Forças internas

Objetivos da aula:

- Mostrar como usar o método de seções para determinar as cargas internas em um membro.

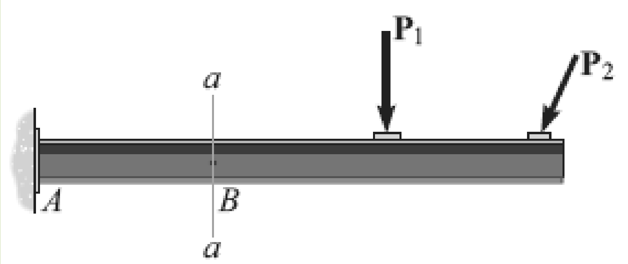
- Generalizar esse procedimento formulando equações que podem ser representadas de modo que descrevam o cisalhamento e o momento interno ao longo de um membro.

Forças internas desenvolvidas em membros estruturais

Para projetar um membro estrutural ou mecânico, é preciso conhecer a carga atuando dentro do membro, a fim de garantir que o material possa resistir a essa carga.

As cargas internas podem ser determinadas usando **o *método das seções***.

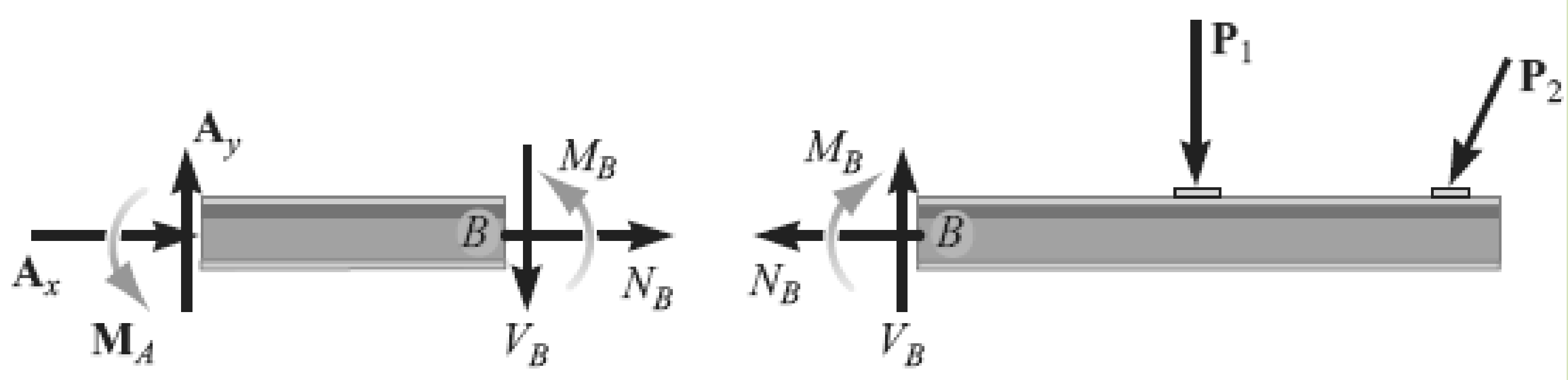
Como exemplo, considere a viga na figura abaixo. Quais as forças internas que atuam na seção a-a em B?



Ao seccionar a viga em a-a , as cargas internas que atuam em B serão expostas e se tornarão externas no diagrama de corpo livre de cada segmento.

Forças internas desenvolvidas em membros estruturais

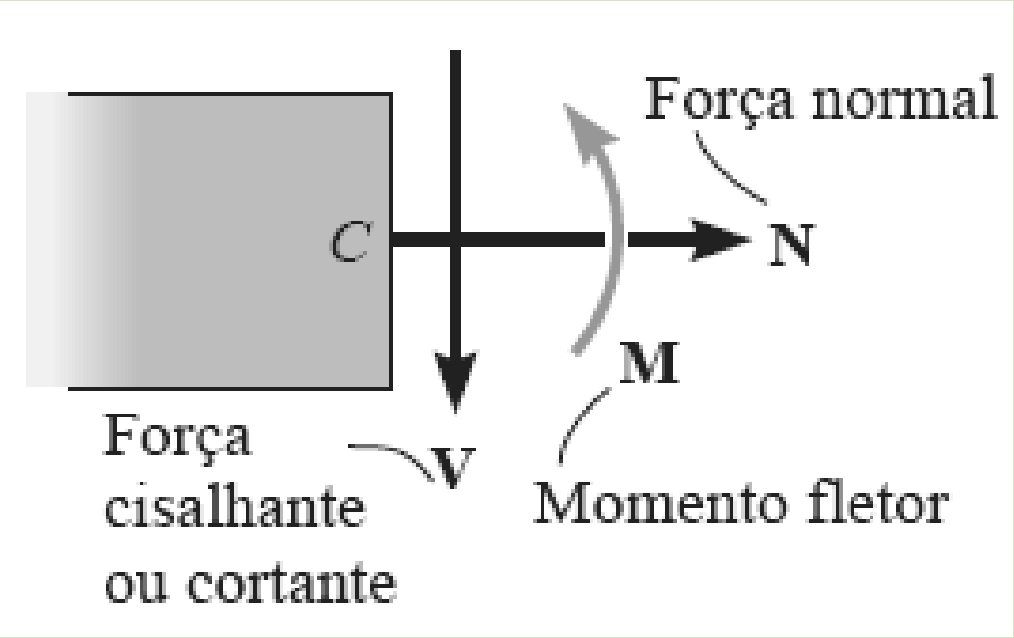
De acordo com a terceira lei de Newton, essas cargas devem atuar em direções opostas em cada segmento, conforme mostra a figura abaixo:



Aqui as direções foram escolhidas aleatoriamente. A verdadeira direção deve sair das condições de equilíbrio $\Sigma F_x=0$ $\Sigma F_y=0$ e $\Sigma M_B=0$

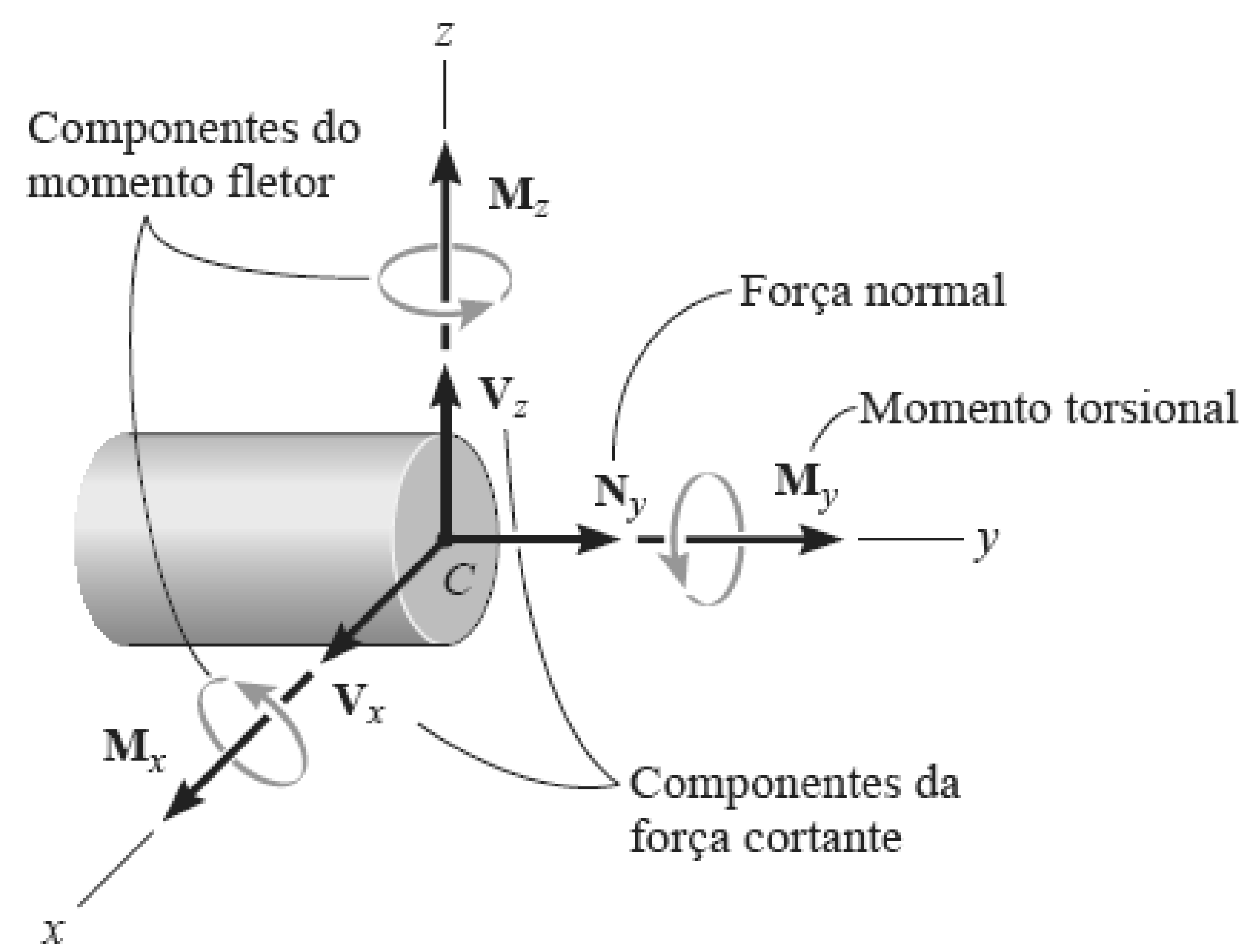
Forças internas desenvolvidas em membros estruturais

Em duas dimensões, **existem três resultantes de carga internas**:



Forças internas desenvolvidas em membros estruturais

Em 3D essas cargas aparecem na figura abaixo:



Procedimentos para análise

Reações de suporte

- Antes que o membro seja seccionado, pode ser preciso primeiro determinar suas reações de apoio, de modo que as equações de equilíbrio possam ser utilizadas para solucionar as cargas internas somente depois que o membro for seccionado.

Procedimentos para análise

Diagrama de corpo livre

- Mantenha todas as cargas distribuídas, momentos e forças que atuam sobre o membro em seus locais exatos, depois passe um corte imaginário pelo membro, perpendicular ao seu eixo, no ponto onde as cargas internas devem ser determinadas.

- Depois que o corte foi feito, desenhe um diagrama de corpo livre do segmento que tem o menor número de cargas sobre ele e indique as componentes das resultantes da força e do momento de binário na seção transversal, conforme a convenção de sinal estabelecida.

Procedimentos para análise

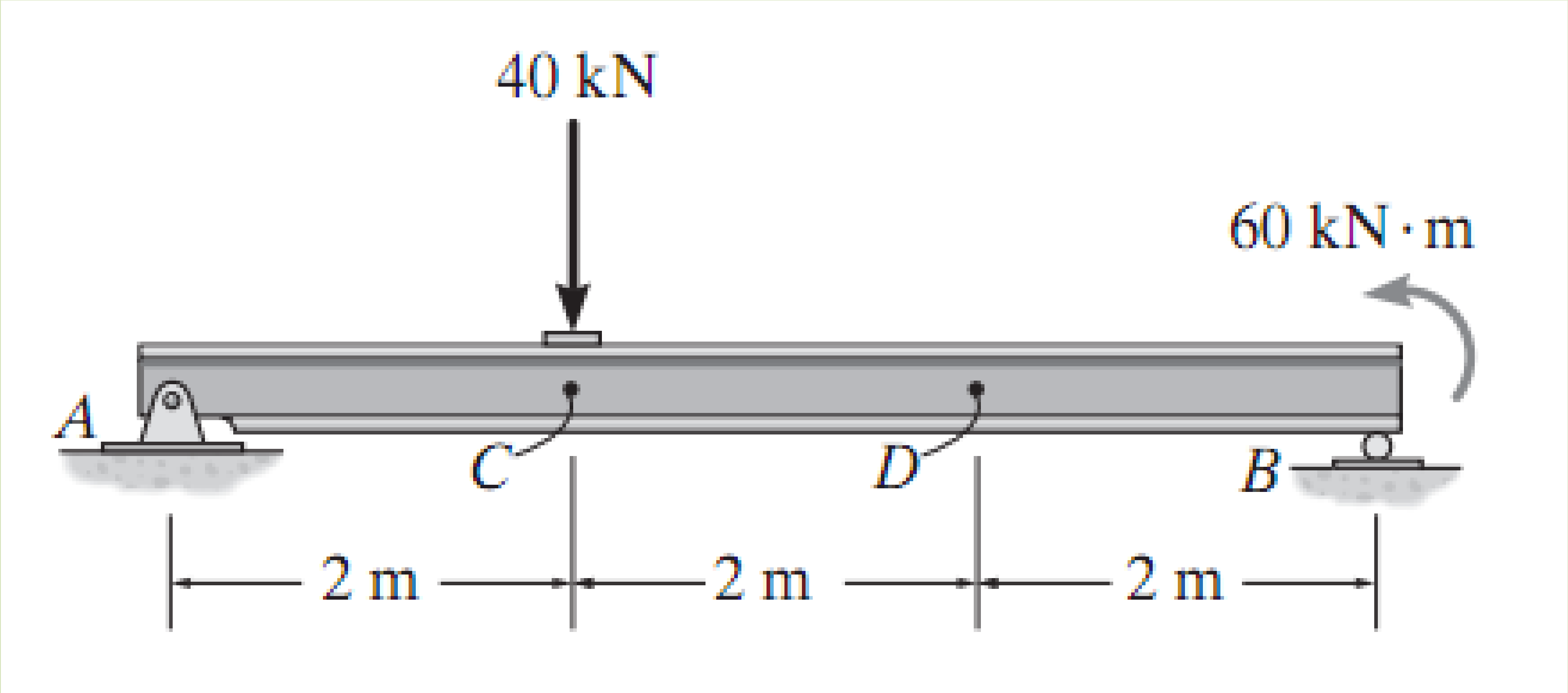
Equações de equilíbrio

- Os momentos devem ser somados na seção. Desse modo, os momentos das forças normal e cortante na secção são eliminados, e podemos obter uma solução direta para o momento.
- Se a solução das equações de equilíbrio geram um escalar negativo, o sentido dessa quantidade é oposto ao que é mostrado no diagrama de corpo livre.

