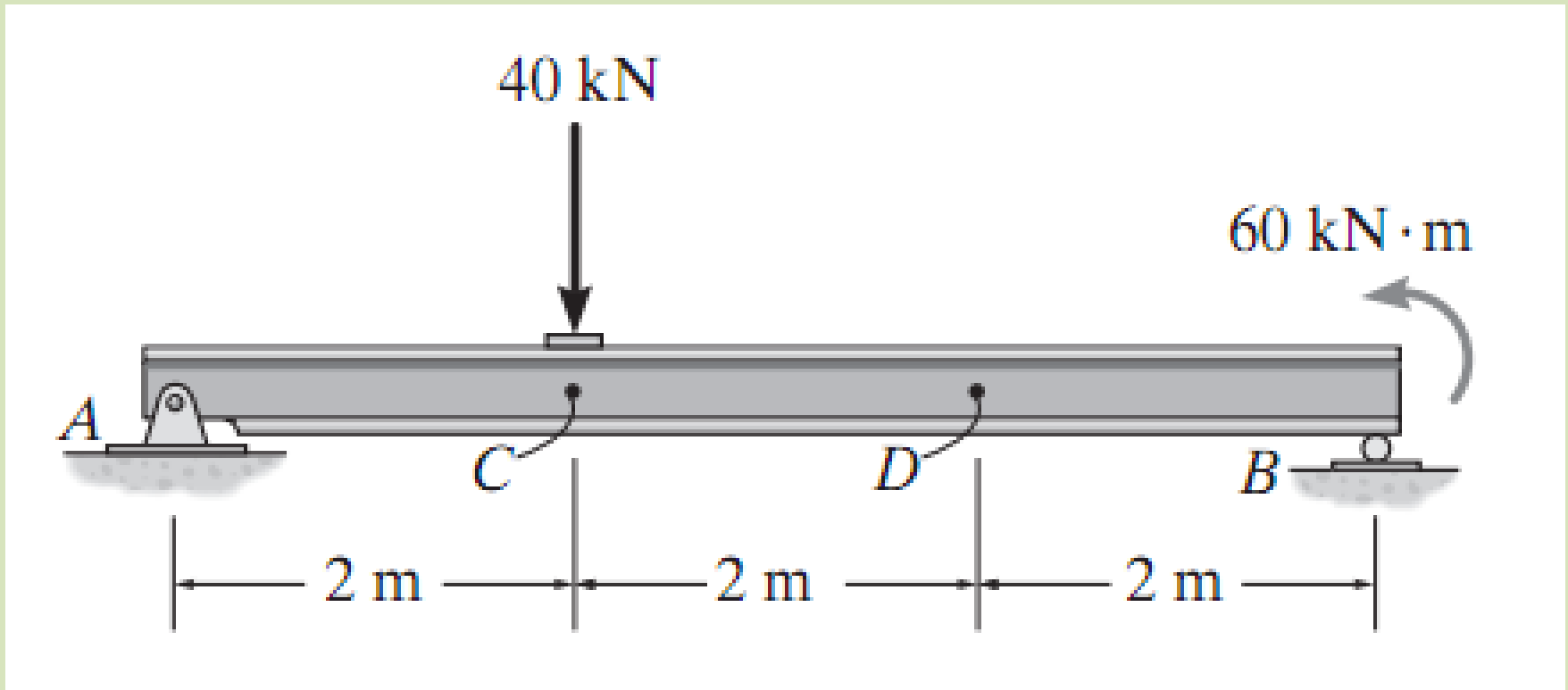
Equações de equilíbrio

- Os **momentos devem ser somados na secção**. Desse modo, os momentos das forças normal e cortante na secção são eliminados, e podemos obter uma solução direta para o momento.
- Se a solução das equações de equilíbrio geram um escalar negativo, o **sentido dessa quantidade é oposto** ao que é mostrado no diagrama de corpo livre.

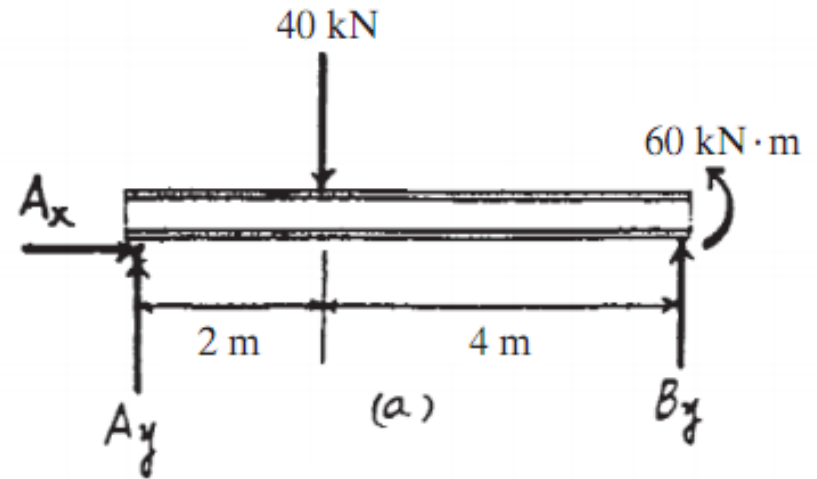
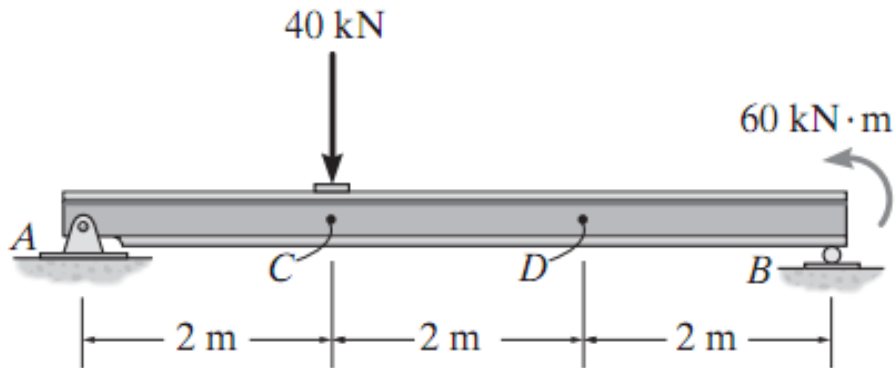
Vamos ver um exemplo

Exemplo 1 (7.1)

Determine a força normal, o esforço cortante interno e o momento fletor nos pontos C e D da viga. Assuma que o apoio em B seja um rolete. O ponto C está localizado logo à direita da carga de 40 kN



Exemplo 1



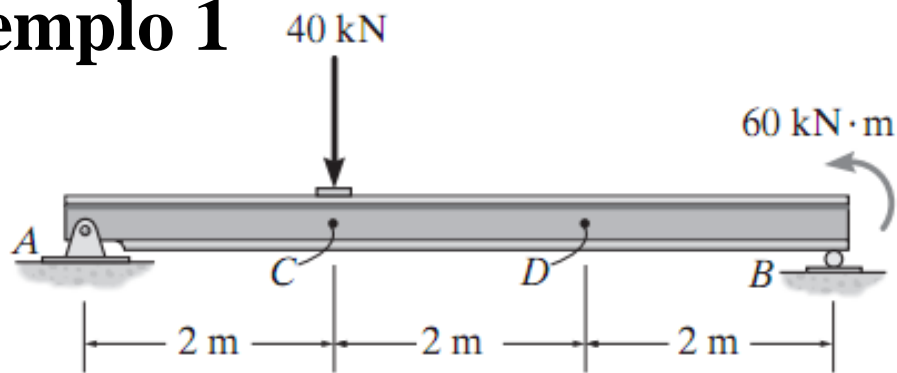
Calculamos as reações de apoio

$$\curvearrowright + \sum M_A = 0; \quad B_y (6) + 60 - 40 (2) = 0 \quad B_y = 3.333 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad A_y + 3.333 - 40 = 0 \quad A_y = 36.667 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad A_x = 0$$

Exemplo 1



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad N_C = 0 \quad \text{Ans}$$

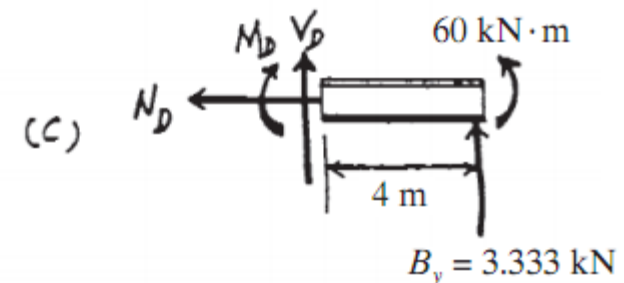
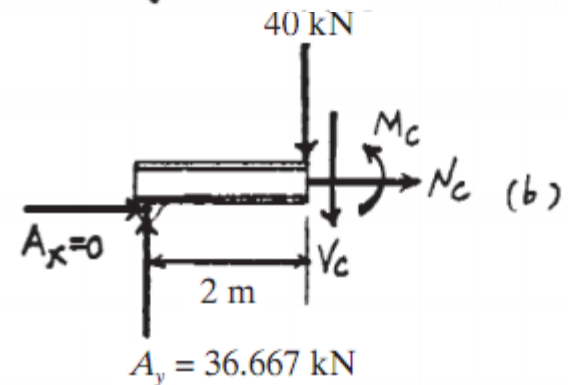
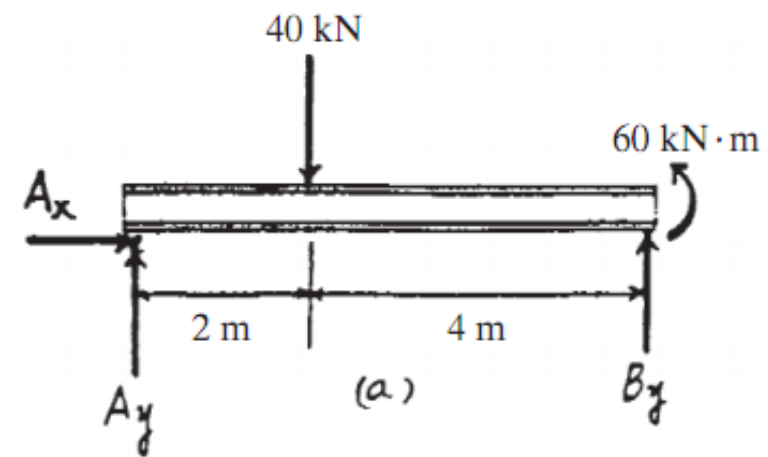
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 36.667 - 40 - V_C = 0 \quad V_C = -3.333 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$(+\Sigma M_C = 0; \quad M_C - 36.667(2) = 0 \quad M_C = 73.33 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad N_D = 0 \quad \text{Ans}$$

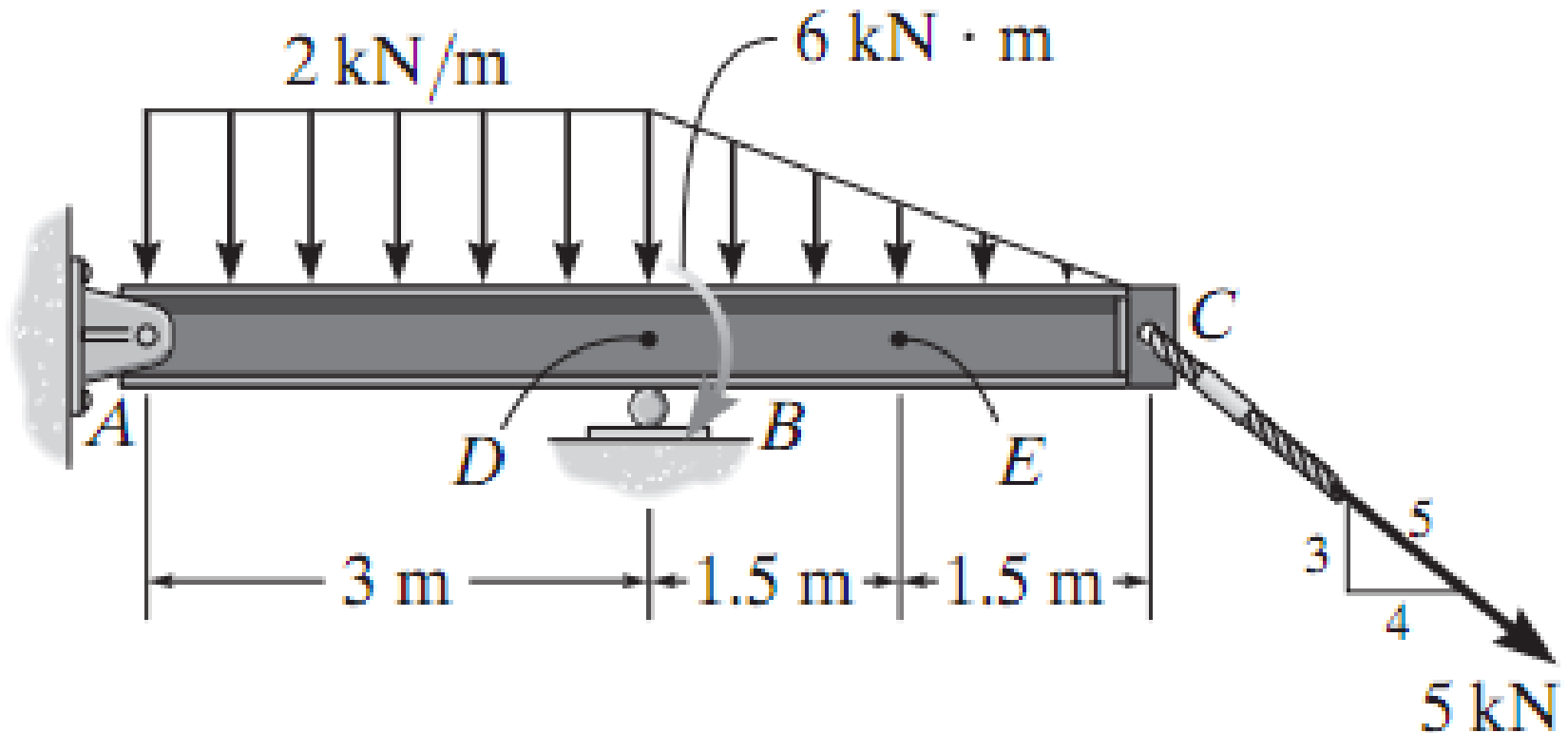
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_D + 3.333 = 0 \quad V_D = -3.333 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$(+\Sigma M_D = 0; \quad 3.333(2) + 60 - M_D = 0 \quad M_D = 66.67 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans}$$

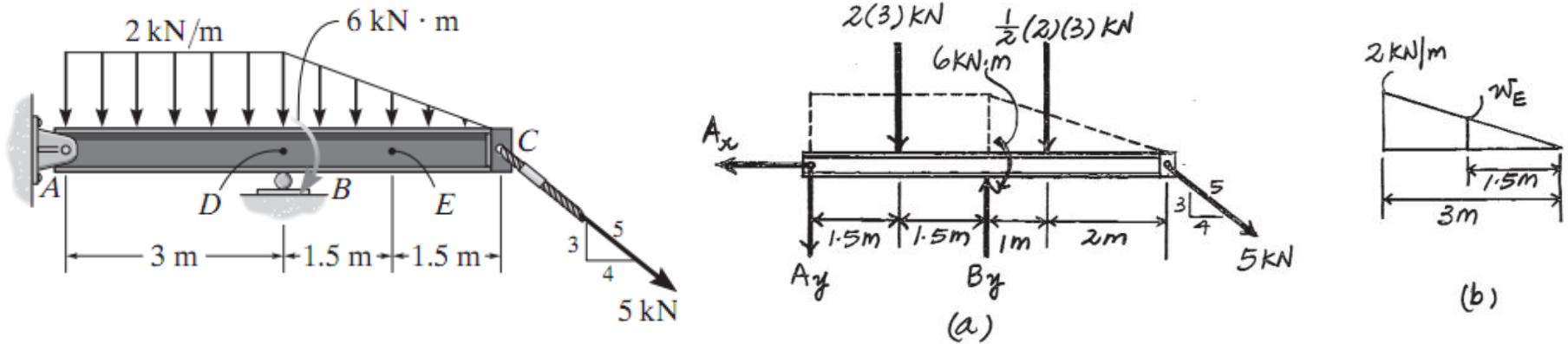


Exemplo 2 (7.18)

Determine a **força normal**, o **esforço cortante** e o **momento fletor** nos pontos D e E da viga. O ponto D está localizado à esquerda do suporte de rolete em B, onde o momento de binário atua.



Exemplo 2

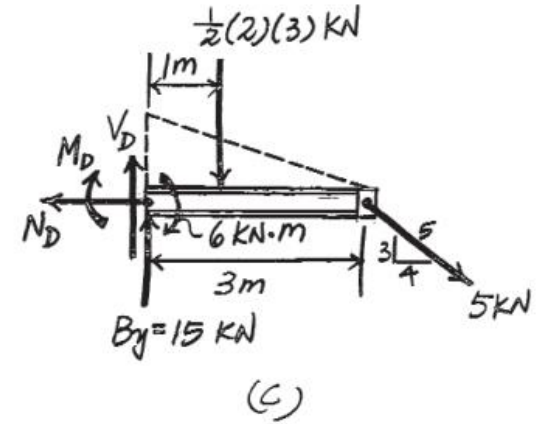
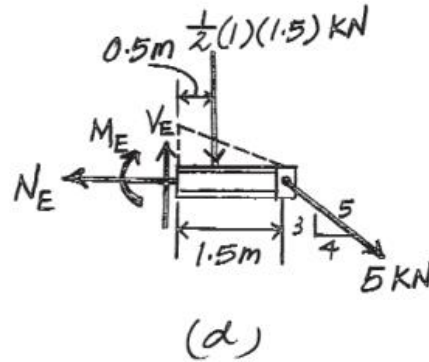
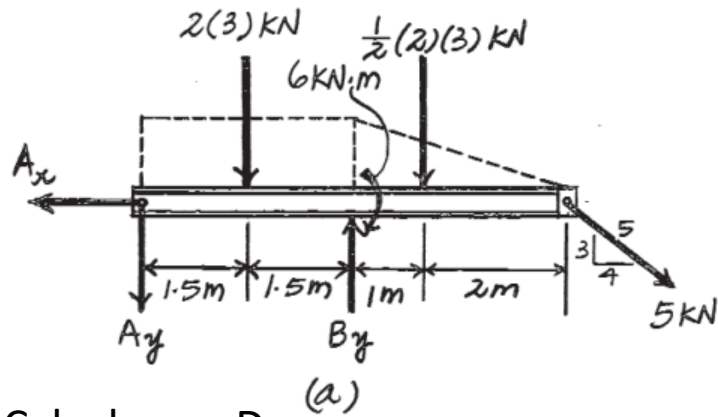


Calculamos a reação do apoio em B

$$\zeta + \sum M_A = 0; \quad B_y (3) - 2(3)(1.5) - 6 - \frac{1}{2}(2)(3)(4) - 5\left(\frac{3}{5}\right)(6) = 0$$

$$B_y = 15 \text{ kN}$$

Exemplo 2



Calculamos D

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 5 \left(\frac{4}{5} \right) - N_D = 0$$

$$N_D = 4 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_D + 15 - \frac{1}{2} (2)(3) - 5 \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$

$$V_D = -9 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$\curvearrow + \Sigma M_D = 0; \quad -M_D - 6 - \frac{1}{2} (2)(3)(1) - 5 \left(\frac{3}{5} \right) (3) = 0$$

$$M_D = 18 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans}$$

Calculamos E

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 5 \left(\frac{4}{5} \right) - N_E = 0$$

$$N_E = 4 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_E - \frac{1}{2} (1)(1.5) - 5 \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$

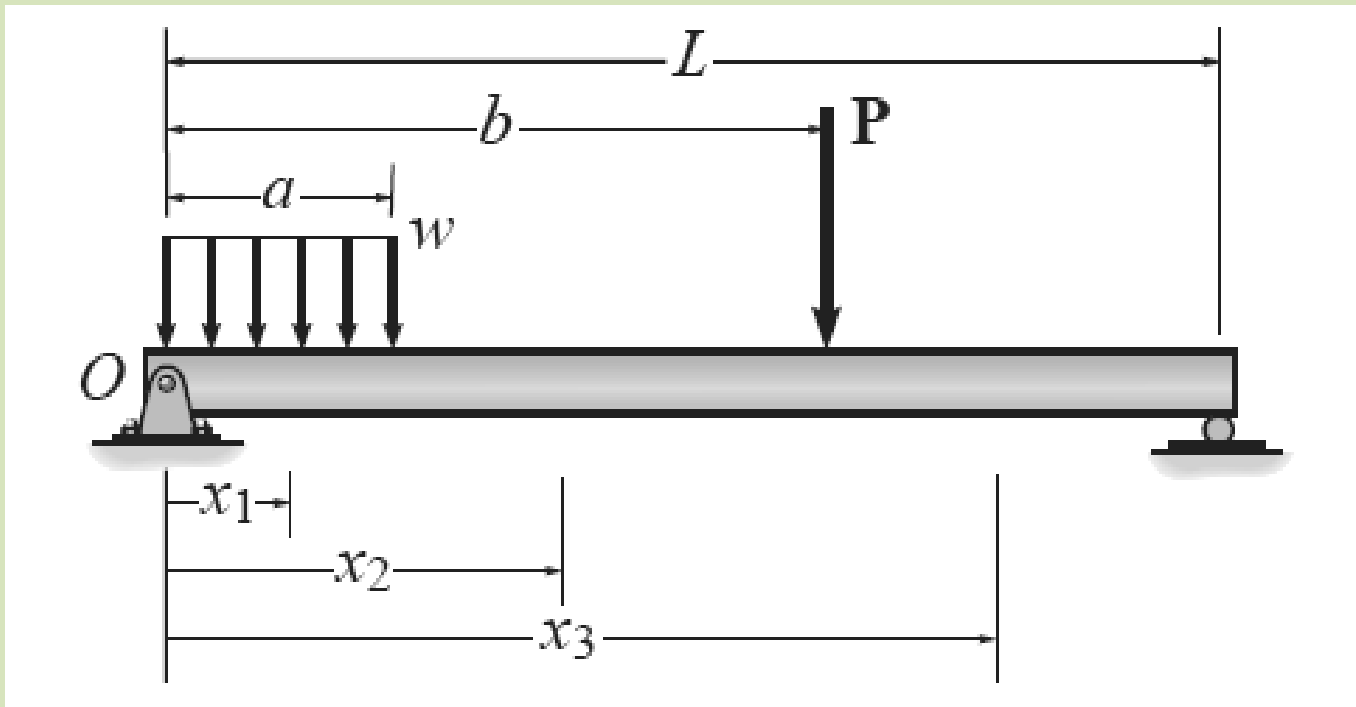
$$V_E = 3.75 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$\curvearrow + \Sigma M_E = 0; \quad -M_E - \frac{1}{2} (1)(1.5)(0.5) - 5 \left(\frac{3}{5} \right) (1.5) = 0$$

$$M_E = -4.875 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans}$$

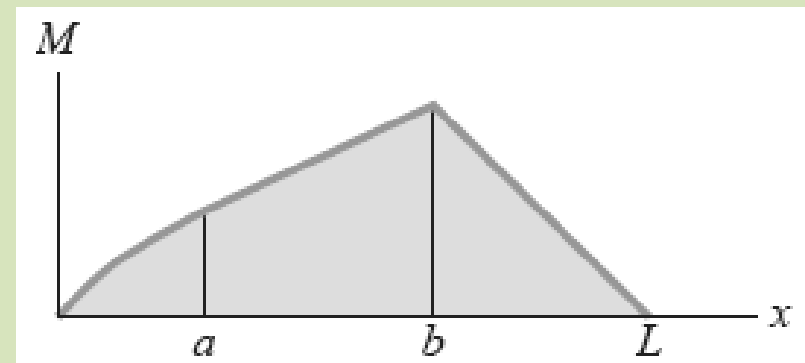
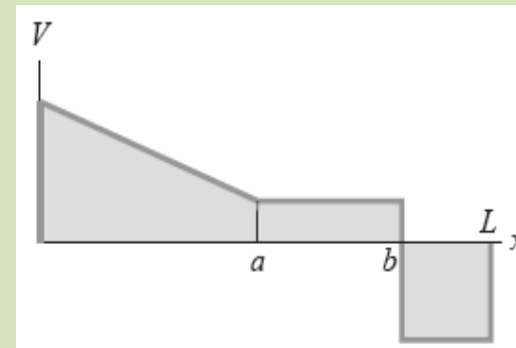
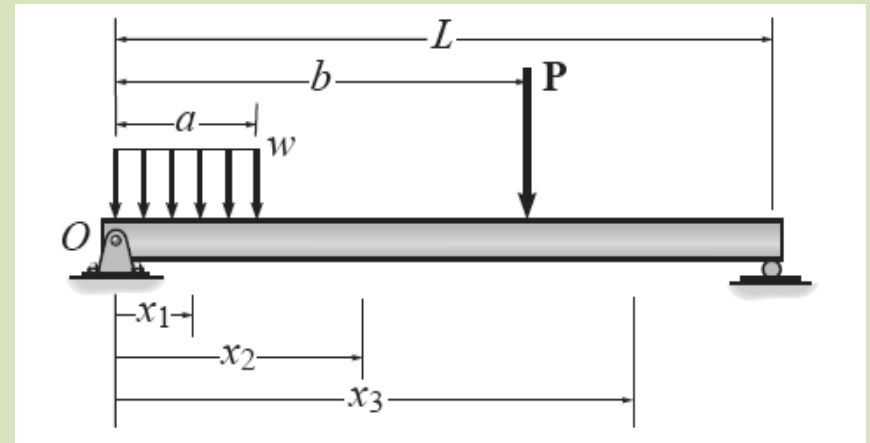
Equações e **diagramas** de esforço cortante e momento fletor

Por exemplo, vamos supor a viga simplesmente apoiada com um pino em uma extremidade e com um rolete na outra:



Equações e diagramas de esforço cortante e momento fletor

As funções de esforço cortante e momento fletor podem ser desenhadas para todas as regiões da viga. Se as funções resultantes forem desenhadas em função de x , os gráficos serão chamados de diagrama de esforço cortante e diagrama de momento fletor:



Procedimentos para análise

- **Determine todas as forças** reativas e momentos de binário que atuam sobre a viga **e decomponha** todas as forças em componentes que atuam perpendicularmente e paralelamente aos eixo da viga.
- **Especifique as coordenadas de x (pontos críticos)** para as regiões da viga que se encontram entre forças concentradas e/ou momentos de binário, ou onde a carga distribuída é contínua.
- **Seccione a viga em cada distância x** e desenhe o diagrama de corpo livre de um dos segmentos. Cuide para que V e M apareçam atuando em seu sentido positivo, de acordo com a convenção de sinal.

Procedimentos para análise

Funções de **esforço cortante e momento**

- O **esforço cortante** V é obtido somando-se as forças perpendiculares ao eixo da viga.
- O **momento** M é obtido somando-se os momentos em relação a extremidade seccionada do segmento.