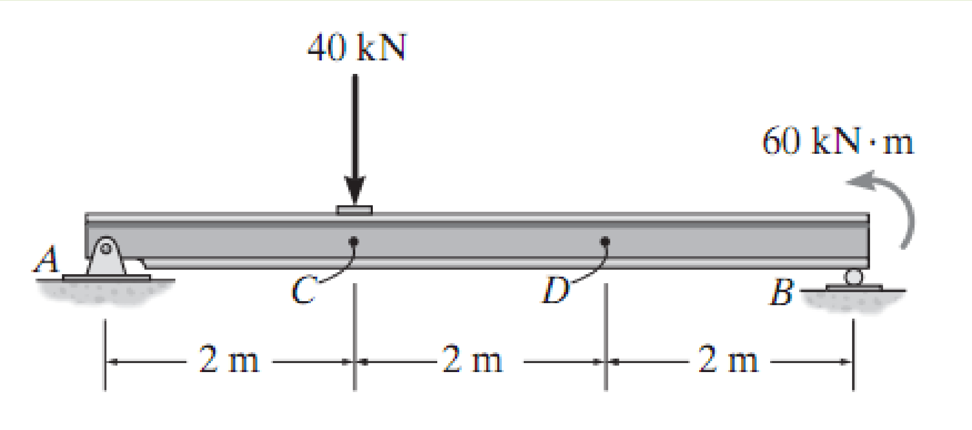
Vamos ver um exemplo

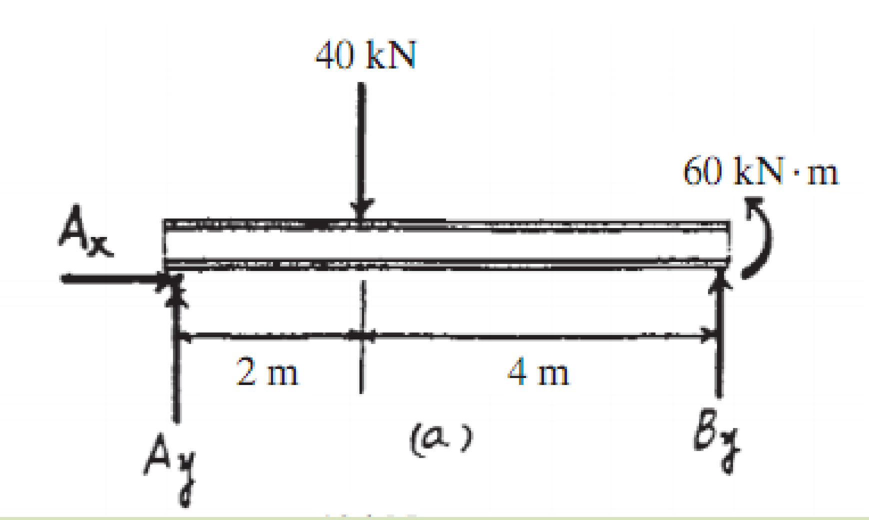
Exemplo 1 (7.1)

Determine a força normal, o esforço cortante interno e o momento fletor nos pontos C e D da viga. Assuma que o apoio em B seja um rolete. O ponto C está localizado logo à direita da carga de 40 kN



Exemplo 1





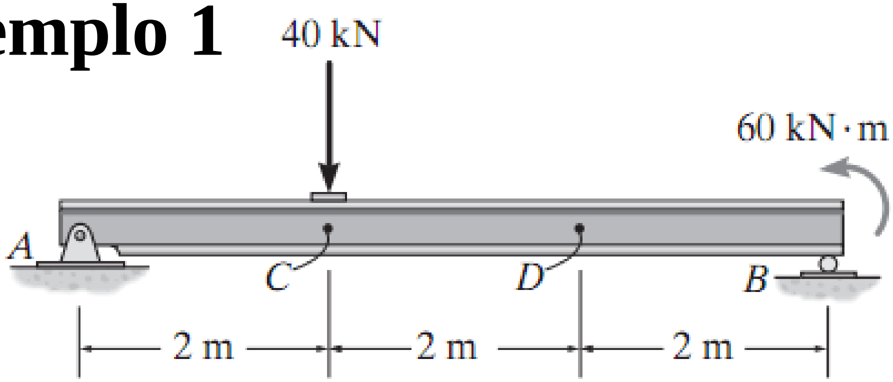
Calculamos as reações de apoio

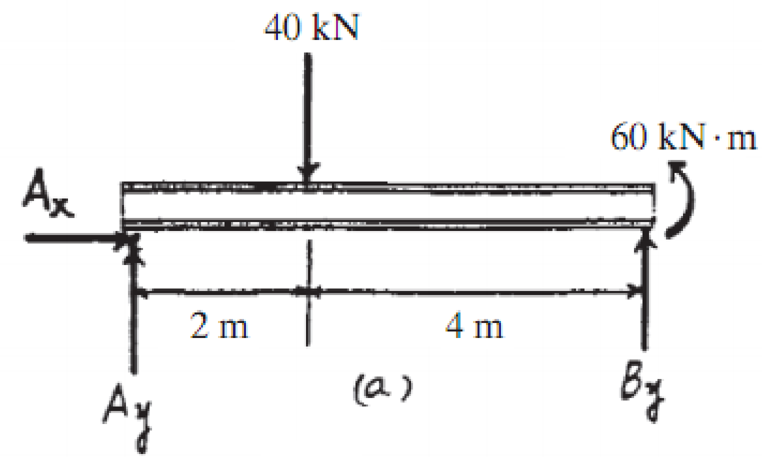
$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad B_y\,(6) + 60 - 40\,(2) = 0 \quad B_y = 3.333\ \text{kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y + 3.333 - 40 = 0 \quad A_y = 36.667\ \text{kN}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$$

Exemplo 1

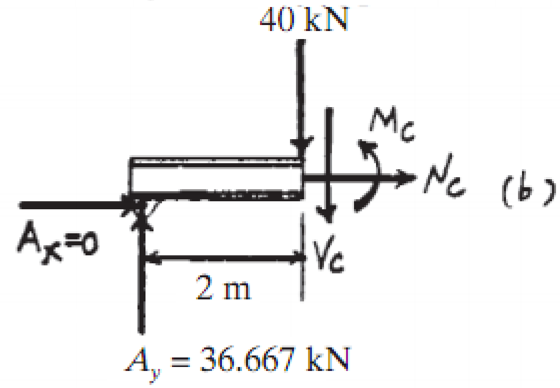




$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $N_C = 0$ **Ans**

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $36.667 - 40 - V_C = 0$ $V_C = -3.333 \text{ kN}$ **Ans**

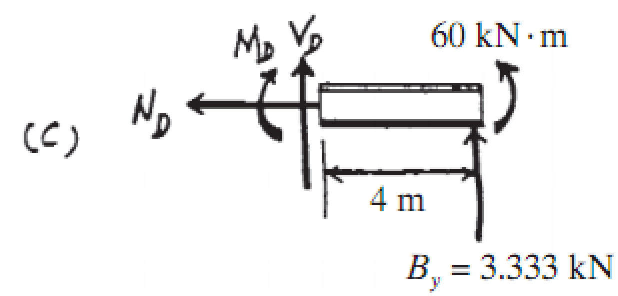
$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$ $M_C - 36.667\,(2) = 0$ $M_C = 73.33 \text{ kN}\cdot\text{m}$ **Ans**



$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $N_D = 0$ **Ans**

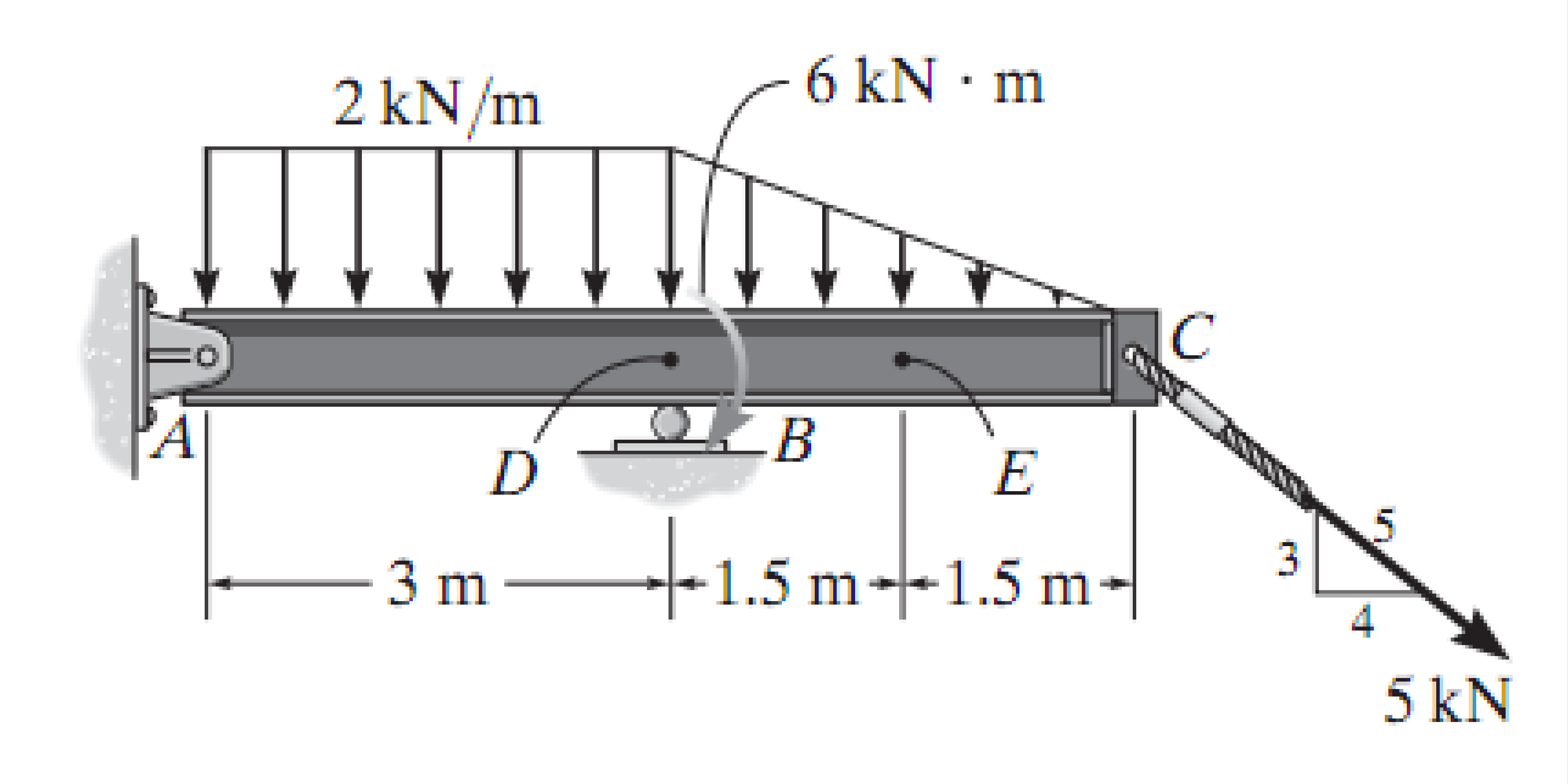
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $V_D + 3.333 = 0$ $V_D = -3.333 \text{ kN}$ **Ans**

$\circlearrowleft + \Sigma M_D = 0;$ $3.333\,(2) + 60 - M_D = 0$ $M_D = 66.67 \text{ kN}\cdot\text{m}$ **Ans**

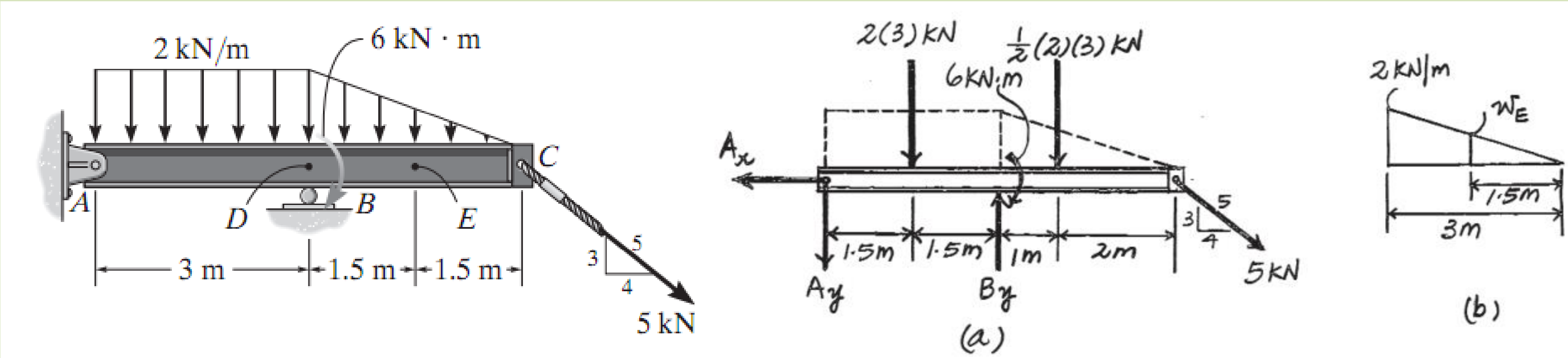


Exemplo 2 (7.18)

Determine a força normal, o esforço cortante e o momento fletor nos pontos D e E da viga. O ponto D está localizado à esquerda do suporte de rolete em B, onde o momento de binário atua.



Exemplo 2

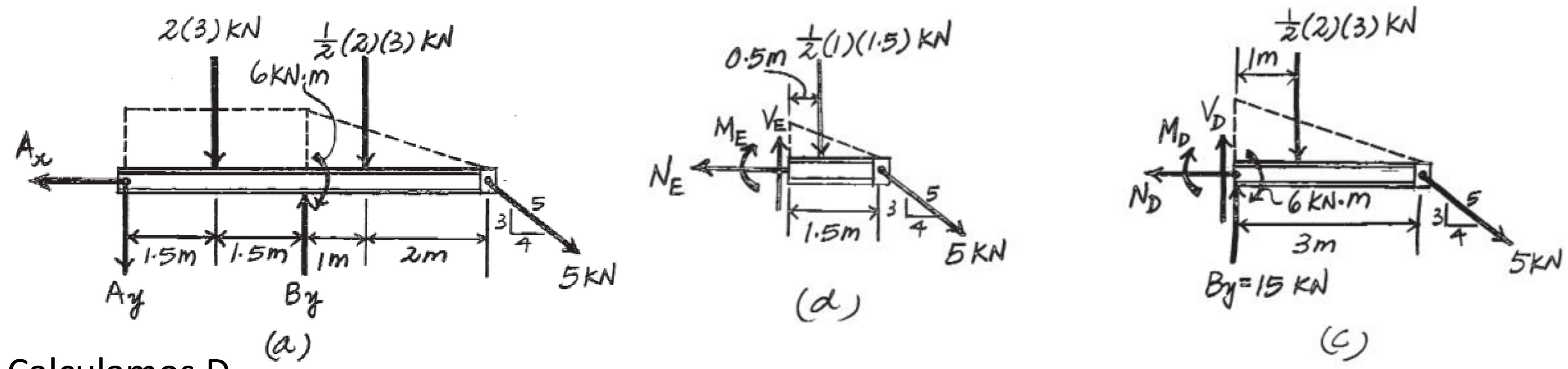


Calculamos a reação do apoio em B

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad B_y(3) - 2(3)(1.5) - 6 - \frac{1}{2}(2)(3)(4) - 5\left(\frac{3}{5}\right)(6) = 0$$

$$B_y = 15 \text{ kN}$$

Exemplo 2



Calculamos D

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \qquad 5\left(\frac{4}{5}\right) - N_D = 0 \qquad N_D = 4\text{ kN} \qquad \textbf{Ans}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad V_D + 15 - \frac{1}{2}(2)(3) - 5\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \qquad V_D = -9\text{ kN} \qquad \textbf{Ans}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_D = 0; \qquad -M_D - 6 - \frac{1}{2}(2)(3)(1) - 5\left(\frac{3}{5}\right)(3) = 0 \qquad M_D = 18\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textbf{Ans}$$