Procedimentos para análise

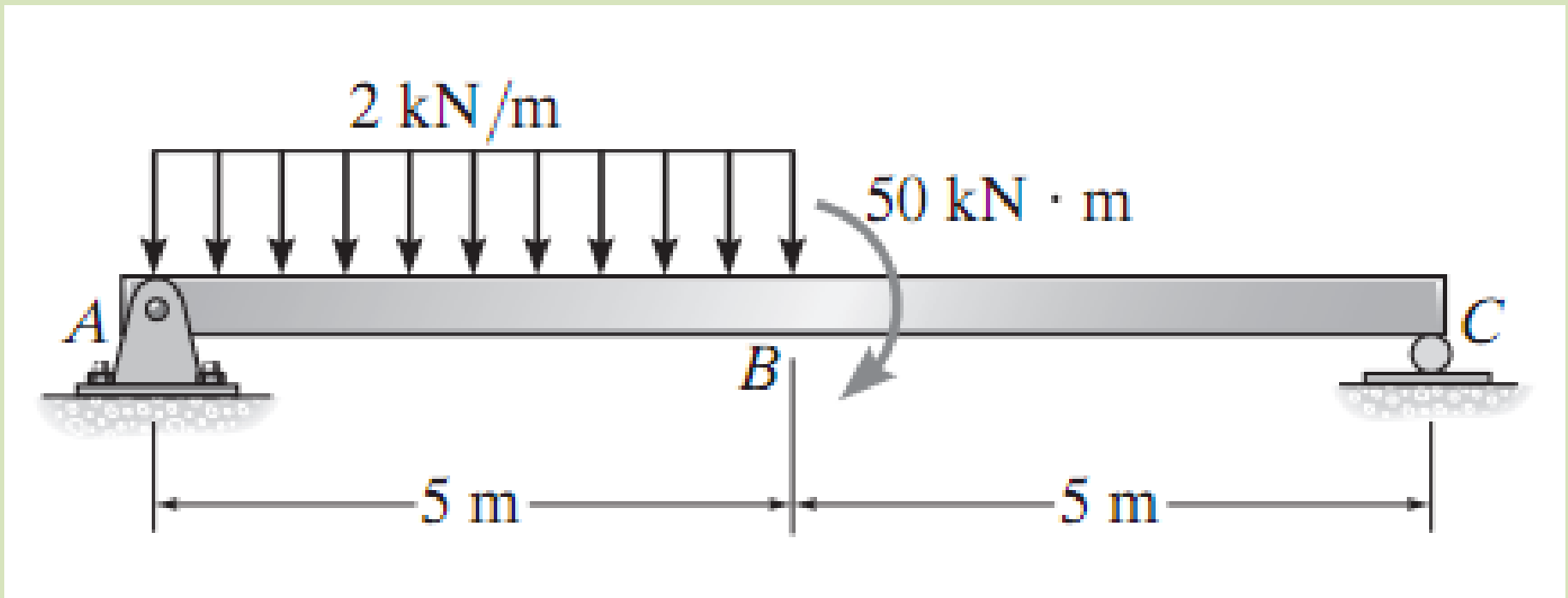
Diagramas de **esforço cortante e momento fletor**

- **Desenhe o diagrama do esforço cortante (V versus x) e o diagrama de momento (M versus x).** Se os valores calculados das funções descrevendo V e M forem positivos, os valores são desenhados acima do eixo x , enquanto valores negativos são desenhados abaixo do eixo x .
- Geralmente, é conveniente fazer os gráficos dos diagramas de esforço cortante e momento fletor diretamente abaixo do diagrama de corpo livre da viga.

Vamos ver um exemplo:

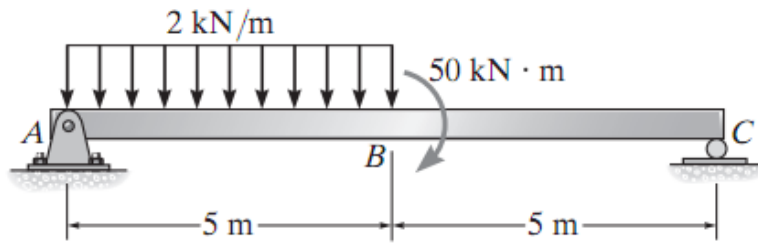
Exemplo 3 (7.49)

Determine os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga.



Primeiro calcule as reações nos apoios

Exemplo 3



$0 \leq x < 5 \text{ m}$:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2.5 - 2x - V = 0$$

$$V = 2.5 - 2x$$

$$(+\Sigma M = 0; \quad M + 2x \left(\frac{1}{2} x \right) - 2.5x = 0$$

$$M = 2.5x - x^2$$

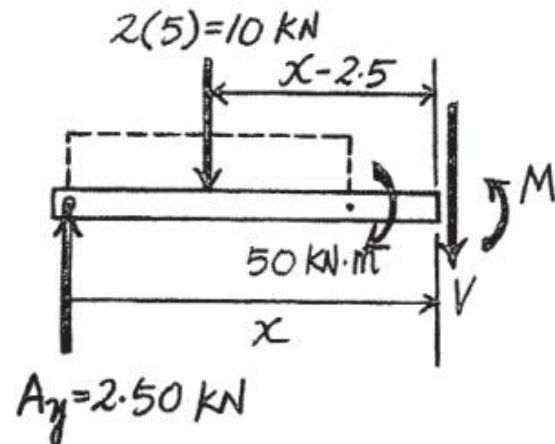
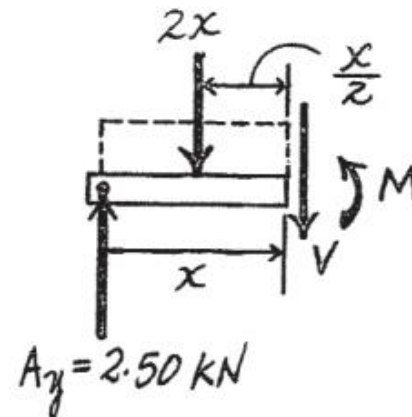
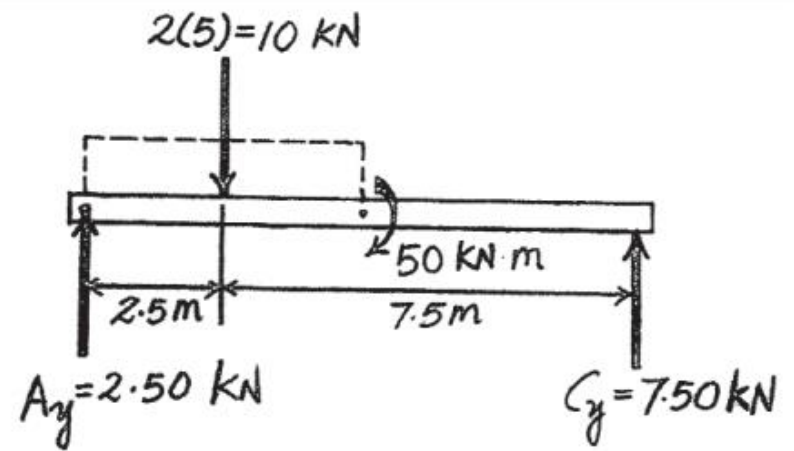
$5 \text{ m} < x < 10 \text{ m}$:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2.5 - 10 - V = 0$$

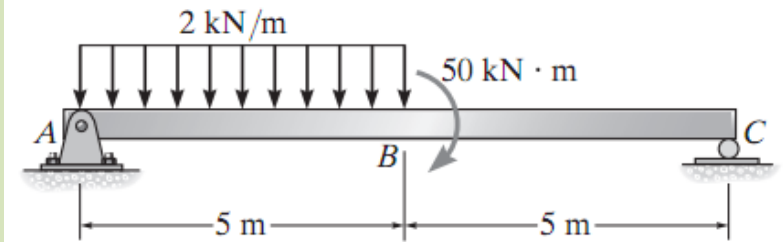
$$V = -7.5$$

$$(+\Sigma M = 0; \quad M + 10(x - 2.5) - 2.5x - 50 = 0$$

$$M = -7.5x + 75$$



Exemplo 3



$0 \leq x < 5$ m:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2.5 - 2x - V = 0$$

$$V = 2.5 - 2x$$

$$(+\Sigma M = 0; \quad M + 2x \left(\frac{1}{2} x \right) - 2.5x = 0$$

$$M = 2.5x - x^2$$

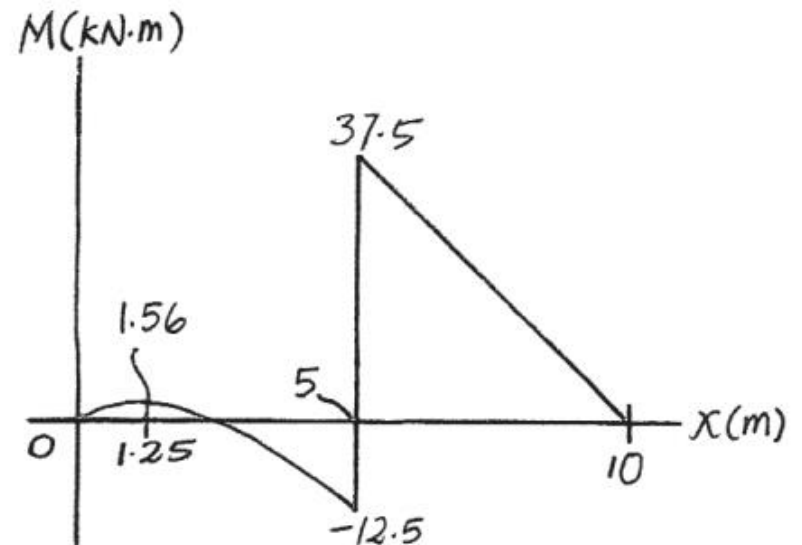
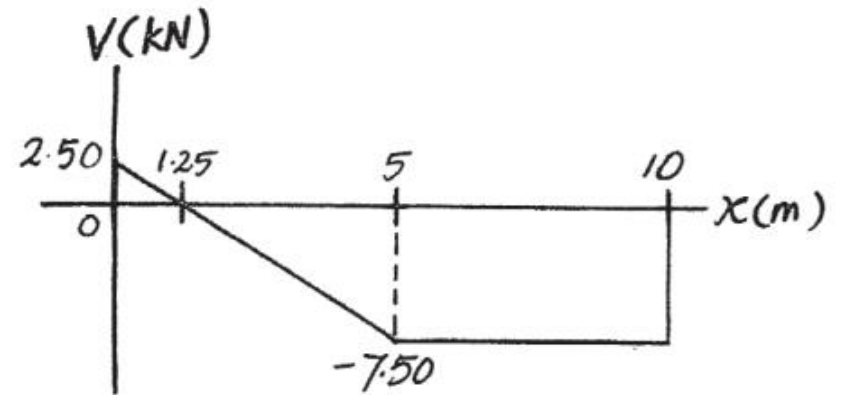
$5 \text{ m} < x < 10$ m:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2.5 - 10 - V = 0$$

$$V = -7.5$$

$$(+\Sigma M = 0; \quad M + 10(x - 2.5) - 2.5x - 50 = 0$$

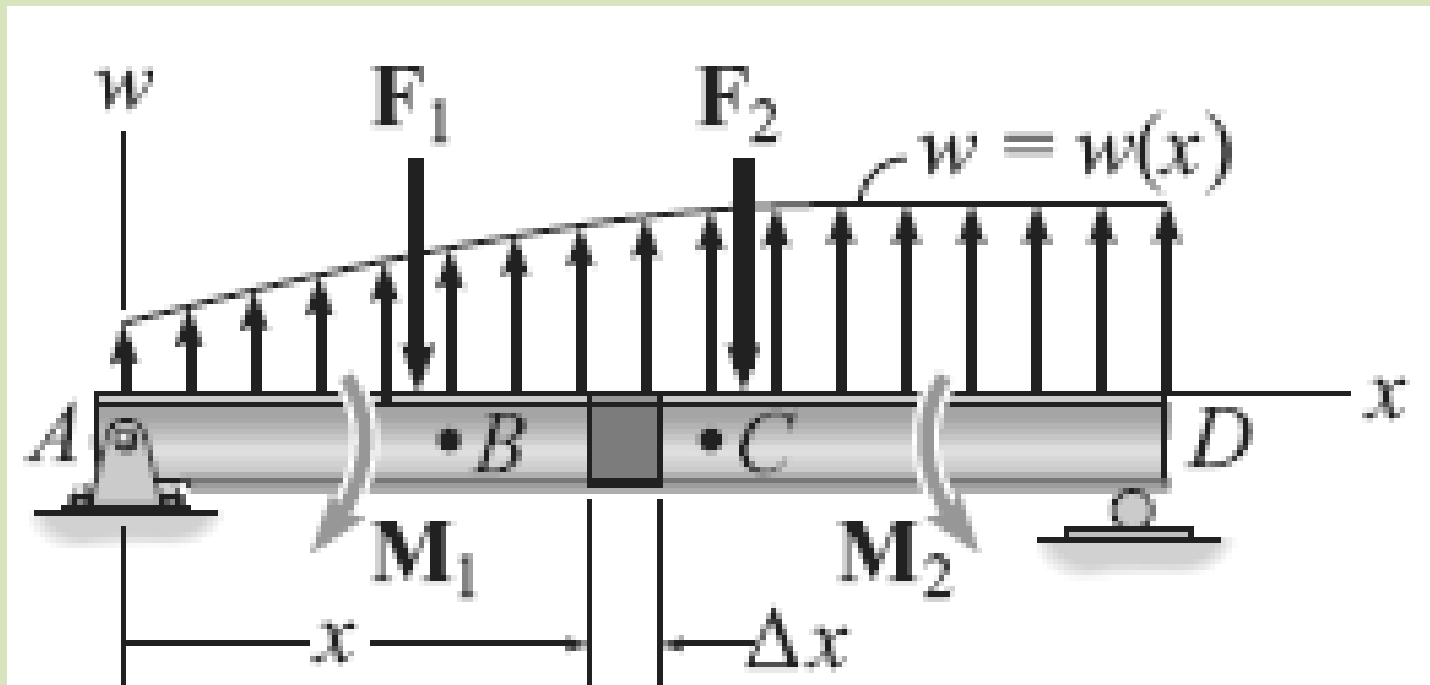
$$M = -7.5x + 75$$



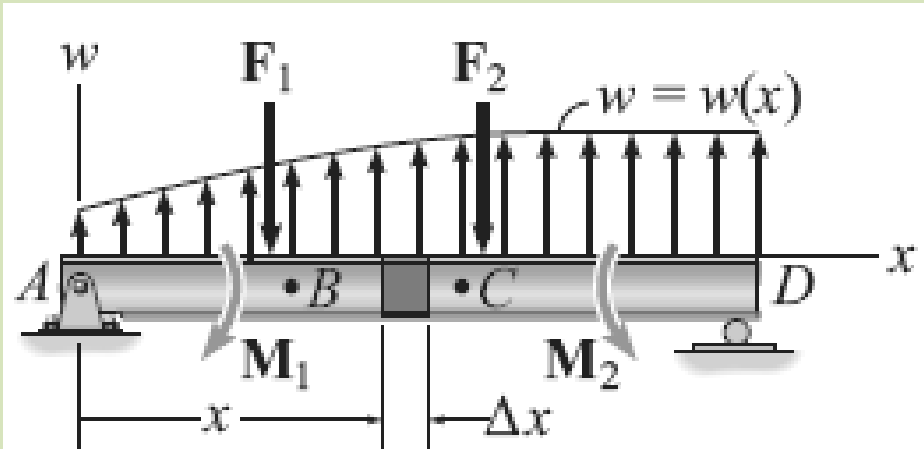
Relações entre carga distribuída, esforço cortante e momento fletor

Carga distribuída

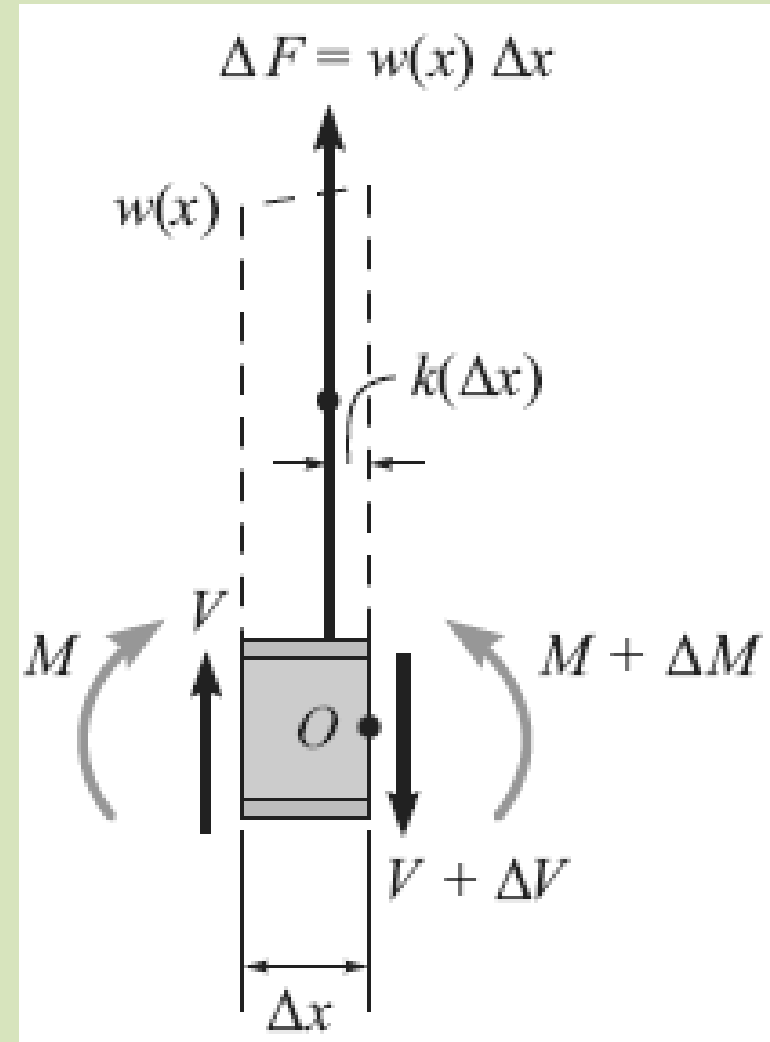
Considere a viga AD mostrada na figura a seguir:



Relações entre carga distribuída, esforço cortante e momento fletor



Um diagrama de corpo livre para um **pequeno segmento da viga Δx** escolhido em um ponto x ao longo da viga, que não está sujeito a uma força concentrada.



Relações entre carga distribuída, esforço cortante e momento fletor

Consideramos que a força de esforço cortante e o momento fletor interno mostrados no diagrama de corpo livre atuam nos sentidos escolhidos.

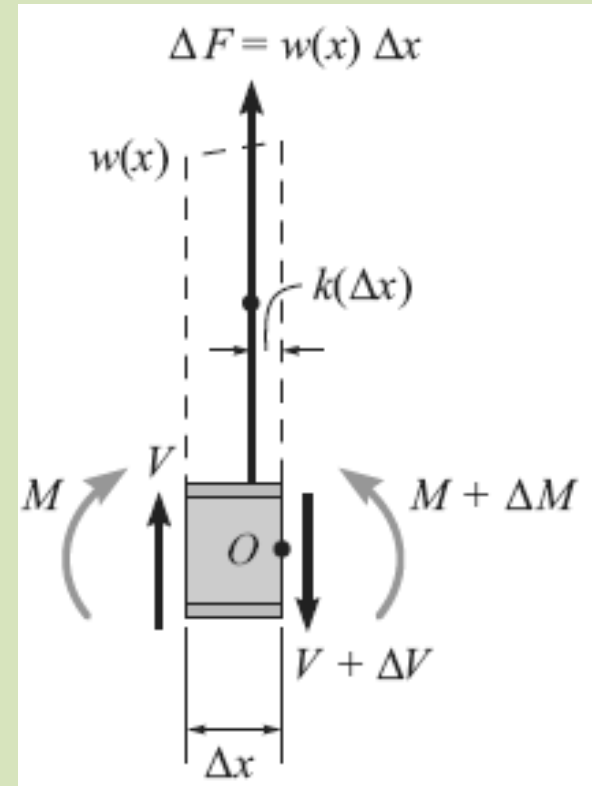
A carga distribuída foi substituída por uma força resultante $\Delta F = w(x) \Delta x$, que atua a uma distância fracionária $k(\Delta x)$ a partir da extremidade direita, onde $0 < k < 1$ [por exemplo, se $w(x)$ for uniforme, $k = 1/2$].

Aplicando as equações de equilíbrio:

$$\sum F_y = 0 \quad V + w(x)\Delta x - (V + \Delta V) = 0 \quad \Delta V = -w(x)\Delta x$$

$$\sum M_O = 0 \quad -V\Delta x - M - w(x)\Delta x (k(\Delta x)) + (M + \Delta M) = 0$$

$$\Delta M = V\Delta x + w(x)k(\Delta x)^2$$



Relação entre a carga distribuída e o esforço cortante

$$\frac{dV}{dx} = -w(x)$$

Inclinação do
diagrama de
esforço cortante = Intensidade da
carga distribuída

Se reescrevermos a equação acima na forma $dV = -w(x)dx$ e realizarmos a integração entre dois pontos quaisquer B e C na viga, veremos que:

$$\Delta V = -\int w(x)dx$$

Varição no
esforço cortante = Área sob a curva
de carregamento

Relação entre esforço cortante e momento

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Inclinação do diagrama
de momento fletor = Esforço cortante

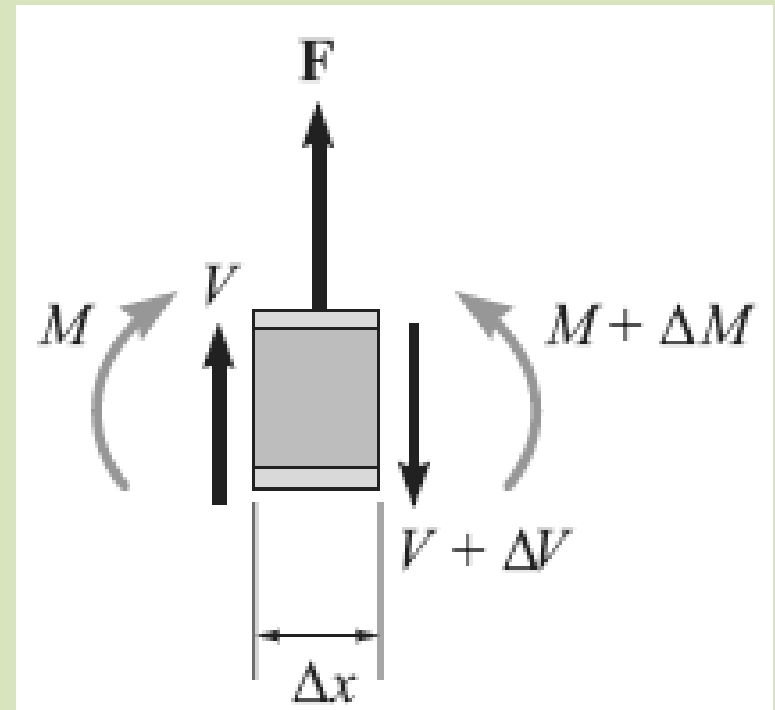
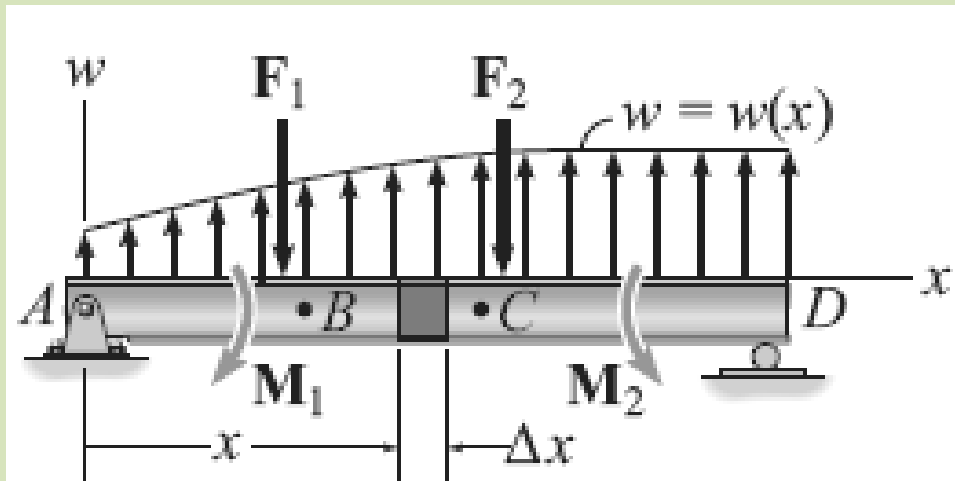
Se essa equação for reescrita na forma $dM = \int V dx$ e integrada entre dois pontos B e C quaisquer na viga, temos:

$$\Delta M = \int V dx$$

Variação no
momento fletor = Área sob o diagrama
de esforço cortante

Forças e momentos concentrados

O diagrama de corpo livre de um segmento pequeno da viga **tomado sob uma das forças**, é mostrado na figura seguinte:

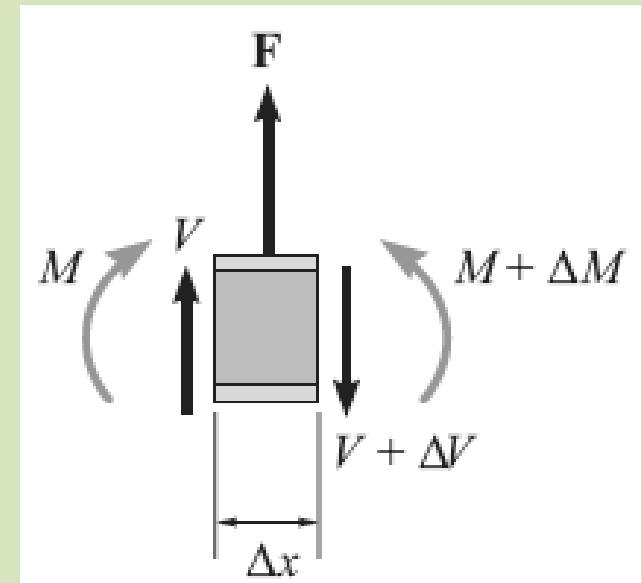
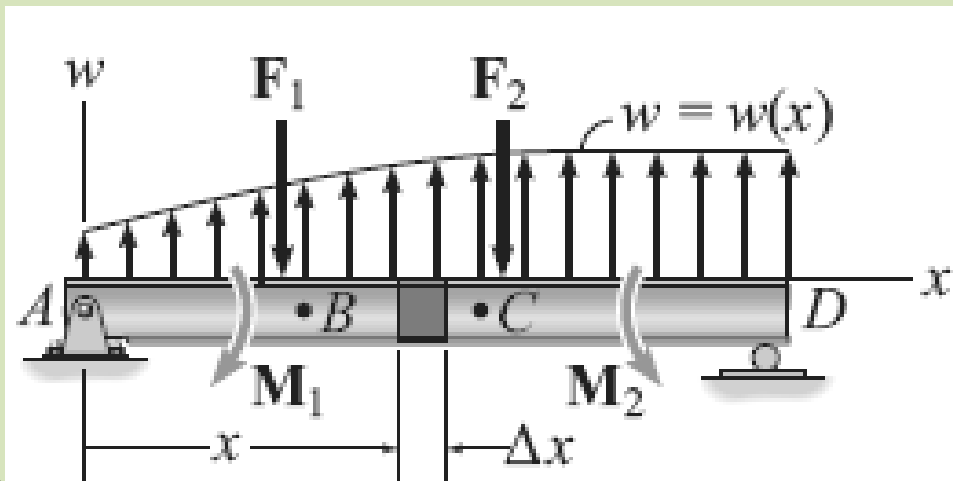


Forças e momentos concentrados

Aqui, o equilíbrio de forças requer:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \Delta V = -F$$

Como a variação no esforço cortante é negativa, o diagrama de esforço cortante “saltará” para baixo quando F atuar para baixo na viga. De modo semelhante, o salto no esforço cortante (ΔV) é para cima quando F atua para cima. (pois considera negativo para baixo e o desenha como positivo)

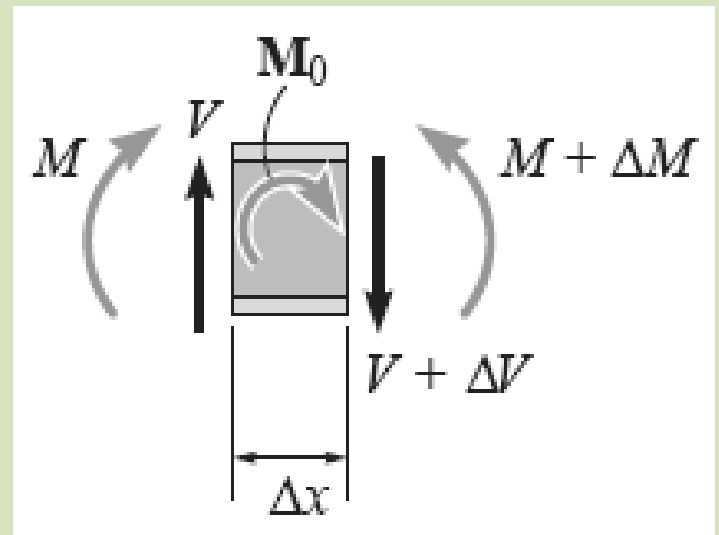


Forças e momentos concentrados

Si tivermos um binário M_0 no elemento estudado, considerando que se $\Delta x \rightarrow 0$, o equilíbrio do momento requer:

$$\curvearrowright +\sum M = 0; \quad \Delta M = M_0$$

Assim, a variação no momento ΔM é positiva, ou o diagrama do momento “saltará” para cima se M_0 estiver no sentido horário. De modo semelhante, o salto ΔM é para baixo quando M_0 está em sentido anti-horário.