Calculamos E

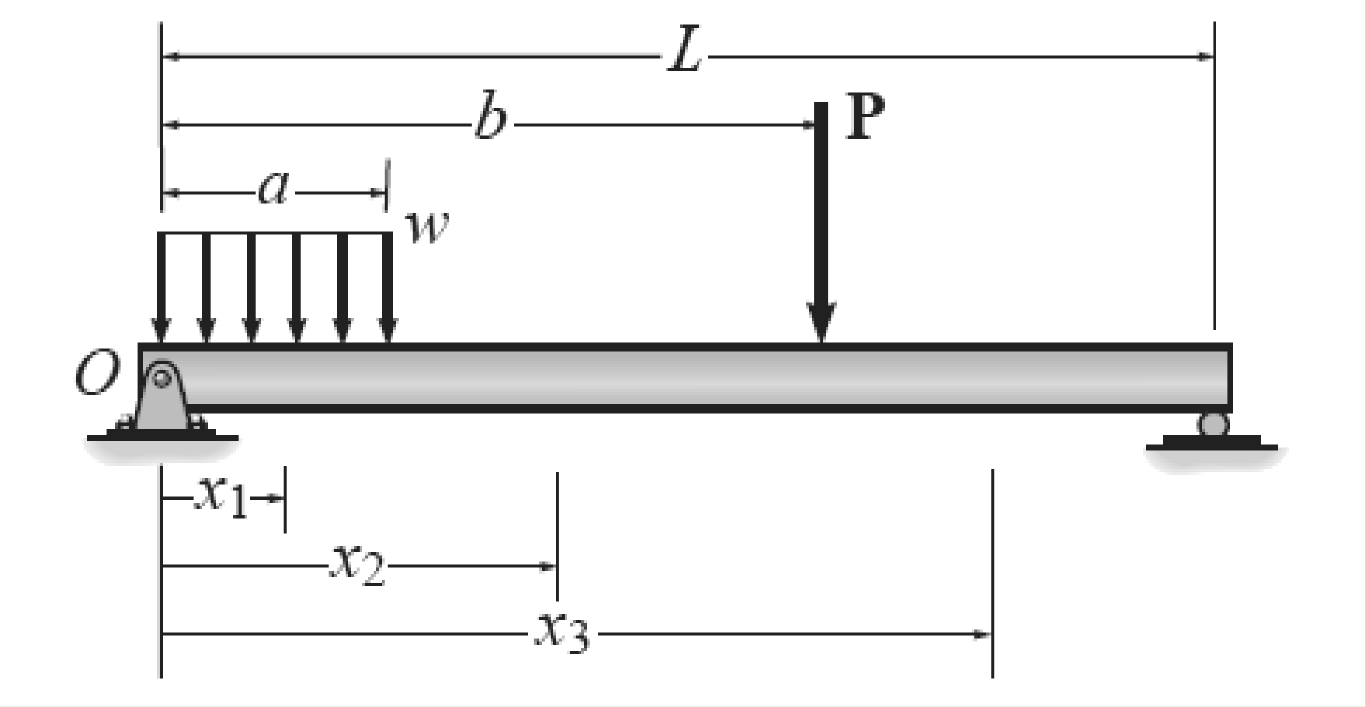
$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \qquad 5\left(\frac{4}{5}\right) - N_E = 0 \qquad N_E = 4\text{ kN} \qquad \textbf{Ans}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad V_E - \frac{1}{2}(1)(1.5) - 5\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \qquad V_E = 3.75\text{ kN} \qquad \textbf{Ans}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_E = 0; \qquad -M_E - \frac{1}{2}(1)(1.5)(0.5) - 5\left(\frac{3}{5}\right)(1.5) = 0 \qquad M_E = -4.875\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textbf{Ans}$$

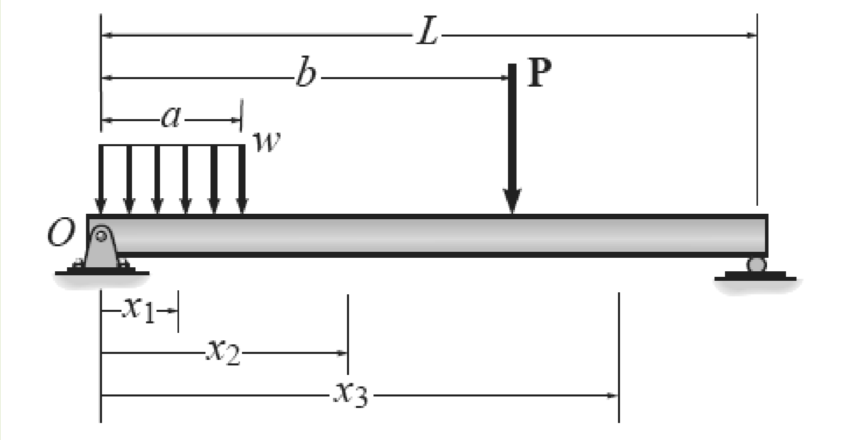
Equações e diagramas de esforço cortante e momento fletor

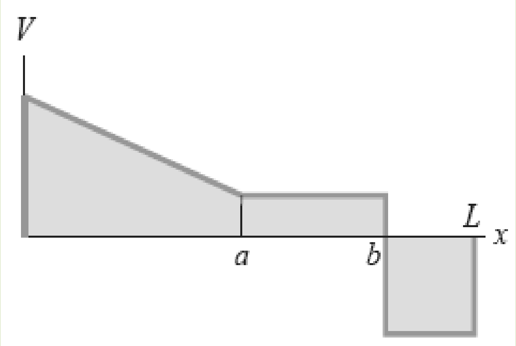
Por exemplo, vamos supor a viga simplesmente apoiada com um pino em uma extremidade e com um rolete na outra:

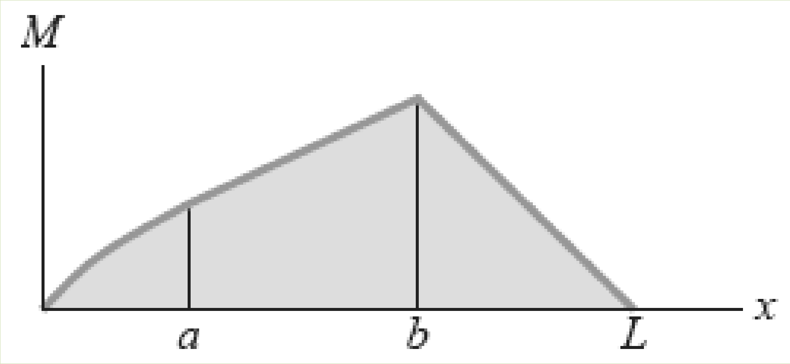


Equações e diagramas de esforço cortante e momento fletor

As funções de esforço cortante e momento fletor podem ser desenhadas para todas as regiões da viga. Se as funções resultantes forem desenhadas em função de x, os gráficos serão chamados de diagrama de esforço cortante e diagrama de momento fletor:







Procedimentos para análise

- Determine todas as forças reativas e momentos de binário que atuam sobre a viga e decomponha todas as forças em componentes que atuam perpendicularmente e paralelamente aos eixo da viga.

- Especifique as coordenadas de x (pontos críticos) para as regiões da viga que se encontram entre forças concentradas e/ou momentos de binário, ou onde a carga distribuída é contínua.

- Seccione a viga em cada distância x e desenhe o diagrama de corpo livre de um dos segmentos. Cuide para que V e M apareçam atuando em seu sentido positivo, de acordo com a convenção de sinal.

Procedimentos para análise

Funções de esforço cortante e momento

- O esforço cortante V é obtido somando-se as forças perpendiculares ao eixo da viga.

- O momento M é obtido somando-se os momentos em relação a extremidade seccionada do segmento.

Procedimentos para análise

Diagramas de esforço cortante e momento fletor

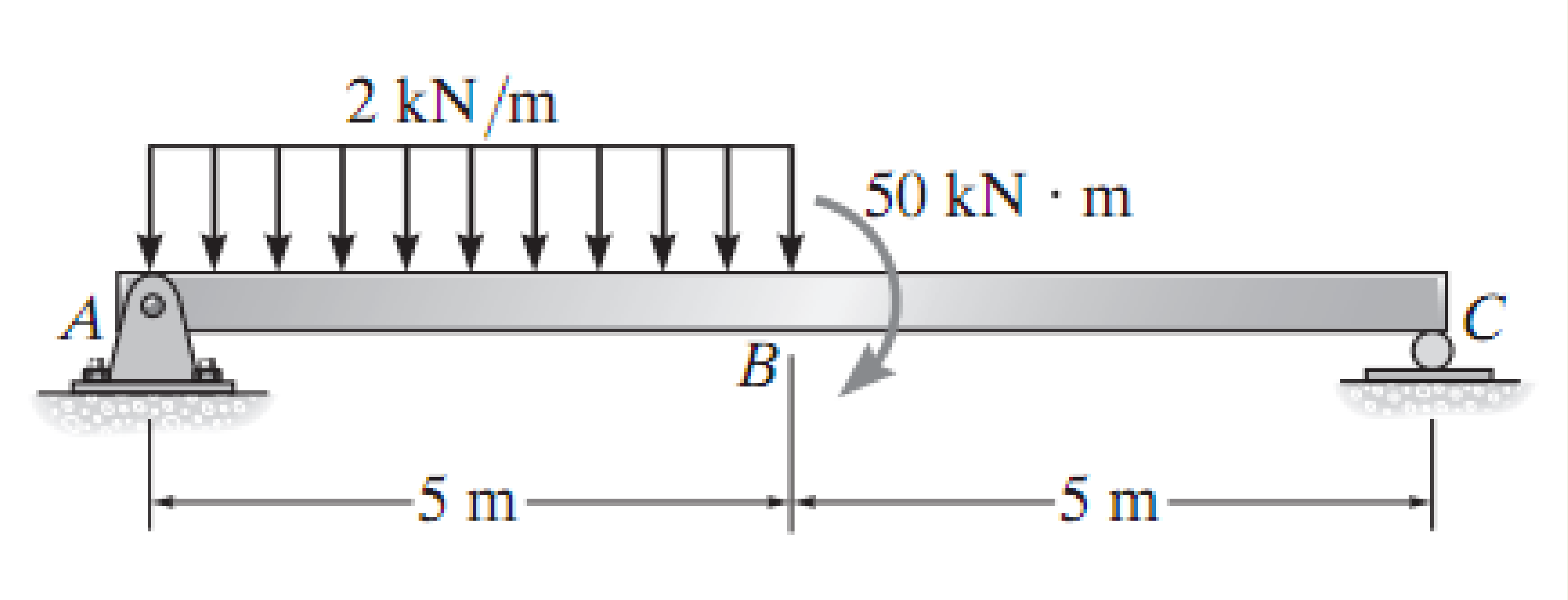
- Desenhe o diagrama do esforço cortante (V versus x) e o diagrama de momento (M versus x). Se os valores calculados das funções descrevendo V e M forem positivos, os valores são desenhados acima do eixo x, enquanto valores negativos são desenhados abaixo do eixo x.

- Geralmente, é conveniente fazer os gráficos dos diagramas de esforço cortante e momento fletor diretamente abaixo do diagrama de corpo livre da viga.

Vamos ver um exemplo:

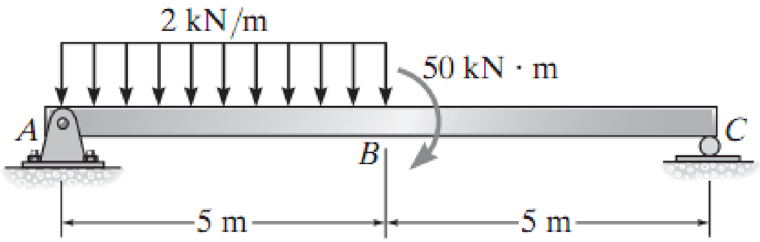
Exemplo 3 (7.49)

Determine os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga.



Primeiro calcule as reações nos apoios

Exemplo 3



$0 \le x < 5$ m:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 2.5 - 2x - V = 0$

$$V = 2.5 - 2x$$

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M + 2x\left(\frac{1}{2}x\right) - 2.5x = 0$

$$M = 2.5x - x^2$$

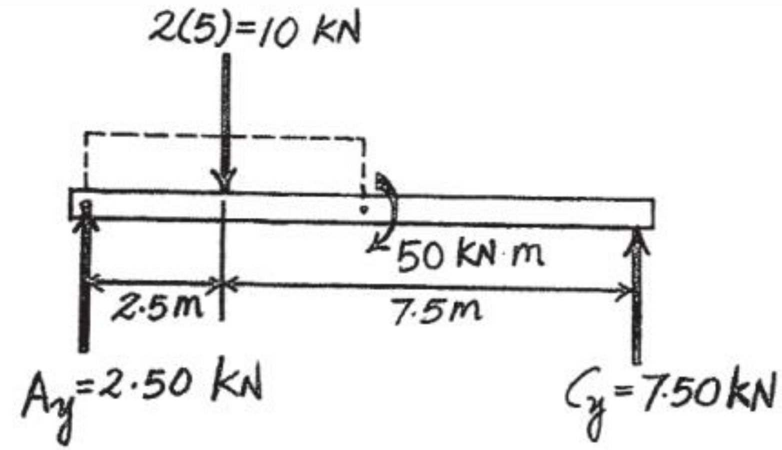
$5 \text{ m} < x < 10$ m:

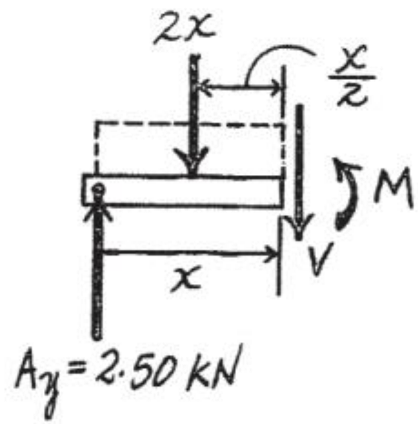
$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 2.5 - 10 - V = 0$

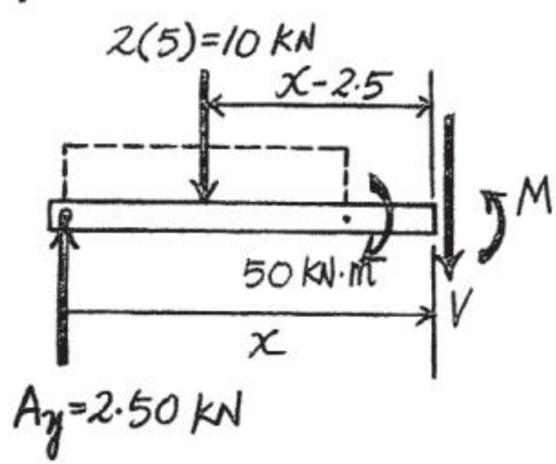
$$V = -7.5$$

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M + 10(x - 2.5) - 2.5x - 50 = 0$

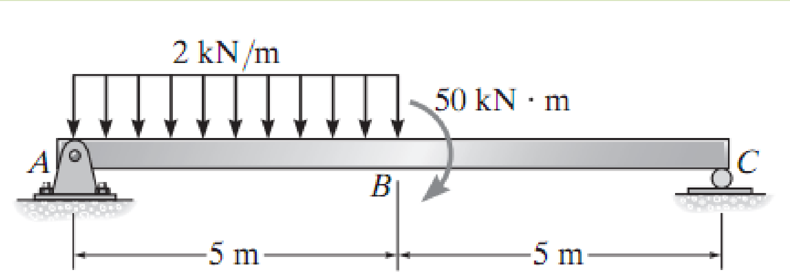
$$M = -7.5x + 75$$







Exemplo 3



$0 \le x < 5$ m:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 2.5 - 2x - V = 0$

$$V = 2.5 - 2x$$

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M + 2x\left(\frac{1}{2}x\right) - 2.5x = 0$

$$M = 2.5x - x^2$$

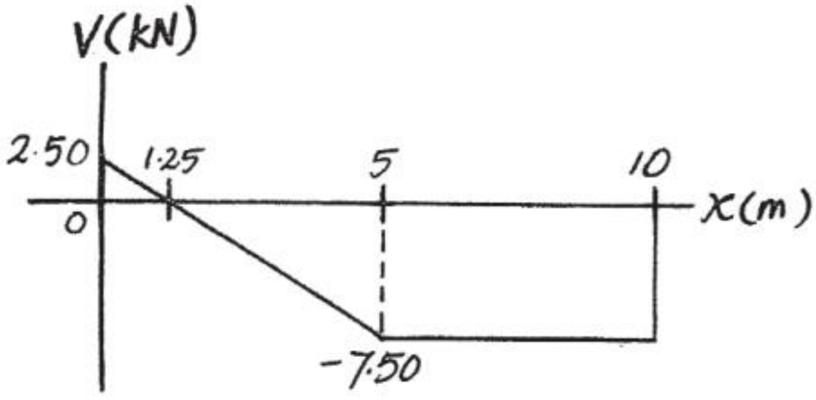
5 m $< x < 10$ m:

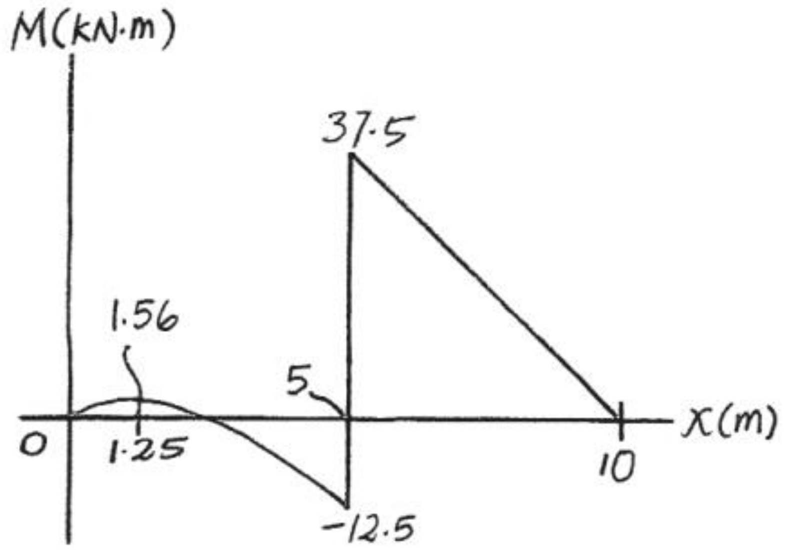
$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 2.5 - 10 - V = 0$

$$V = -7.5$$

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M + 10(x - 2.5) - 2.5x - 50 = 0$

$$M = -7.5x + 75$$

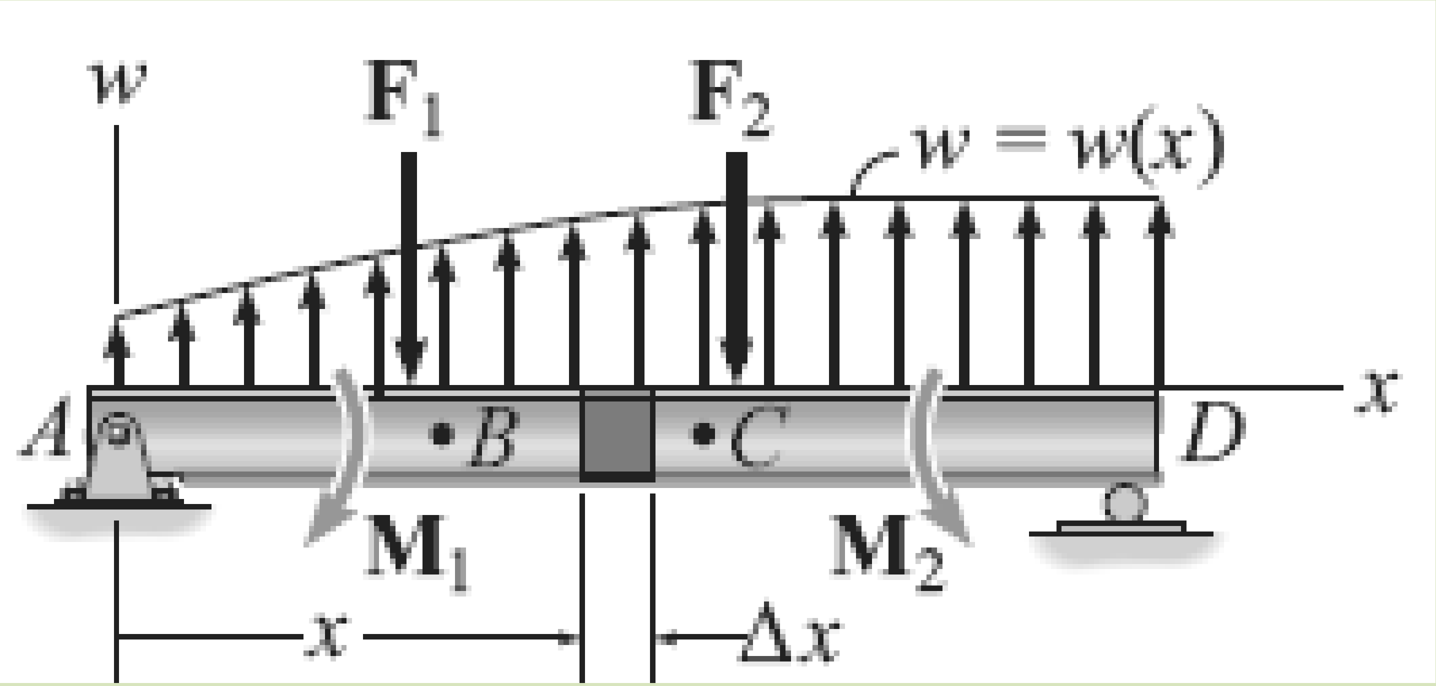




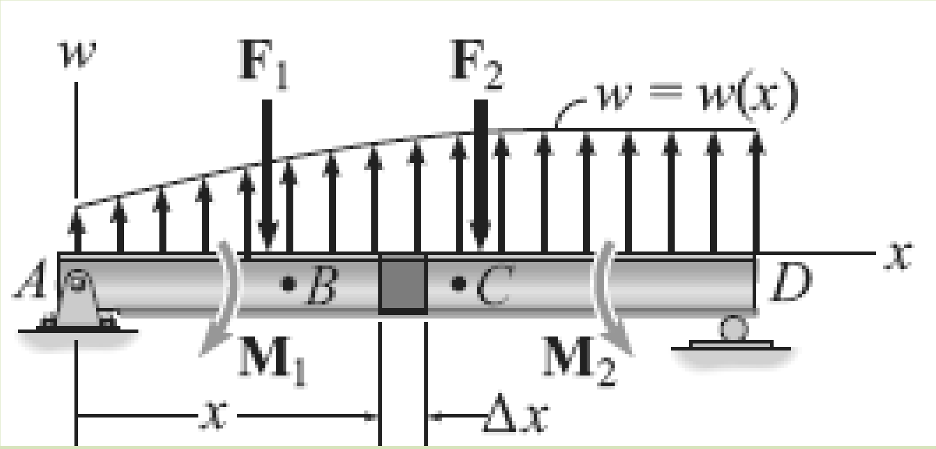
Relações entre carga distribuída, esforço cortante e momento fletor

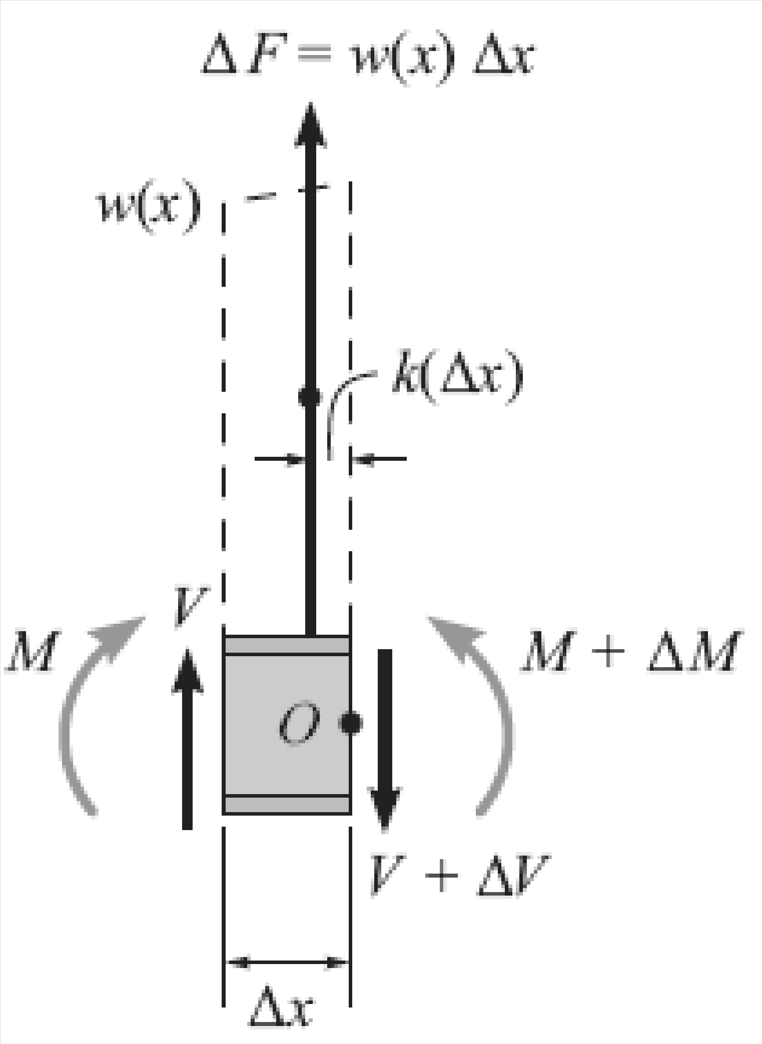
Carga distribuída

Considere a viga *AD* mostrada na figura a seguir:



Relações entre carga distribuída, esforço cortante e momento fletor



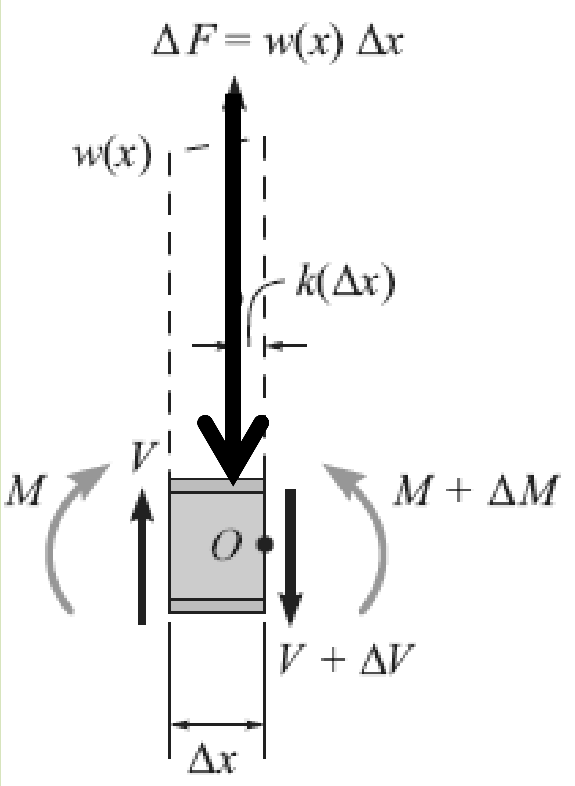


Um diagrama de corpo livre para um pequeno segmento da viga Δx escolhido em um ponto x ao longo da viga, que não está sujeito a uma força concentrada.

Relações entre carga distribuída, esforço cortante e momento fletor

Consideramos que a força de esforço cortante e o momento fletor interno mostrados no diagrama de corpo livre atuam nos sentidos escolhidos.

A carga distribuída foi substituída por uma força resultante $\Delta F = w(x)\,\Delta x$, que atua a uma distância fracionária $k(\Delta x)$ a partir da extremidade direita, onde $0 < k < 1$ [por exemplo, se $w(x)$ for uniforme, $k = 1/2$].



Aplicando as equações de equilíbrio:

$\Sigma F_y = 0$ $\quad V - w(x)\Delta x - (V + \Delta V) = 0$ $\quad \Delta V = -w(x)\Delta x$

$\Sigma M_O = 0$ $\quad -V\Delta x - M + w(x)\Delta x\,(k(\Delta x)) + (M + \Delta M) = 0$

$$\Delta M = V\Delta x - w(x)k(\Delta x)^2$$

Relação entre a carga distribuída e o esforço cortante

$$\frac{dV}{dx} = -w(x)$$

Inclinação do diagrama de esforço cortante	=	Intensidade da carga distribuída

Se reescrevermos a equação acima na forma dV = -*w(x)dx* e realizarmos a integração entre dois pontos quaisquer *B* e *C* na viga, veremos que:

$$\Delta V = -\int w(x)dx$$

Variação no esforço cortante	=	Área sob a curva de carregamento

Relação entre esforço cortante e momento

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Inclinação do diagrama de momento fletor	=	Esforço cortante

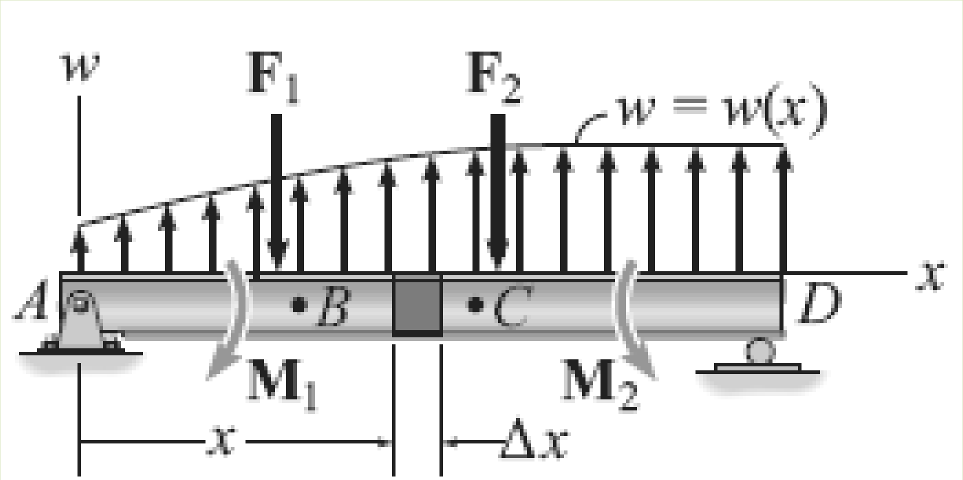
Se essa equação for reescrita na forma $dM = \int V\,dx$ e integrada entre dois pontos B e C quaisquer na viga, temos:

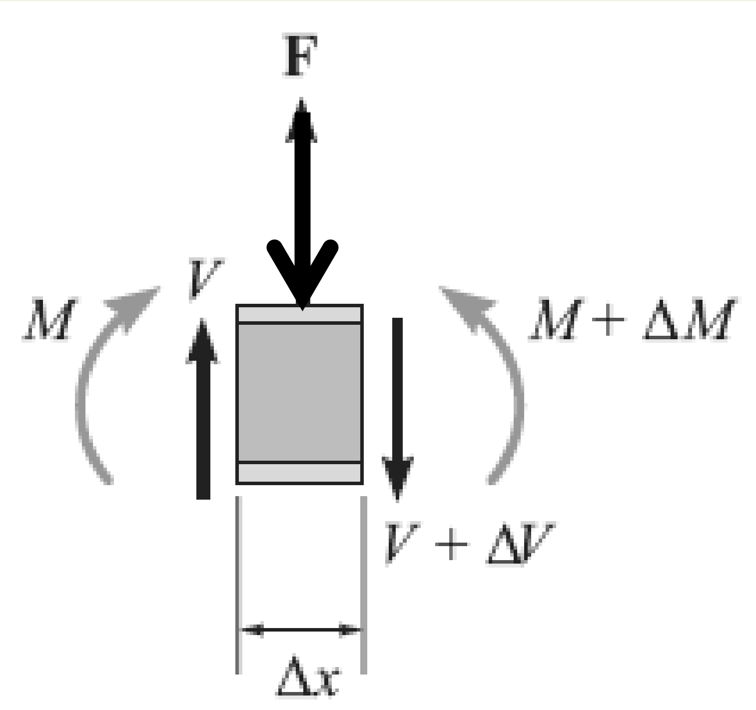
$$\Delta M = \int V\,dx$$

Variação no momento fletor	=	Área sob o diagrama de esforço cortante

Forças e momentos concentrados

O diagrama de corpo livre de um segmento pequeno da viga tomado sob uma das forças, é mostrado na figura seguinte:



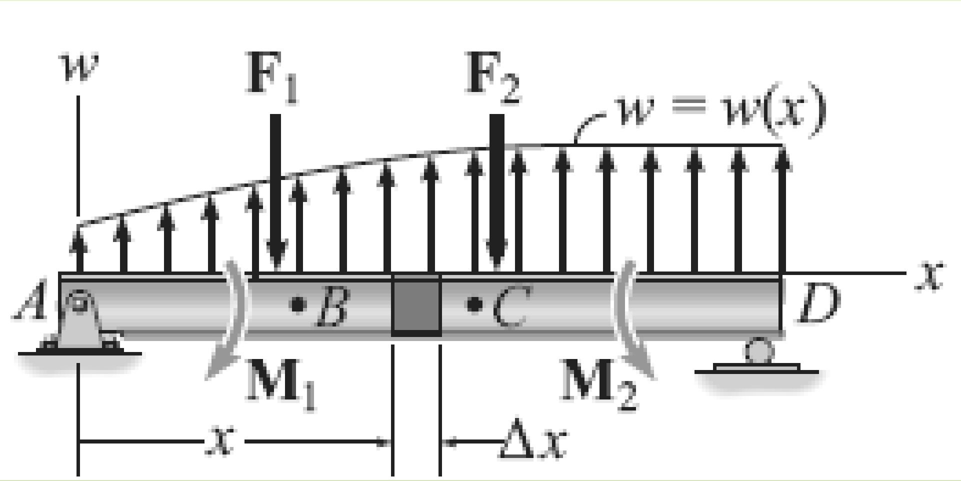


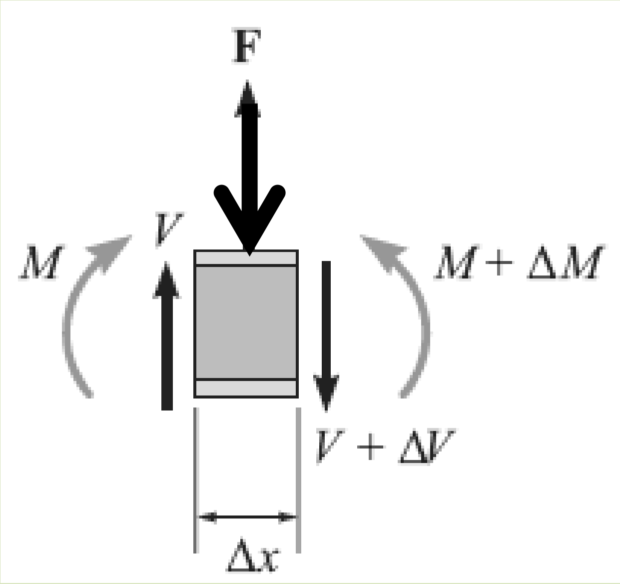
Forças e momentos concentrados

Aqui, o equilíbrio de forças requer:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \Delta V = -F$$

Como a variação no esforço cortante é negativa, o diagrama de esforço cortante "saltará" para baixo quando F atuar para baixo na viga. De modo semelhante, o salto no esforço cortante (ΔV) é para cima quando F atua para cima.



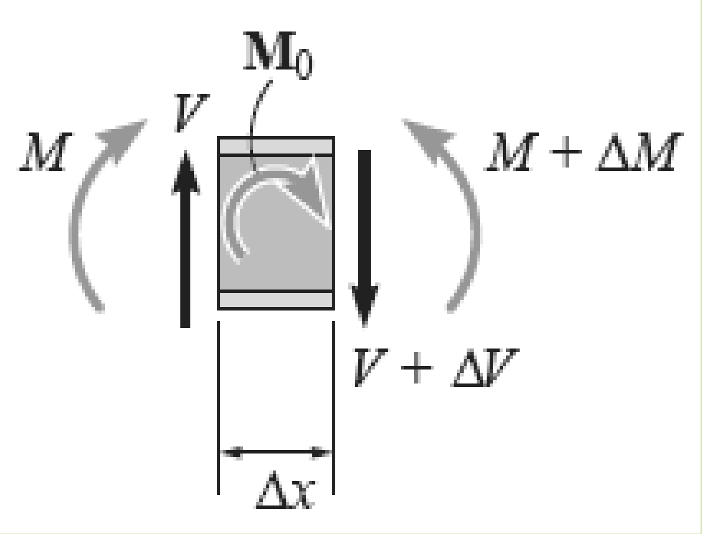


Forças e momentos concentrados

Si tivermos um binário M_0 no elemento estudado, considerando que se $\Delta x \rightarrow 0$, o equilíbrio do momento requer:

$$\curvearrowright + \sum M = 0; \qquad\qquad \Delta M = M_0$$

Assim, a variação no momento ΔM é positiva, ou o diagrama do momento "saltará" para cima se M_0 estiver no sentido horário. De modo semelhante, o salto ΔM é para baixo quando M_0 está em sentido anti-horário.



Pontos importantes

- A **inclinação** do diagrama de esforço cortante em um ponto é igual à o negativo intensidade da carga distribuída, ou seja, $dV/dx = -w(x)$.

- Se uma **força concentrada** atua para cima na viga, o esforço cortante saltará para cima pelo mesmo valor.

- A variação no esforço cortante ΔV entre dois pontos é igual à área sob a curva de carga distribuída entre os pontos. A **inclinação do diagrama de momento** em um ponto é igual ao esforço cortante, ou seja, $dM/dx = V$.

- A variação no momento ΔM entre dois pontos é igual à área sob o diagrama de esforço cortante entre os dois pontos.

- Se um momento de binário no sentido horário atuar sobre a viga, o esforço cortante não será afetado; porém, o diagrama de momento fletor saltará para cima com a mesma quantidade.

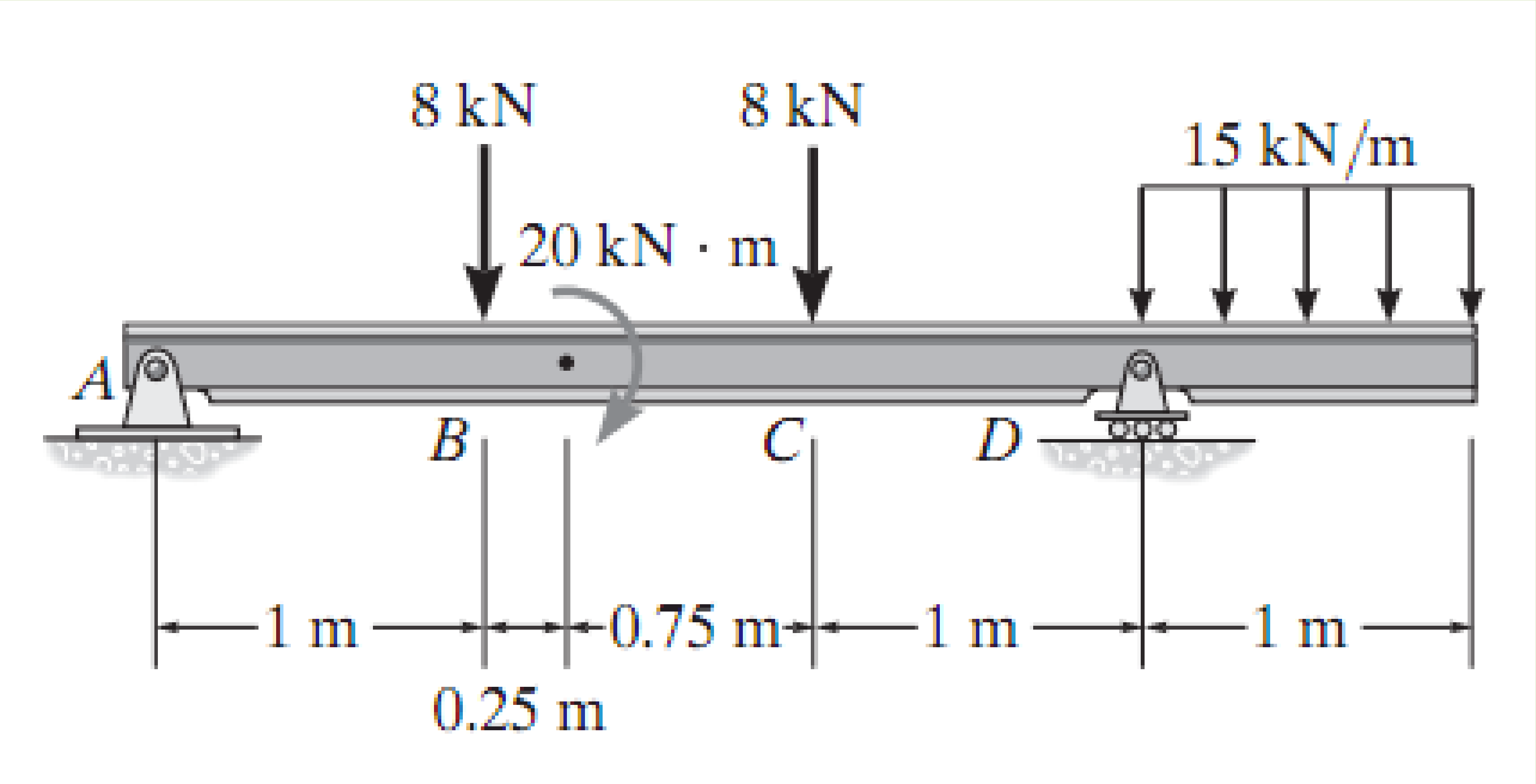
Pontos importantes

- Os pontos de esforço cortante zero representam os pontos de momento fletor máximo ou mínimo, pois $dM/dx = 0$.

- Como duas integrações de $w = w(x)$ são envolvidas para primeiro determinar a variação no esforço cortante, $\Delta V = \int w\,(x)\,dx$, em seguida, para determinar a variação no momento fletor , $\Delta M = \int V\,dx$, se a curva de carga $w = w(x)$ é um polinômio de grau n, $V = V(x)$ será uma curva de grau $n + 1$ e $M = M(x)$ será uma curva de grau $n + 2$.

Exemplo 4 (7.74)

Determine os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga.



Exemplo 4

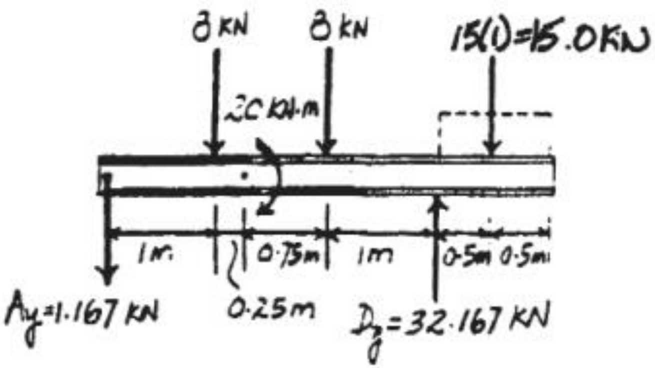
Support Reactions:

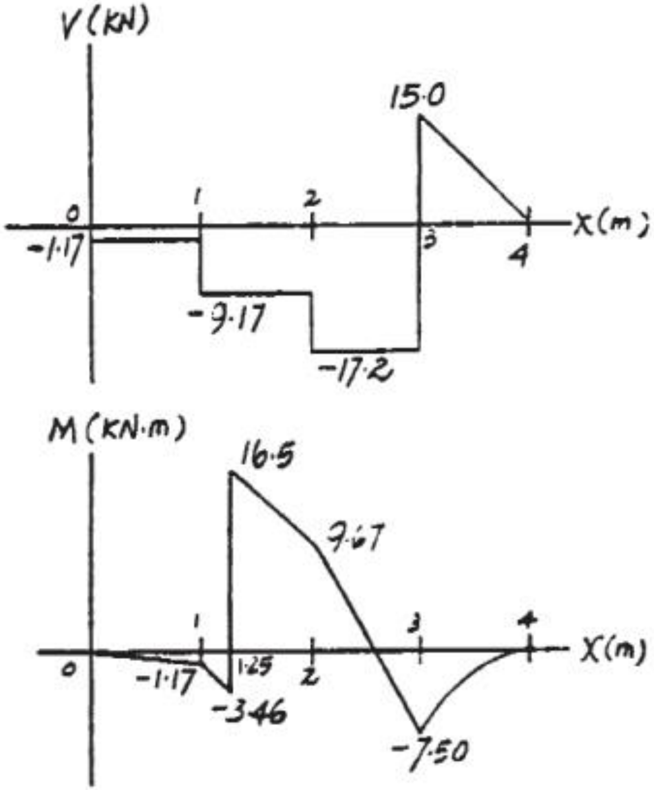
$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad D_y(3) - 8(1) - 8(2) - 15.0(3.5) - 20 = 0$

$D_y = 32.167 \text{ kN}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 32.167 - 8 - 8 - 15.0 - A_y = 0$

$A_y = 1.167 \text{ kN}$





Cabos

Cabos flexíveis e correntes:

- Combinam resistência com leveza.
- Frequentemente são usados em estruturas para suportar e transmitir cargas de um membro para outro.
- Quando usados para suportar pontes suspensas e carretilhas, os cabos formam o principal elemento de suporte de carga da estrutura.

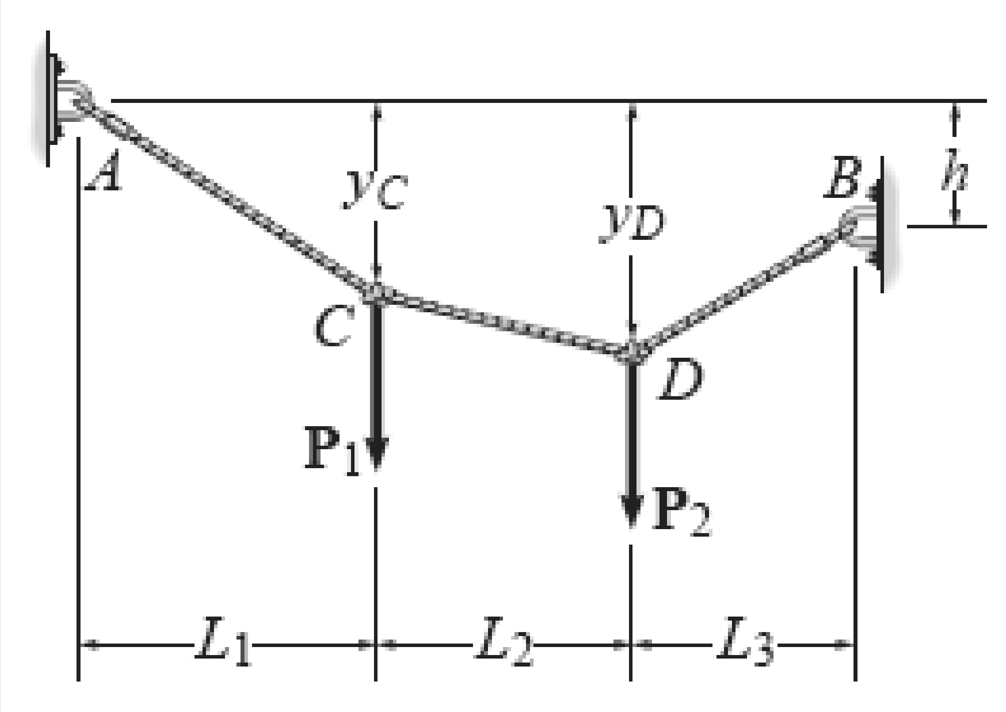
Cabos

Três casos serão considerados na análise a seguir:

- Cabo sujeito a cargas concentradas

Quando um cabo de peso desprezível suporta várias cargas concentradas, o cabo assume a forma de vários segmentos de linha reta, cada um sujeito a uma força de tração constante.

Considere, por exemplo, o cabo mostrado na figura abaixo:



Cabos

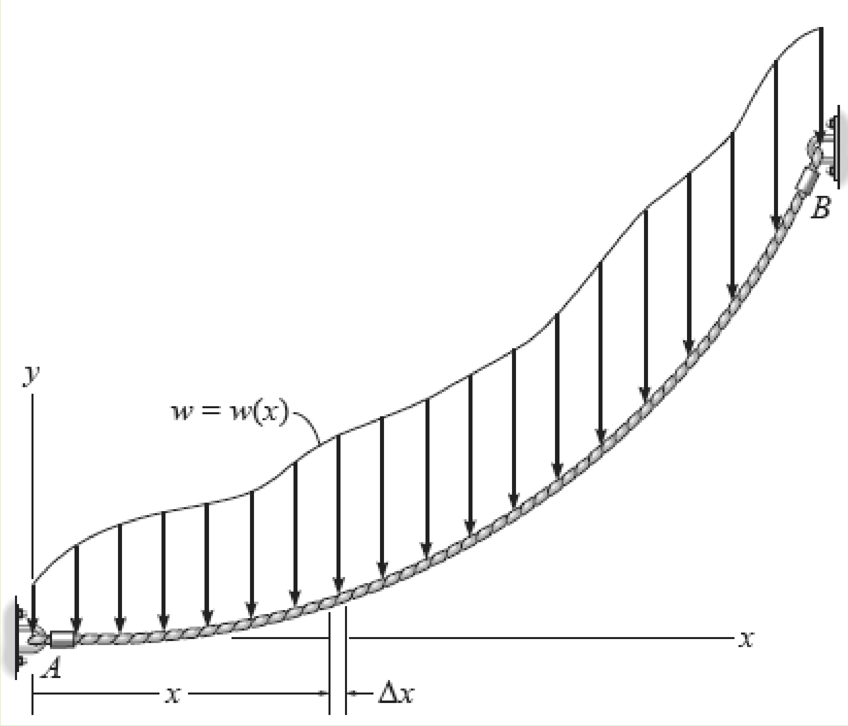
O problema é determinar as nove incógnitas consistindo na tração em cada um dos três segmentos, as quatro componentes da reação em A e B, e as duas quedas y_C e y_D nos pontos C e D. Para a solução, podemos escrever duas equações de equilíbrio de força em cada um dos pontos A, B, C e D. Isso resulta em um total de oito equações.

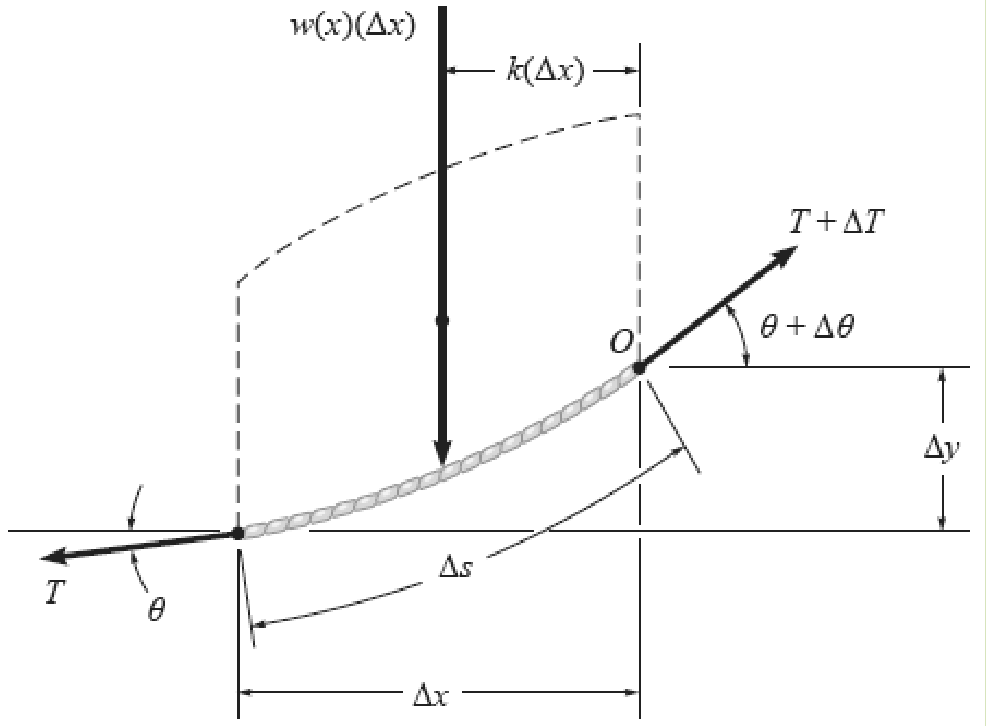
Outra possibilidade, porém, é especificar uma das flechas, seja y_C ou y_D, ao invés do comprimento do cabo. Fazendo isso, as equações de equilíbrio são então suficientes para obter as forças incógnitas e a flecha remanescente.

Vamos analisar o caso de um cabo sem peso

Cabo sujeito a uma carga distribuída

Vamos considerar o cabo sem peso mostrado na figura abaixo:





O diagrama de corpo livre de um segmento pequeno do cabo tendo um comprimento Δs *é* mostrado na figura acima

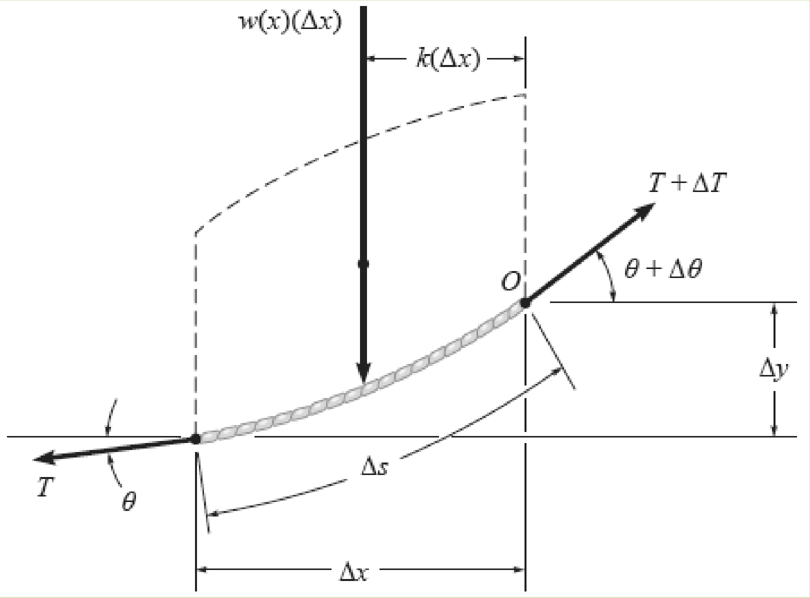
Cabo sujeito a uma carga distribuída

A carga distribuída é representada por sua força resultante $w(x)\Delta x$, que atua a uma distância fracionária $k(\Delta x)$ do ponto *O*, onde $0 < k < 1$. Aplicando as equações de equilíbrio, temos:

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0; \qquad -T\cos\theta + (T + \Delta T)\cos(\theta + \Delta\theta) = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad -T\,\text{sen}\,\theta - w(x)(\Delta x) + (T + \Delta T)\,\text{sen}(\theta + \Delta\theta) = 0$$

$$\curvearrowright + \sum M_O = 0; \qquad w(x)\Delta x\, k(\Delta x) - T\cos\theta\,\Delta y + T\,\text{sen}\,\theta\,\Delta x = 0$$



Dividindo cada uma dessas equações por Δx e tomando o limite quando $\Delta x \to 0$, e, portanto, $\Delta y \to 0$ $\Delta\theta \to 0$ $\Delta T \to 0$ obtemos:

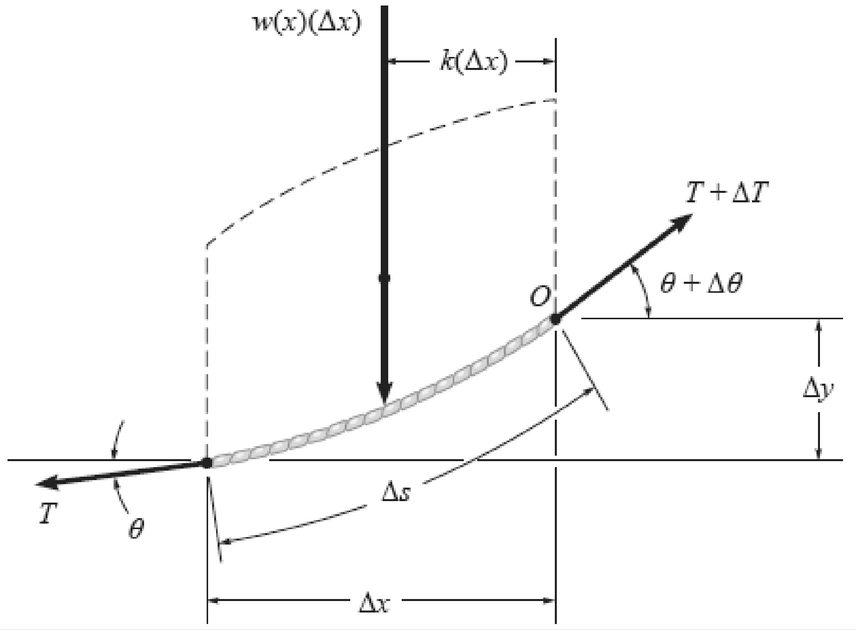
Cabo sujeito a uma carga distribuída

Dividindo cada uma dessas equações por Δx e fazendo o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, e, portanto, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta\theta \rightarrow 0$ e $\Delta T \rightarrow 0$, obtemos:

$$\frac{d(T\cos\theta)}{dx} = 0$$

$$\frac{d(T\,\text{sen}\,\theta)}{dx} - w(x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta$$



Agora podemos obter as componentes da tensão T na corda!

Cabo sujeito a uma carga distribuída

Integrando a primeira equação, temos:

$$T \cos \theta = \text{constante} = F_H$$

A componente horizontal

Integrando a segunda equação, temos:

$$T \operatorname{sen} \theta = \int w(x)\, dx$$

A componente vertical

Cabo sujeito a uma carga distribuída

Dividindo a equação $T \operatorname{sen} \theta = \int w(x)\, dx$ pela equação $T \cos \theta = \text{constante} = F_H$ elimina T. Então, usando a equação $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$ podemos obter a inclinação do cabo.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\int w(x) dx}{F_H}$$

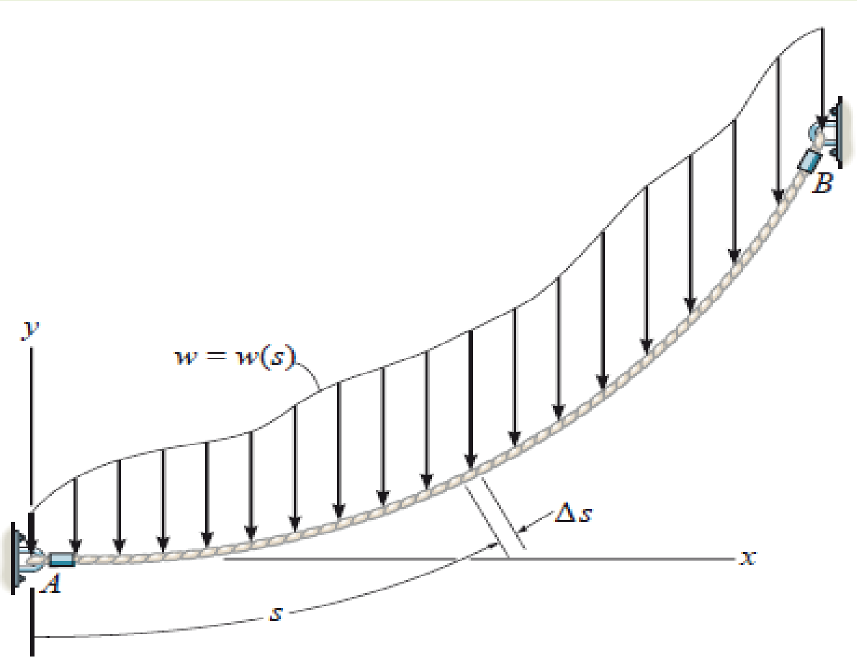
Realizando uma segunda integração, temos a função da curvatura da corda: y=f(x)

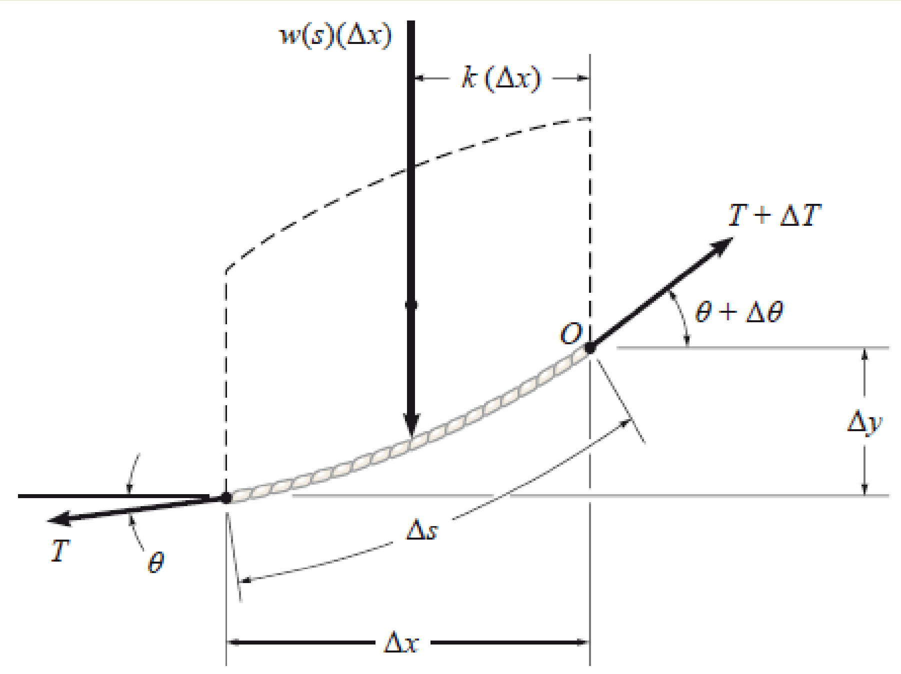
$$y = \frac{1}{F_H} \int \left(\int w(x)\, dx \right) dx$$