Pontos importantes

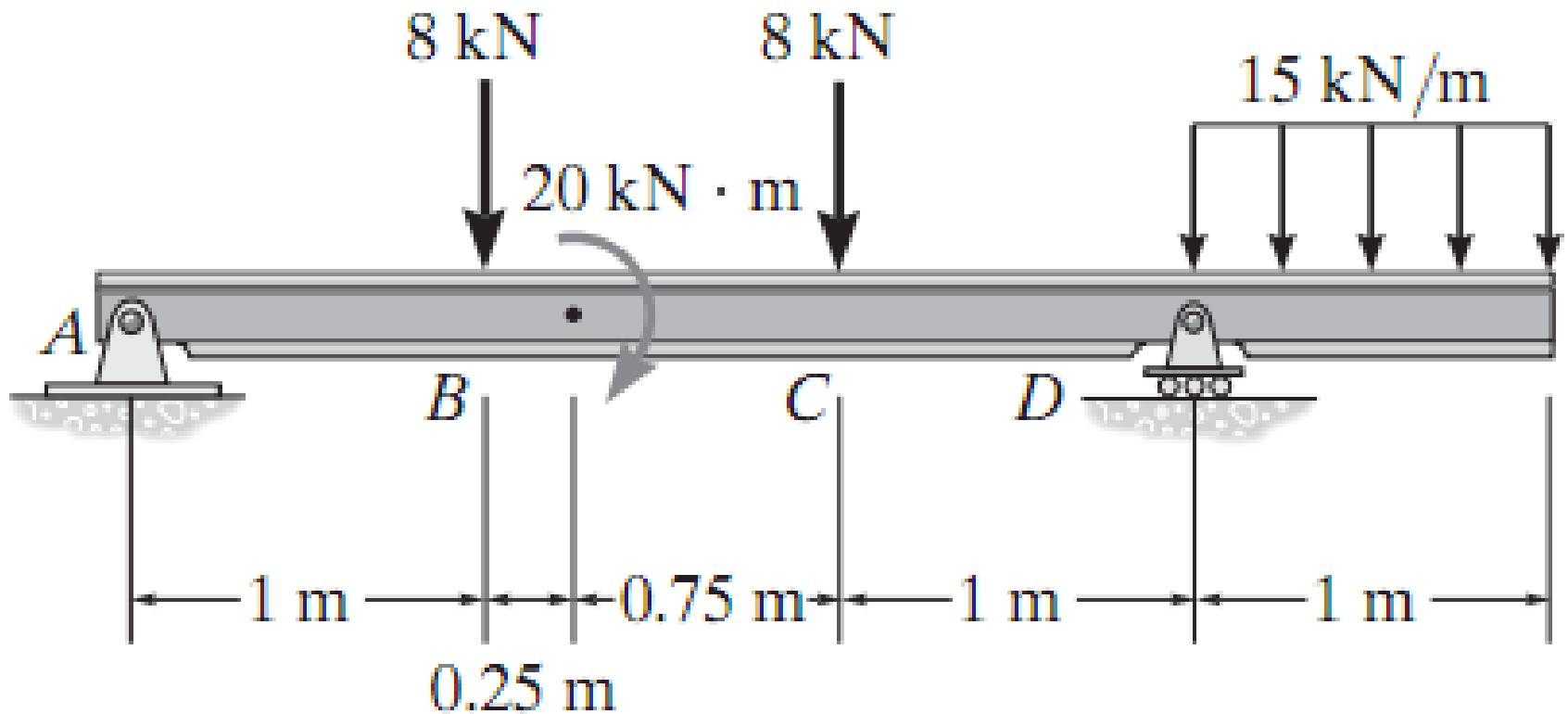
- A **inclinação** do diagrama de esforço cortante em um ponto é igual à o negativo intensidade da carga distribuída, ou seja, $dV/dx = -w(x)$.
- Se uma **força concentrada** atua para cima na viga, o esforço cortante saltará para cima pelo mesmo valor.
- A variação no esforço cortante ΔV entre dois pontos é igual à área sob a curva de carga distribuída entre os pontos. A **inclinação do diagrama de momento** em um ponto é igual ao esforço cortante, ou seja, $dM/dx = V$.
- A variação no momento ΔM entre dois pontos é igual à área sob o diagrama de esforço cortante entre os dois pontos.
- Se um momento de binário no sentido horário atuar sobre a viga, o esforço cortante não será afetado; porém, o diagrama de momento fletor saltará para cima com a mesma quantidade.

Pontos importantes

- Os pontos de **esforço cortante zero** representam os pontos de **momento fletor máximo ou mínimo**, pois $dM/dx = 0$.
- Como duas integrações de $w = w(x)$ são envolvidas para primeiro determinar a variação no esforço cortante, $\Delta V = \int w(x) dx$, em seguida, para determinar a variação no momento fletor, $\Delta M = \int V dx$, se a curva de carga $w = w(x)$ é um polinômio de grau n , **$V = V(x)$ será uma curva de grau $n + 1$ e $M = M(x)$ será uma curva de grau $n + 2$.**

Exemplo 4 (7.74)

Determine os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga.



Exemplo 4

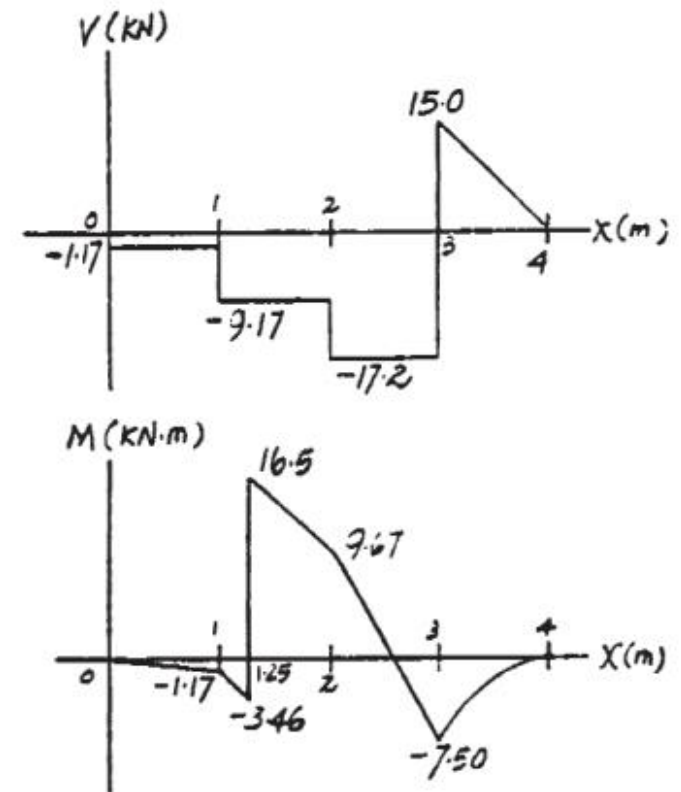
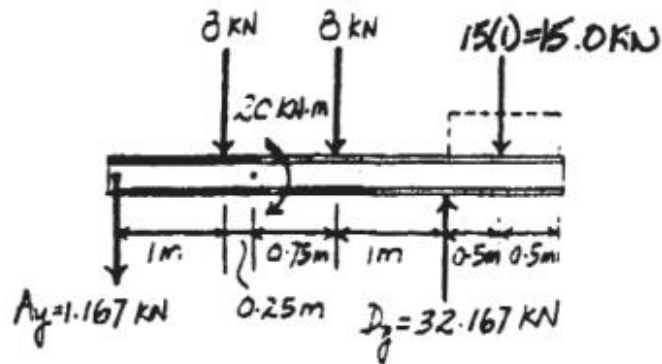
Support Reactions:

$$(+\Sigma M_A = 0; \quad D_y (3) - 8(1) - 8(2) - 15.0(3.5) - 20 = 0$$

$$D_y = 32.167 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 32.167 - 8 - 8 - 15.0 - A_y = 0$$

$$A_y = 1.167 \text{ kN}$$



Cabos

Cabos **flexíveis** e correntes:

- Combinam resistência com leveza.
- Frequentemente são usados em estruturas para suportar e transmitir cargas de um membro para outro.
- Quando usados para suportar pontes suspensas e carretilhas, os cabos formam o principal elemento de suporte de carga da estrutura.

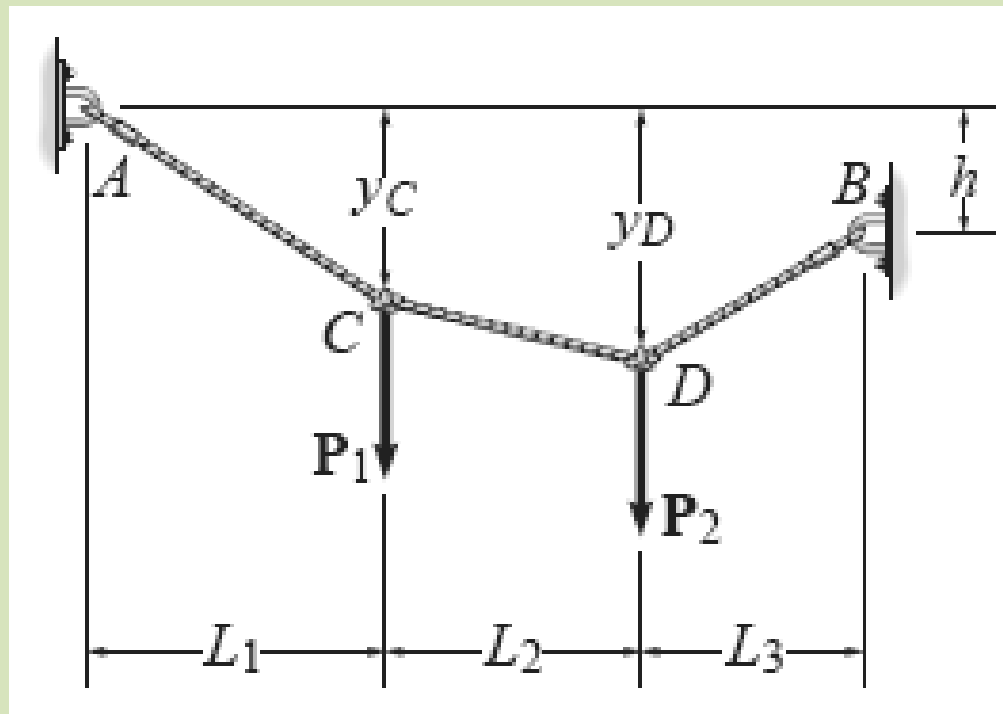
Cabos

Três casos serão considerados na análise a seguir:

- **Cabo sujeito a cargas concentradas**

Quando um cabo de peso desprezível suporta várias cargas concentradas, o cabo assume a forma de vários **segmentos de linha reta**, cada um sujeito a uma força de tração constante.