Cabos sujeitos ao seu próprio peso

Consideraremos a função de carga generalizada *w = w(s)* (*peso como função do comprimento s do cabo*) que atua ao longo do nosso cabo:

O diagrama de corpo livre para um segmento pequeno Δs do cabo é





Cabos sujeitos ao seu próprio peso

Portanto:

$$T \cos \theta = F_H$$

$$T \,\text{sen}\, \theta = \int w(s)\, ds$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} \int w(s)\, ds$$

Separando as variáveis de integração, obtemos (substituímos dy/dx por ds/dx como $ds=(dx^2+dy^2)^{1/2}$ e portanto $dy/dx = ((ds/dx)^2-1)^{1/2}$ portanto:

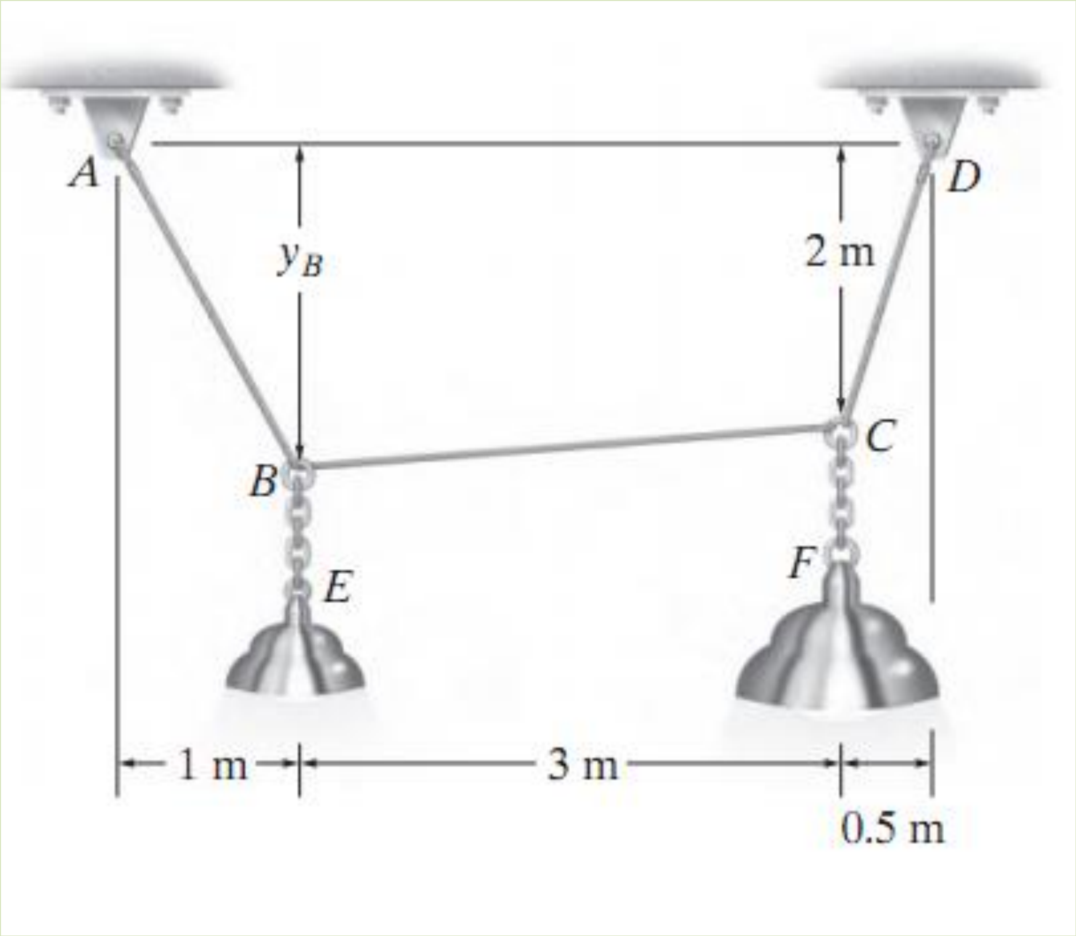
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{1}{{F_H}^2}\left(\int w(s)ds\right)^2}$$

$$x = \int \frac{ds}{\left[1 + \frac{1}{F_H^2}\left(\int w(s)\, ds\right)^2\right]^{1/2}}$$

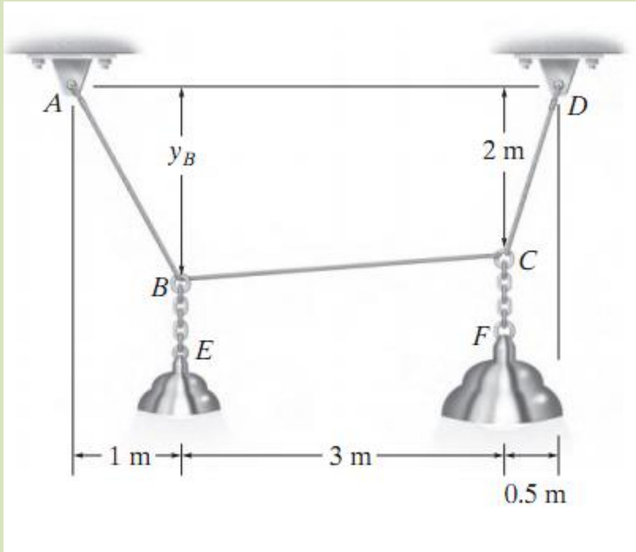
Exemplo

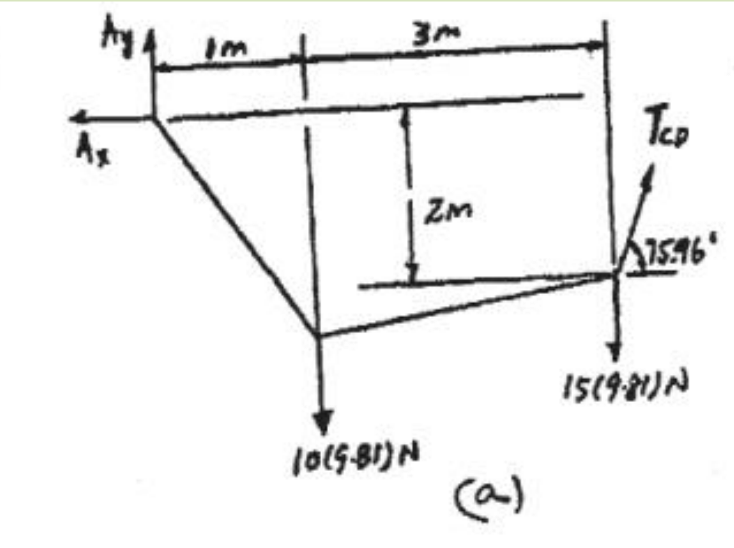
Exemplo 5 (7.94)

O cabo ABCD suporta a lâmpada E de massa 10 kg e a lâmpada F de massa 15 kg. Determine a tração máxima no cabo e a flecha y_B do ponto B.



Exemplo 5





From FBD (a)

$\curvearrowleft + \Sigma M_A = 0;$ $\quad T_{CD} \cos 75.96° (2) + T_{CD} \sin 75.96° (4)$

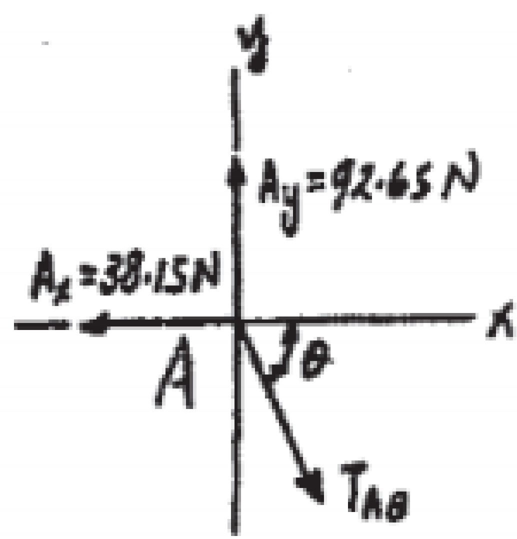
$- 15(9.81)(4) - 10(9.81)(1) = 0$

$T_{CD} = 157.30 \text{ N}$

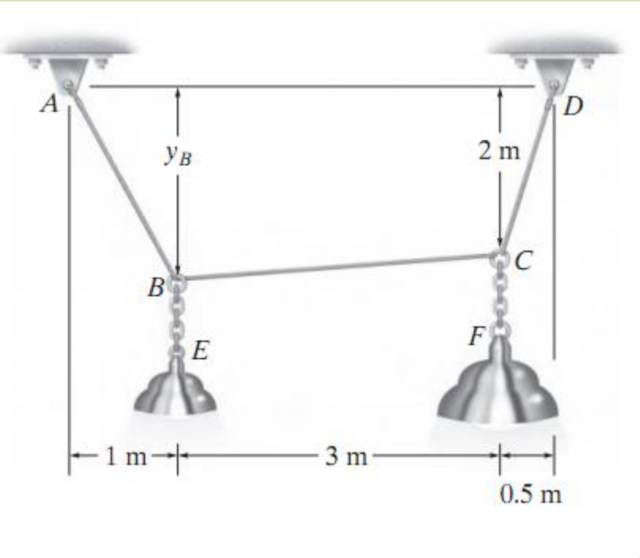
$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;$ $\quad 157.30 \cos 75.96° - A_z = 0 \qquad A_z = 38.15 \text{ N}$

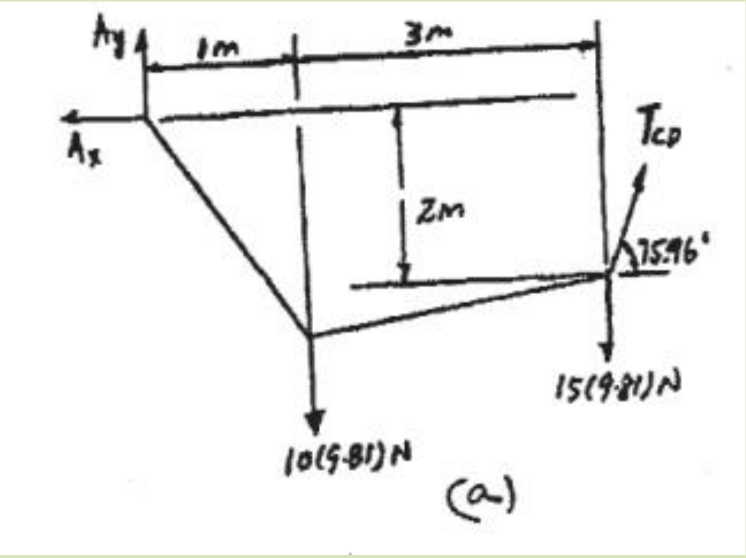
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\quad A_y + 157.30 \sin 75.96° - 15(9.81) - 10(9.81) = 0$

$A_y = 92.65 \text{ N}$



Exemplo 5





Joint A:

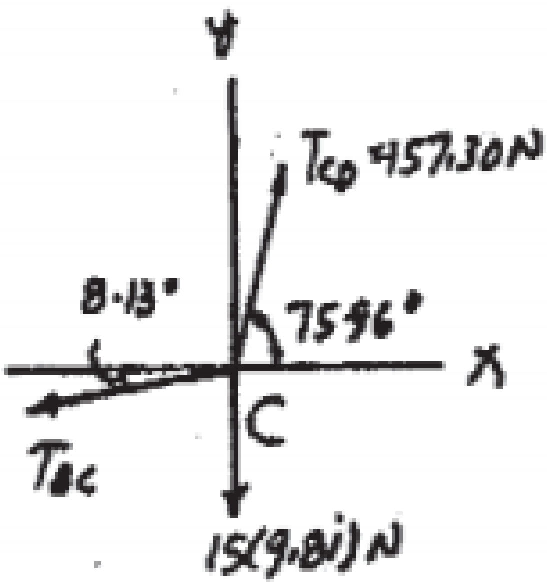
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;$ $\quad T_{AB}\cos\theta - 38.15 = 0$ $\quad$ (1)

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;$ $\quad 92.65 - T_{AB}\sin\theta = 0$ $\quad$ (2)

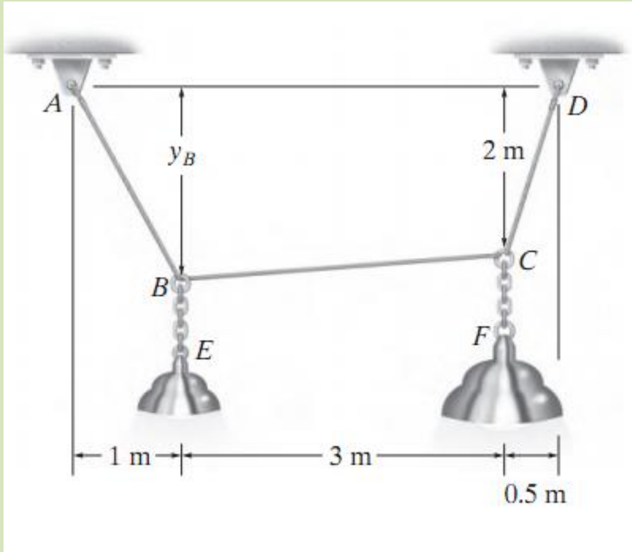
Solving Eqs. (1) and (2) yields:

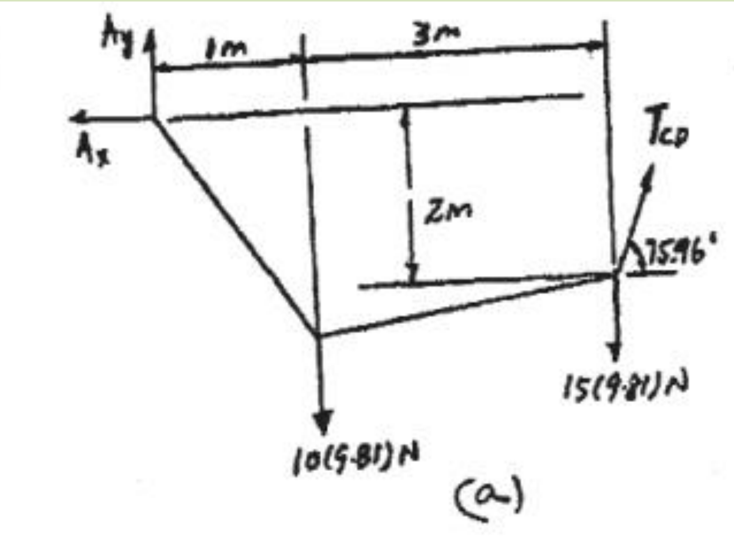
$\theta = 67.62°$ $\quad T_{AB} = 100.2\text{ N}$

$y_B = (1)\tan 67.62° = 2.43\text{ m}$ **Ans**



Exemplo 5





Joint C:

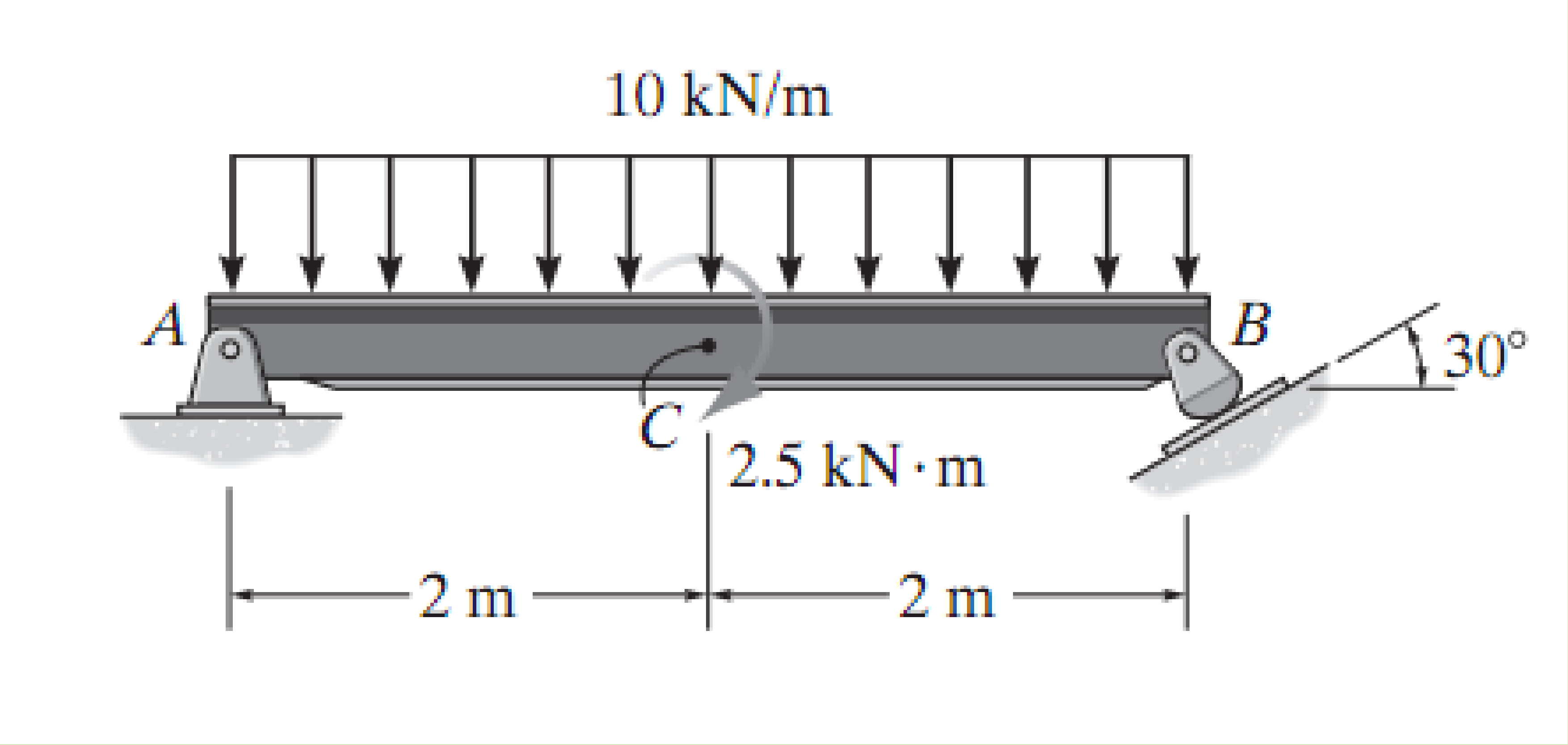
$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;$ $157.30 \cos 75.96° - T_{BC} \cos 8.13° = 0$ $T_{BC} = 38.54$ N

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $157.3 \sin 75.96° - 38.54 \sin 8.13° - 15(9.81) = 0$ (check)

$T_{max} = T_{CD} = 157$ N **Ans**

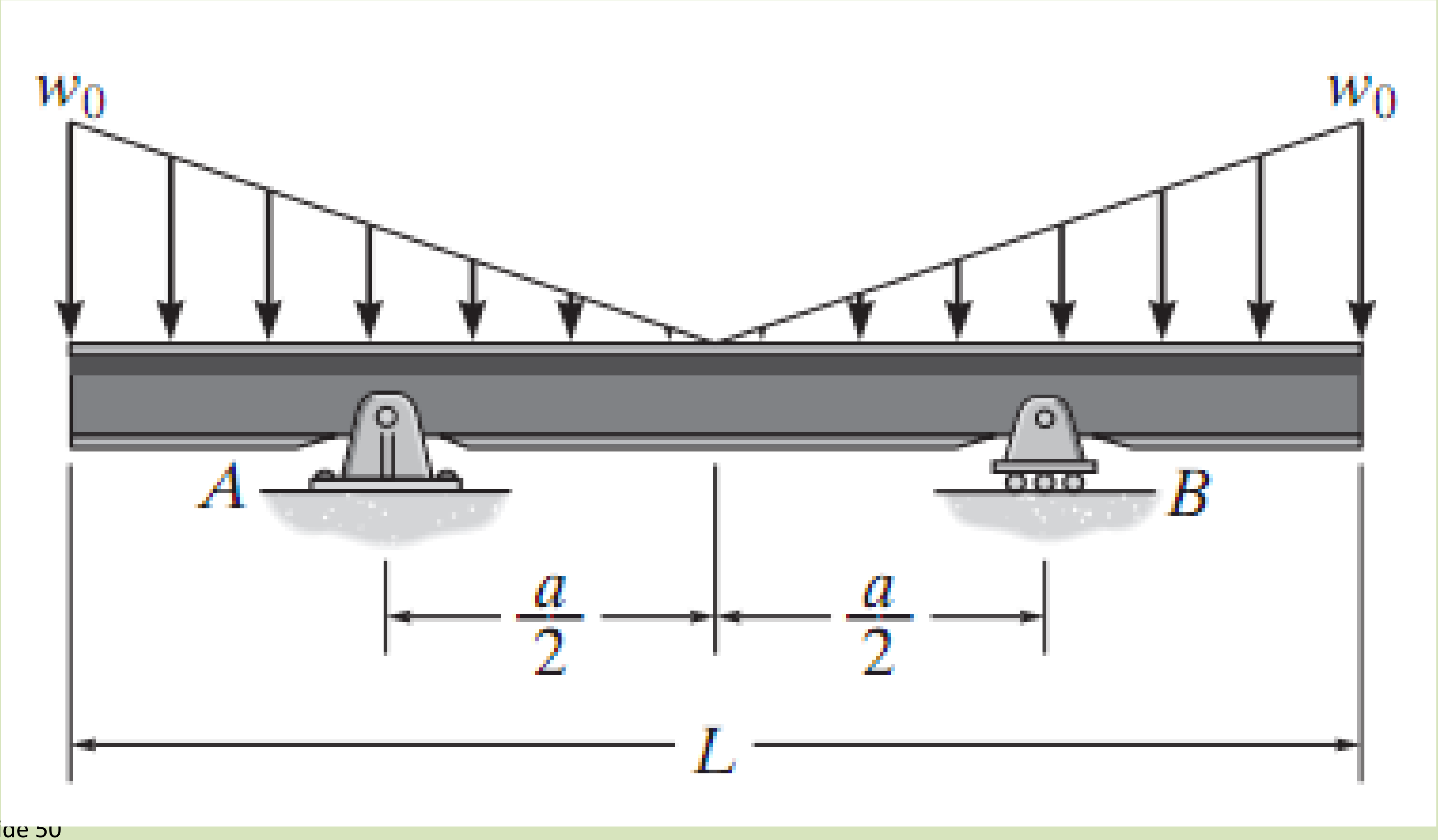
Exercício 1 (7.3)

Determine a força normal interna, o esforço cortante e o momento no ponto C da viga simplesmente apoiada. O ponto C está localizado à direita do momento de binário de 2,5 kNm



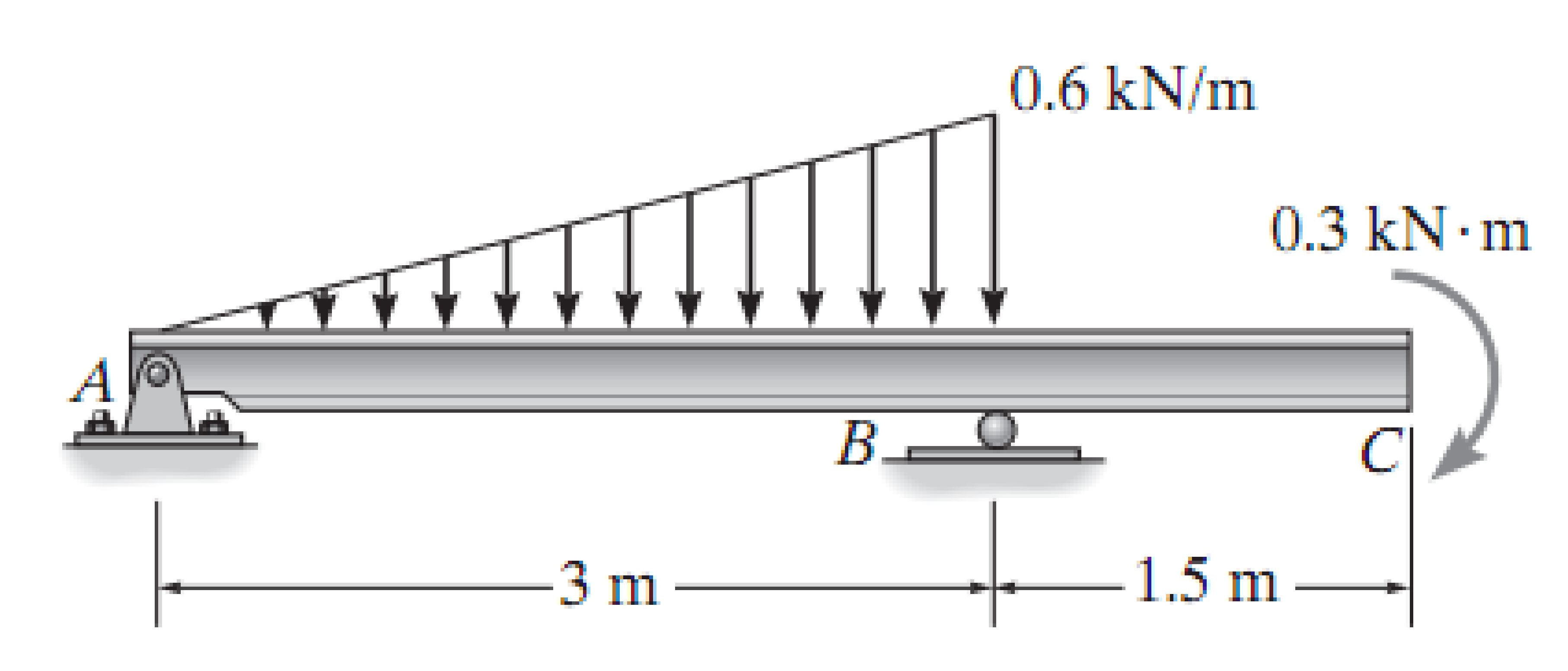
Exercício 2 (7.19)

Determine a distância “a” em termos da dimensão “L” da viga entre os apoios A e B simetricamente posicionados, de modo que o momento interno no centro da viga seja zero.



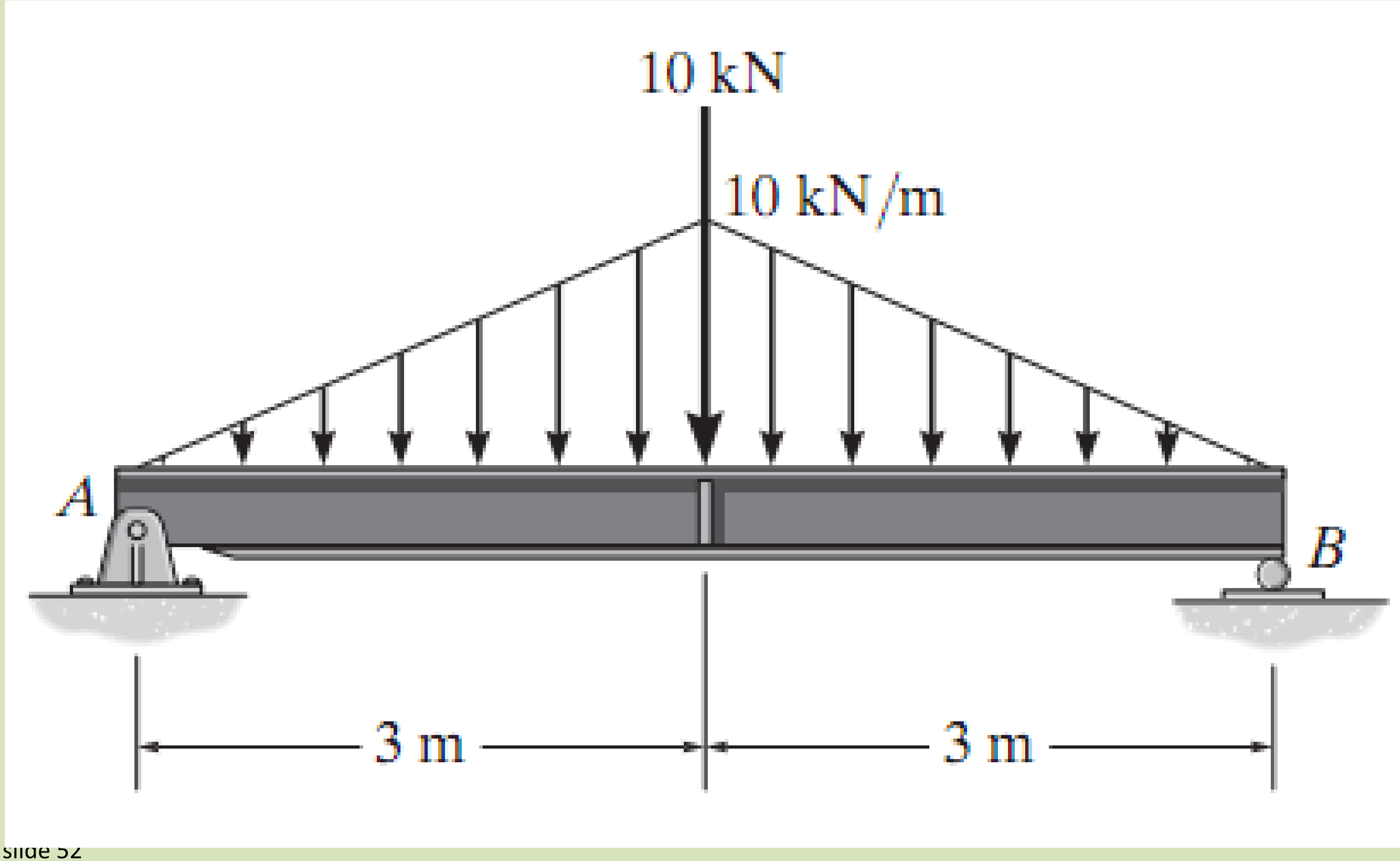
Exercício 3 (7.53)

Determine os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga.



Exercício 4 (7.80)

Determine os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para a viga.



Exercício 5 (7.95)

O cabo suporta as três cargas mostradas. Determine as flechas y_B e y_D dos pontos B e D. Considere P_1 = 2 kN e P_2 = 1,25 kN. Desconsidere o peso do cabo.