Considere, por exemplo, o cabo mostrado na figura abaixo:



Cabos

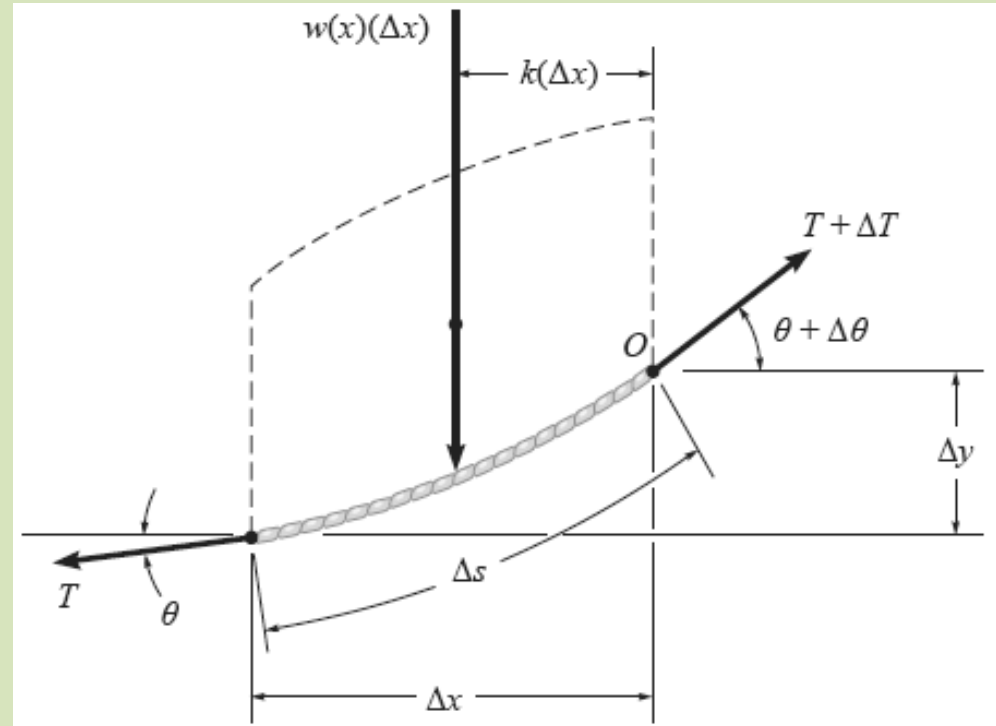
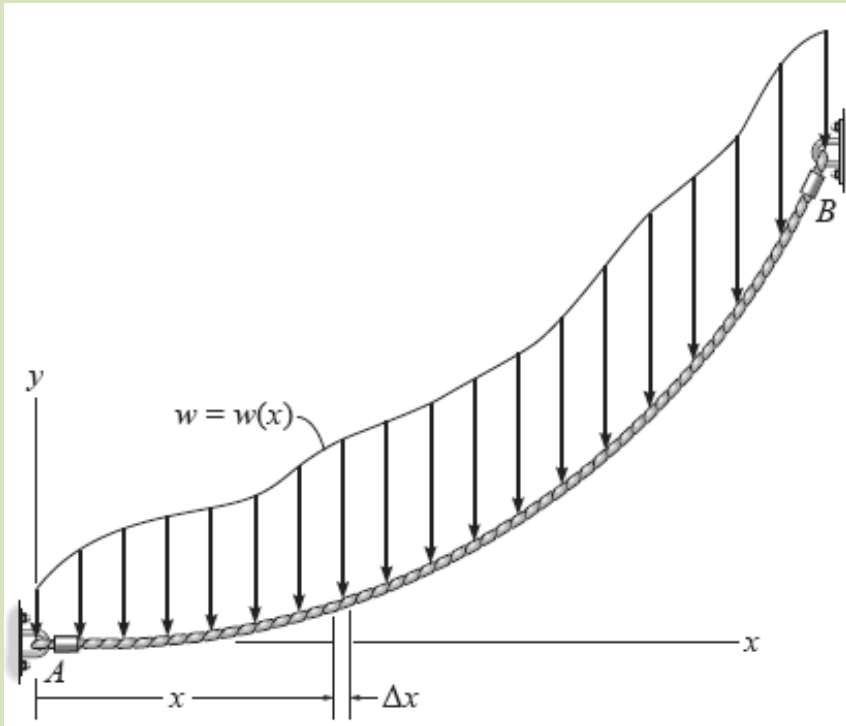
O problema é determinar as nove incógnitas consistindo na tração em cada um dos três segmentos, as quatro componentes da reação em A e B, e as duas quedas y_C e y_D nos pontos C e D. Para a solução, podemos escrever duas equações de equilíbrio de força em cada um dos pontos A, B, C e D. Isso resulta em um total de oito equações.

Outra possibilidade, porém, é especificar uma das flechas, seja y_C ou y_D , ao invés do comprimento do cabo. Fazendo isso, as equações de equilíbrio são então suficientes para obter as forças incógnitas e a flecha remanescente.

Vamos analisar o caso de um cabo sem peso

Cabo sujeito a uma carga distribuída

Vamos considerar o **cabo sem peso** mostrado na figura abaixo:

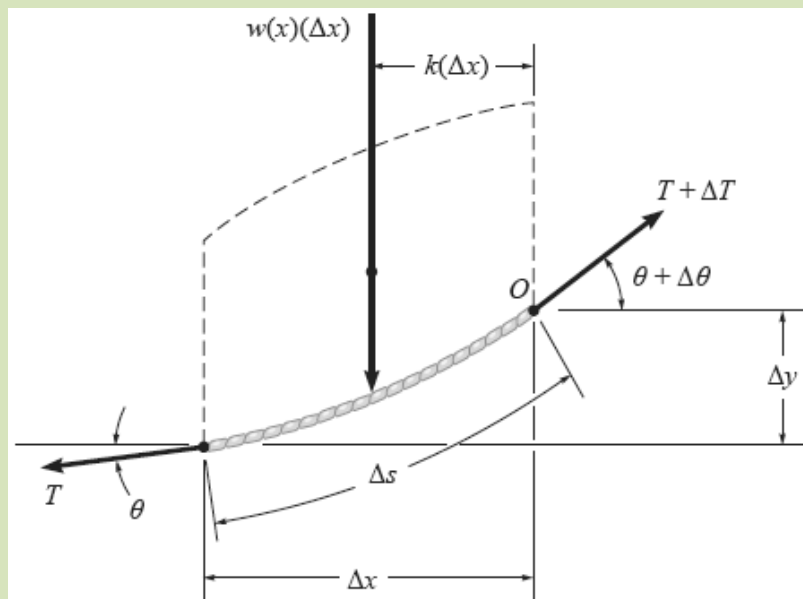


O **diagrama de corpo livre** de um segmento pequeno do cabo tendo um comprimento Δs é mostrado na figura acima

Cabo sujeito a uma carga distribuída

A carga distribuída é representada por sua **força resultante** $w(x)\Delta x$, que **atua** a uma distância fracionária $k(\Delta x)$ do ponto O , onde $0 < k < 1$. Aplicando as equações de equilíbrio, temos:

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= 0; & -T \cos \theta + (T + \Delta T) \cos(\theta + \Delta \theta) &= 0 \\ +\uparrow \sum F_y &= 0; & -T \sin \theta - w(x)(\Delta x) + (T + \Delta T) \sin(\theta + \Delta \theta) &= 0 \\ \curvearrowright +\sum M_O &= 0; & w(x)\Delta x k(\Delta x) - T \cos \theta \Delta y + T \sin \theta \Delta x &= 0 \end{aligned}$$



Dividindo cada uma dessas equações por Δx e tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, e, portanto, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta \theta \rightarrow 0$, $\Delta T \rightarrow 0$ obtemos:

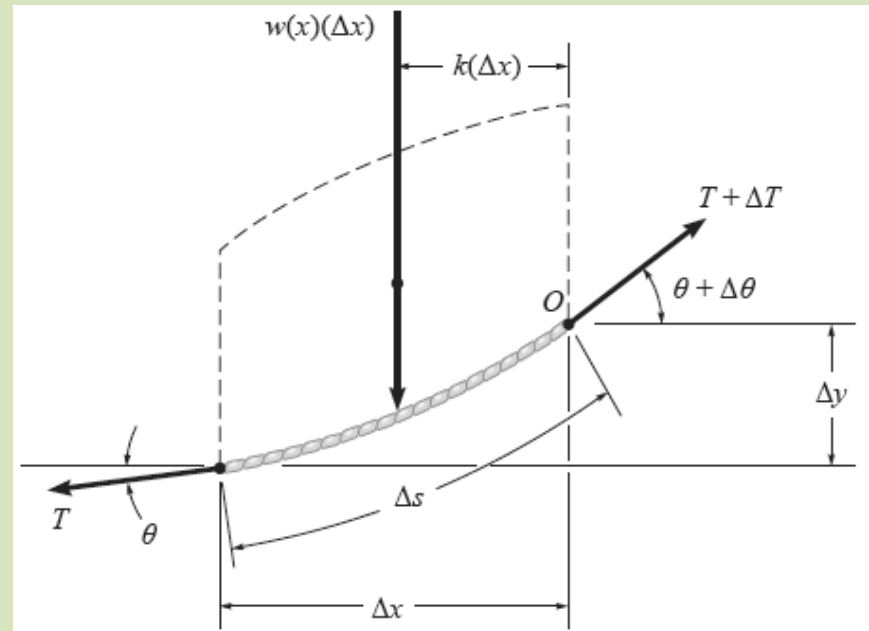
Cabo sujeito a uma carga distribuída

Dividindo cada uma dessas equações por Δx e fazendo o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, e, portanto, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta\theta \rightarrow 0$ e $\Delta T \rightarrow 0$, obtemos:

$$\frac{d(T \cos \theta)}{dx} = 0$$

$$\frac{d(T \sin \theta)}{dx} - w(x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta$$



Agora podemos obter as componentes da tensão T na corda!

Cabo sujeito a uma carga distribuída

Integrando a primeira equação, temos:

$$T \cos \theta = \text{constante} = F_H$$

A componente horizontal

Integrando a segunda equação, temos:

$$T \sin \theta = \int w(x) dx$$

A componente vertical

Cabo sujeito a uma carga distribuída

Dividindo a equação $T \operatorname{sen} \theta = \int w(x) dx$ pela equação

$T \cos \theta = \text{constante} = F_H$ **elimina T**. Então, usando a equação $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$ podemos obter a **inclinação do cabo**.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\int w(x) dx}{F_H}$$

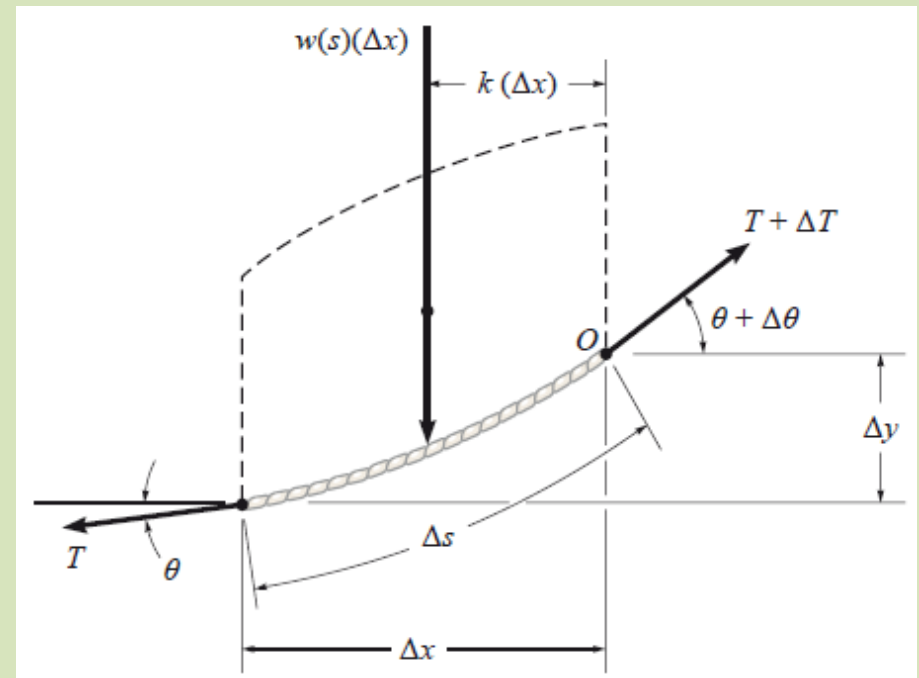
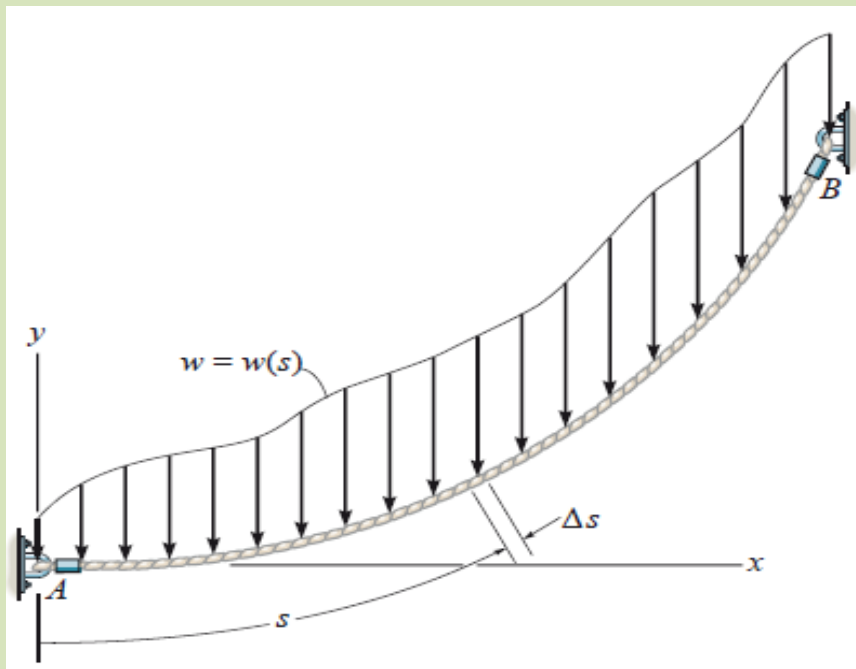
Realizando uma segunda integração, temos a função da curvatura da corda: $y=f(x)$

$$y = \frac{1}{F_H} \int \left(\int w(x) dx \right) dx$$

Cabos sujeitos ao seu **próprio peso**

Consideraremos a função de carga generalizada $w = w(s)$ (*peso como função do comprimento s do cabo*) que atua ao longo do nosso cabo:

O diagrama de corpo livre para um segmento pequeno Δs do cabo é



Cabos sujeitos ao seu próprio peso

Portanto:

$$T \cos \theta = F_H$$

$$T \sin \theta = \int w(s) ds$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} \int w(s) ds$$

Separando as variáveis de integração, obtemos (substituímos dy/dx por ds/dx como $ds=(dx^2+dy^2)^{1/2}$ e portanto $dy/dx = ((ds/dx)^2-1)^{1/2}$ portanto:

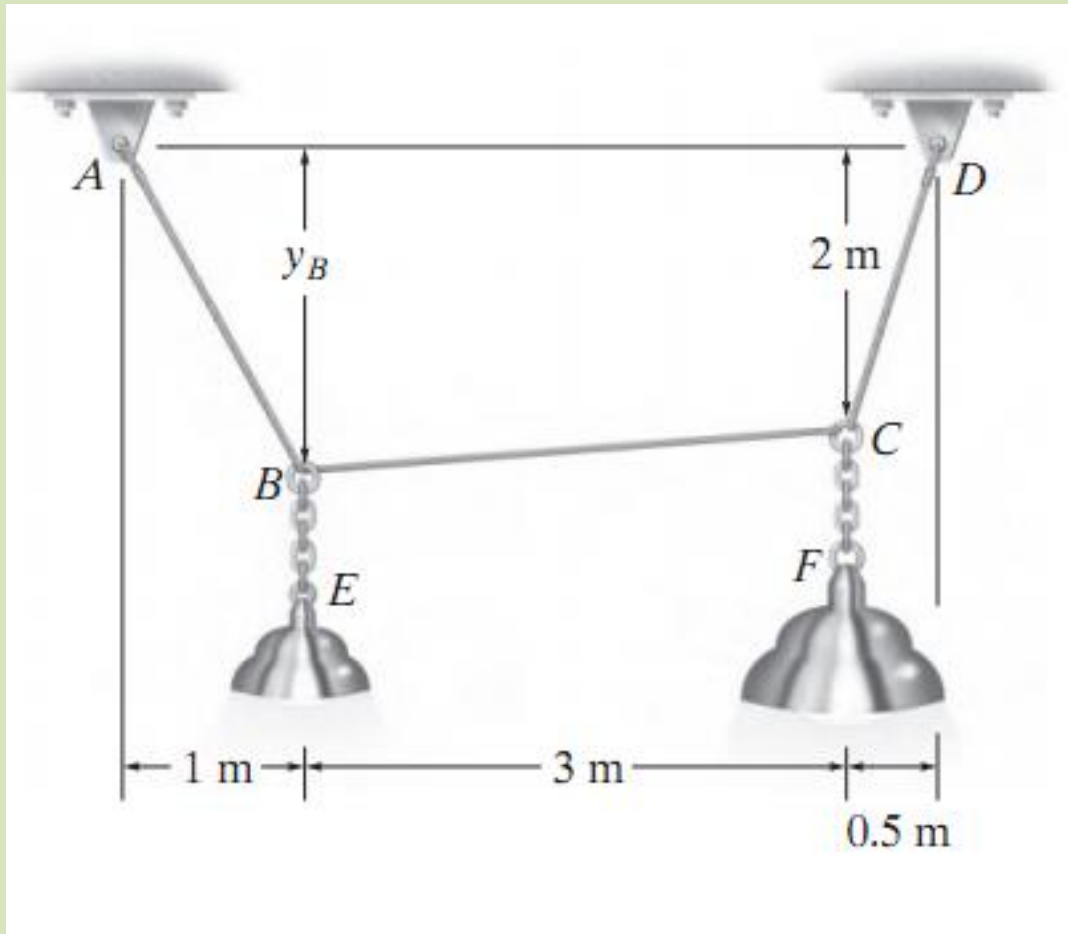
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{1}{F_H^2} \left(\int w(s) ds \right)^2}$$

$$x = \int \frac{ds}{\left[1 + \frac{1}{F_H^2} \left(\int w(s) ds \right)^2 \right]^{1/2}}$$

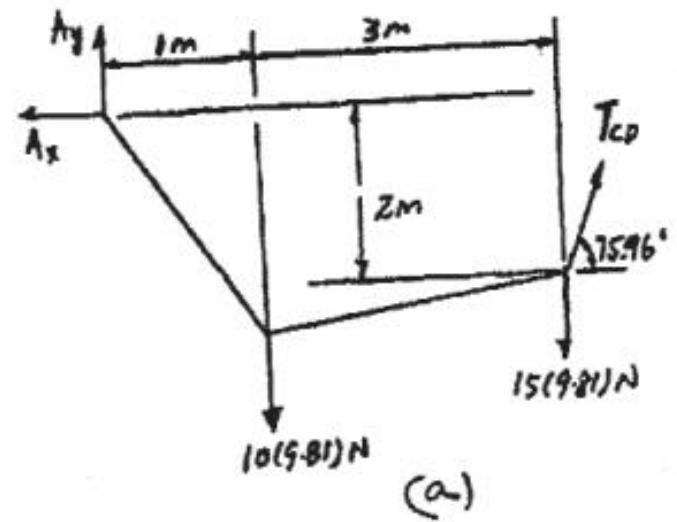
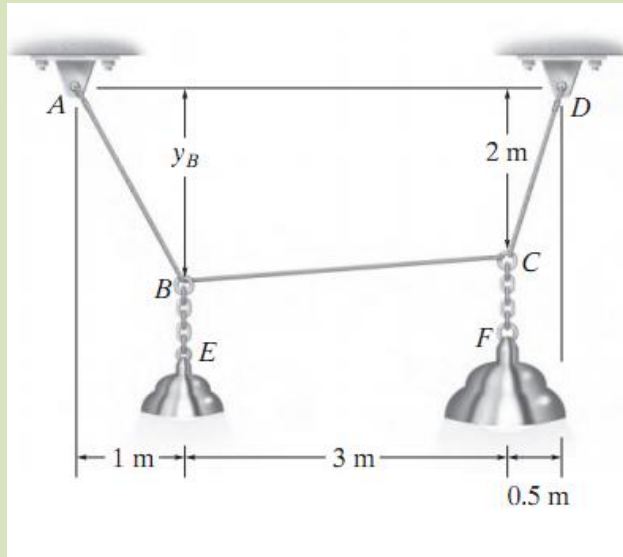
Exemplo

Exemplo 5 (7.94)

O cabo ABCD suporta a lâmpada E de massa 10 kg e a lâmpada F de massa 15 kg. Determine a **tração máxima** no cabo e a **flecha y_B** do ponto B.



Exemplo 5



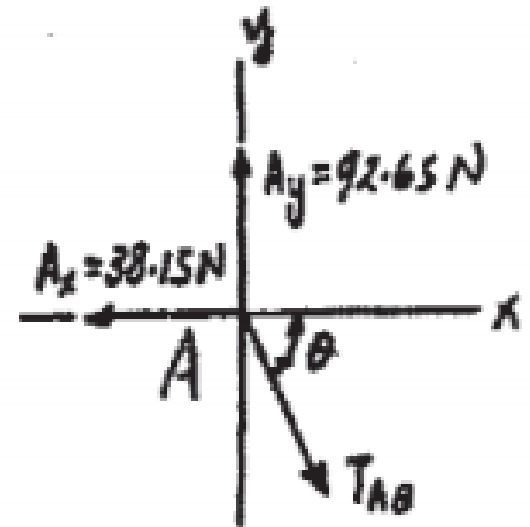
From FBD (a)

$$\begin{aligned} \left(+\sum M_A = 0; \right. & \quad T_{CD} \cos 75.96^\circ (2) + T_{CD} \sin 75.96^\circ (4) \\ & \quad - 15(9.81)(4) - 10(9.81)(1) = 0 \end{aligned}$$

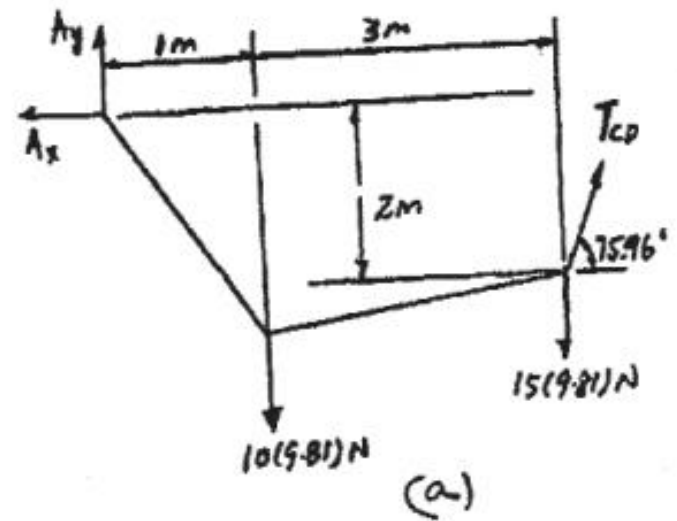
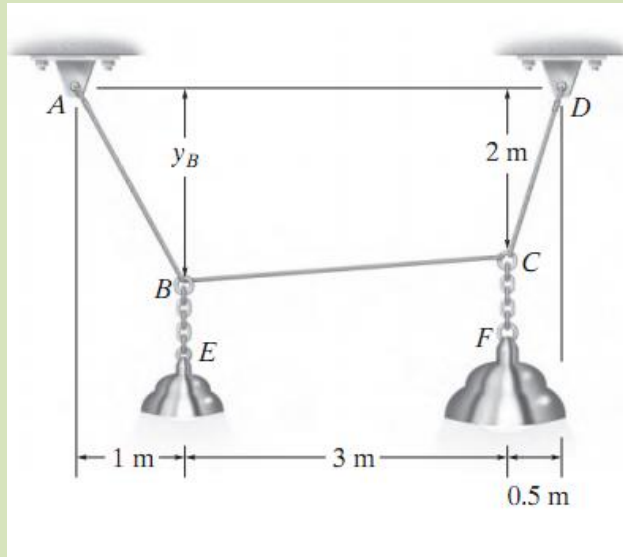
$$T_{CD} = 157.30 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \left(+\sum F_x = 0; \right. & \quad 157.30 \cos 75.96^\circ - A_x = 0 \quad A_x = 38.15 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(+\sum F_y = 0; \right. & \quad A_y + 157.30 \sin 75.96^\circ - 15(9.81) - 10(9.81) = 0 \\ & \quad A_y = 92.65 \text{ N} \end{aligned}$$



Exemplo 5



Joint A:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad T_{AB} \cos \theta - 38.15 = 0 \quad (1)$$

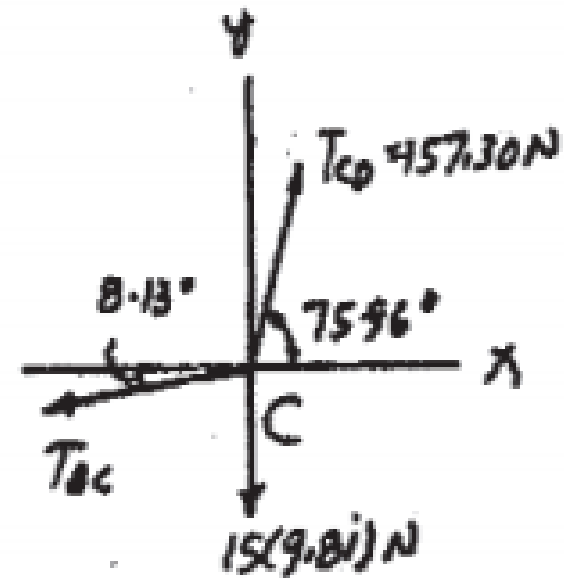
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 92.65 - T_{AB} \sin \theta = 0 \quad (2)$$

Solving Eqs. (1) and (2) yields:

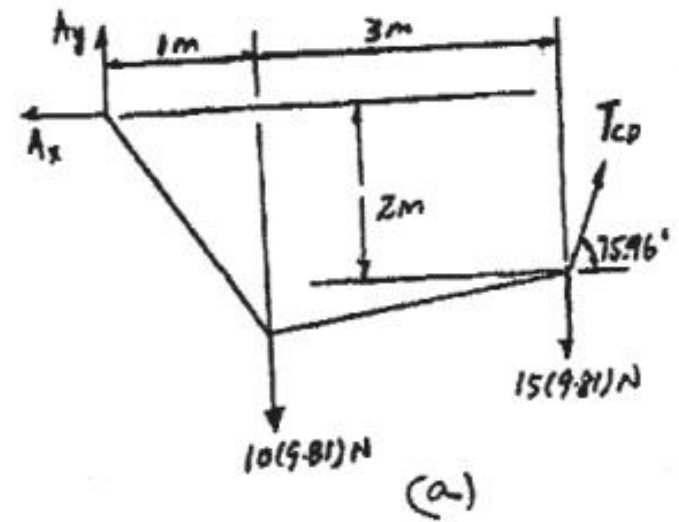
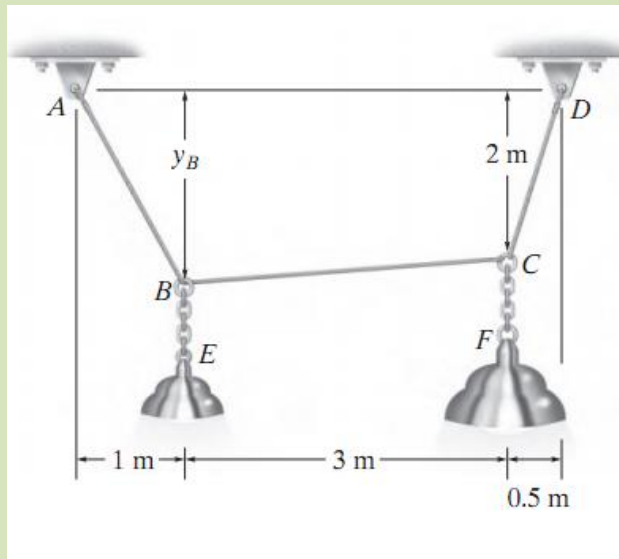
$$\theta = 67.62^\circ \quad T_{AB} = 100.2 \text{ N}$$

$$y_B = (1) \tan 67.62^\circ = 2.43 \text{ m}$$

Ans



Exemplo 5



Joint C:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0;$$

$$157.30 \cos 75.96^\circ - T_{BC} \cos 8.13^\circ = 0 \quad T_{BC} = 38.54 \text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

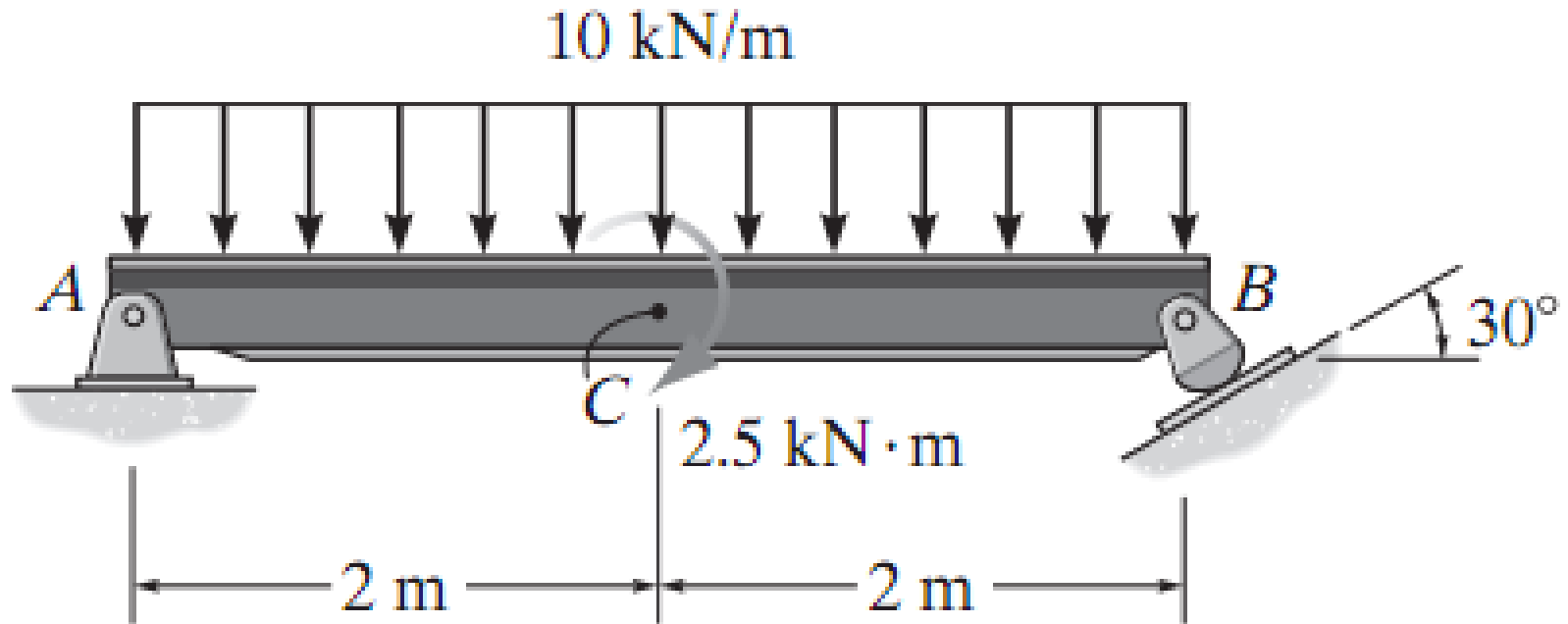
$$157.3 \sin 75.96^\circ - 38.54 \sin 8.13^\circ - 15(9.81) = 0 \text{ (check)}$$

$$T_{max} = T_{CD} = 157 \text{ N}$$

Ans

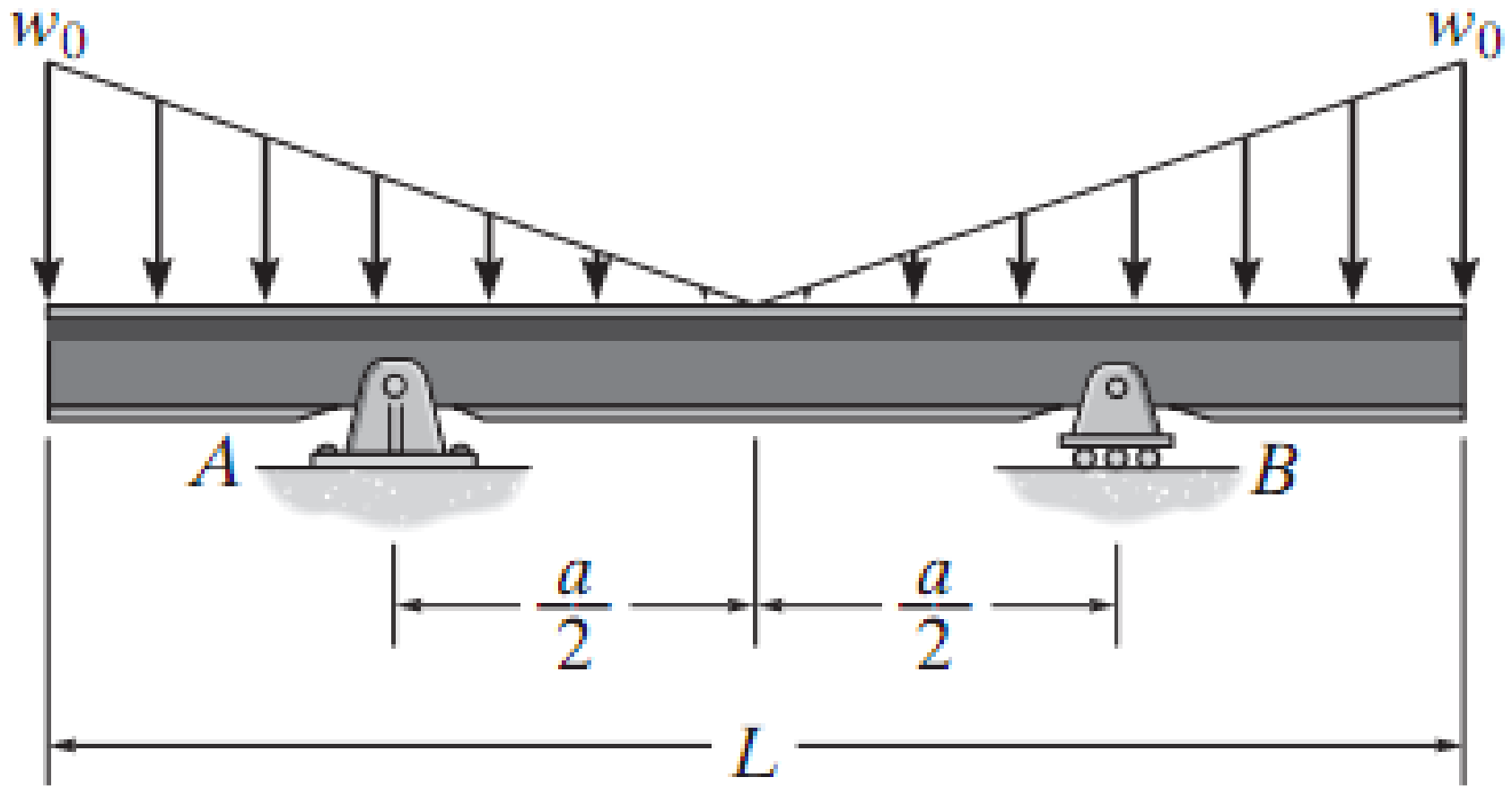
Exercício 1 (7.3)

Determine a força normal interna, o esforço cortante e o momento no ponto C da viga simplesmente apoiada. O ponto C está localizado à direita do momento de binário de 2,5 kNm



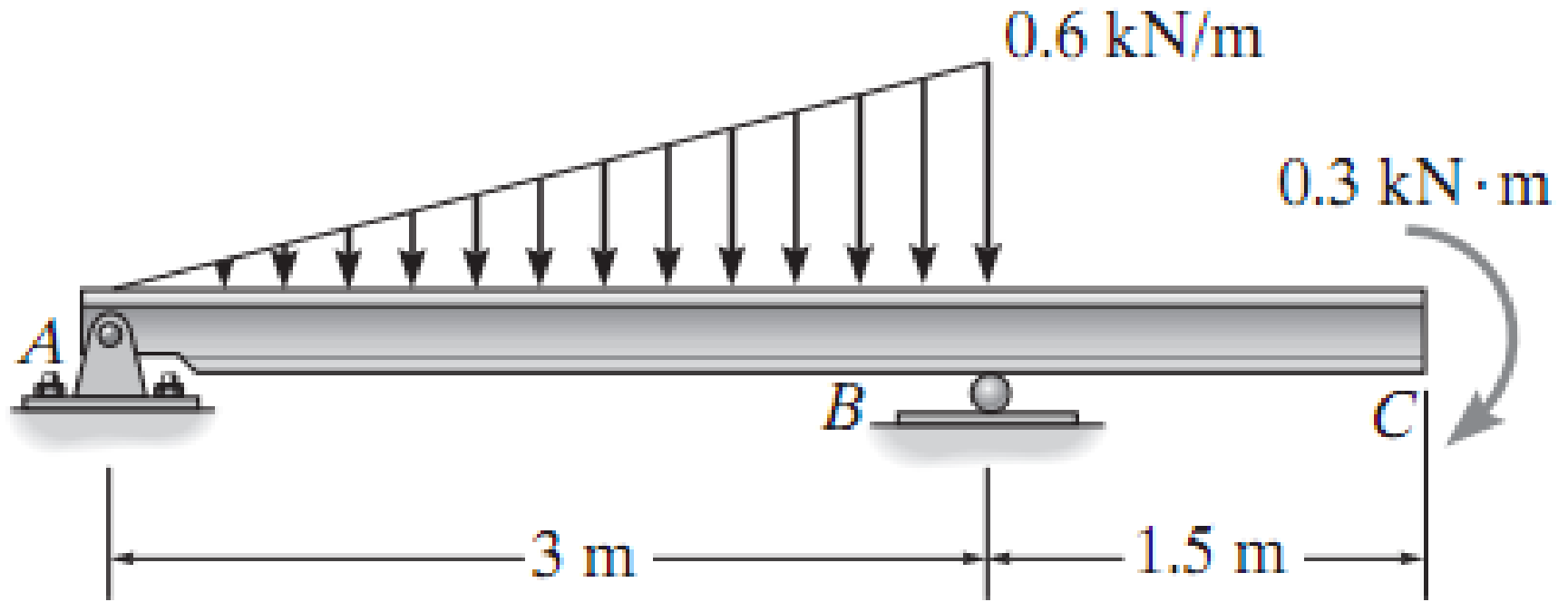
Exercício 2 (7.19)

Determine a distância “a” em termos da dimensão “L” da viga entre os apoios A e B simetricamente posicionados, de modo que o momento interno no centro da viga seja zero.



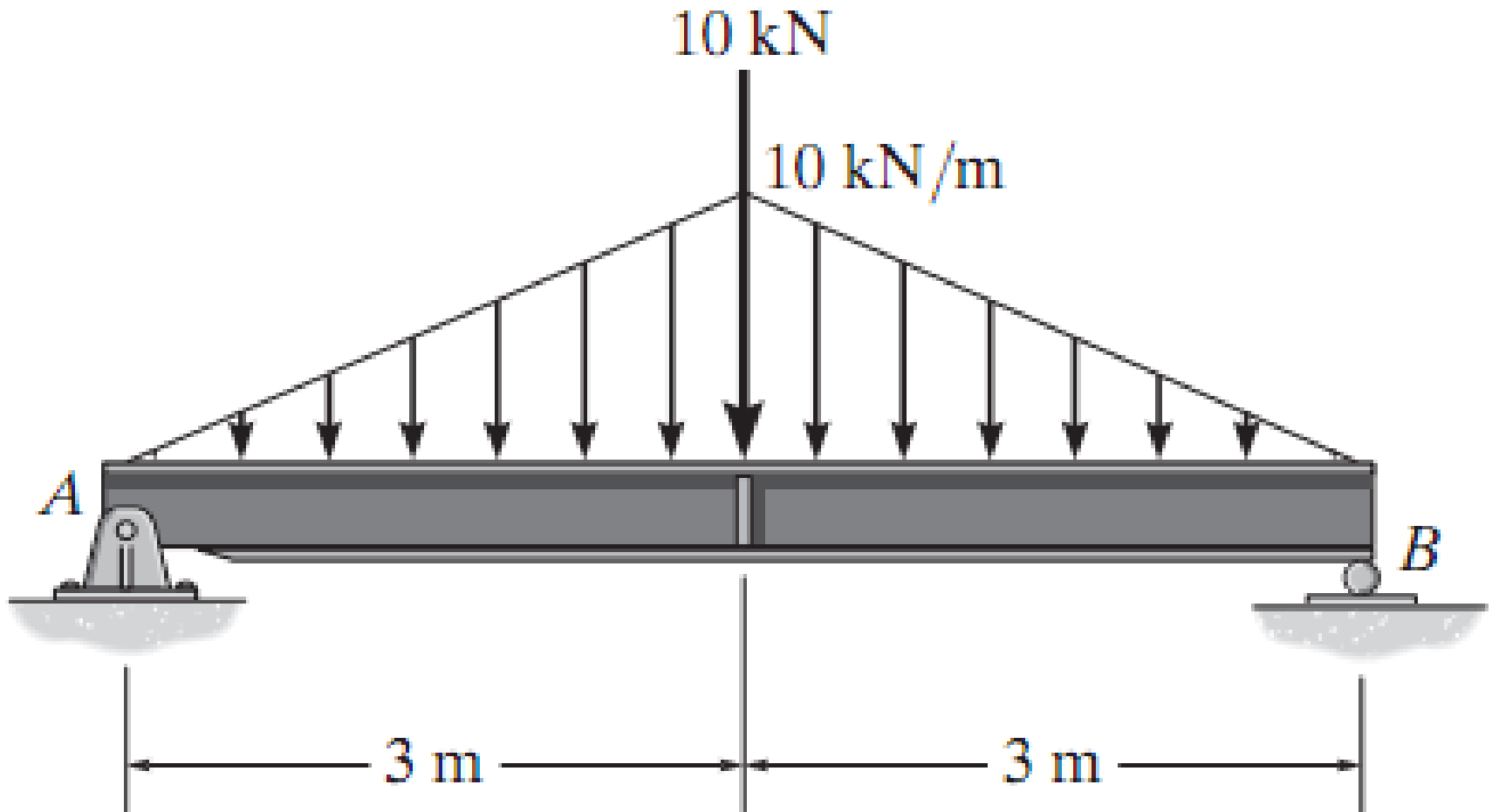
Exercício 3 (7.53)

Determine os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga.



Exercício 4 (7.80)

Determine os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga.



Exercício 5 (7.95)

O cabo suporta as três cargas mostradas. Determine as flechas y_B e y_D dos pontos B e D. Considere $P_1 = 2 \text{ kN}$ e $P_2 = 1,25 \text{ kN}$. Desconsidere o peso do cabo.

