

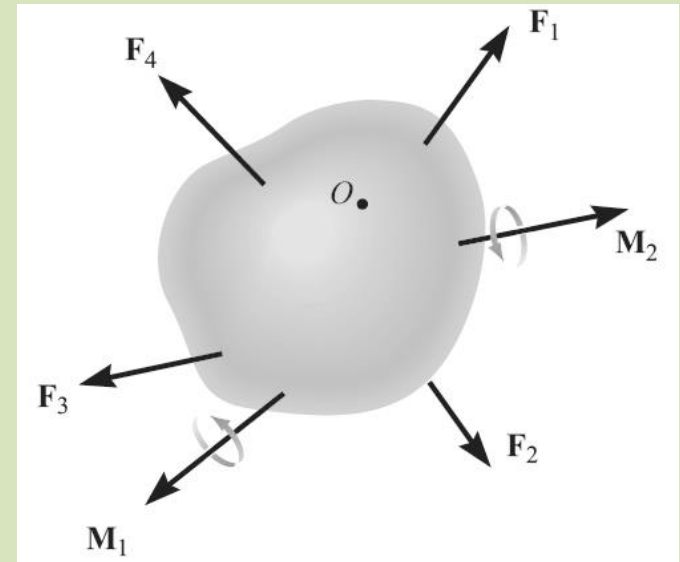
# Equilíbrio de um corpo rígido

## Objetivos da aula:

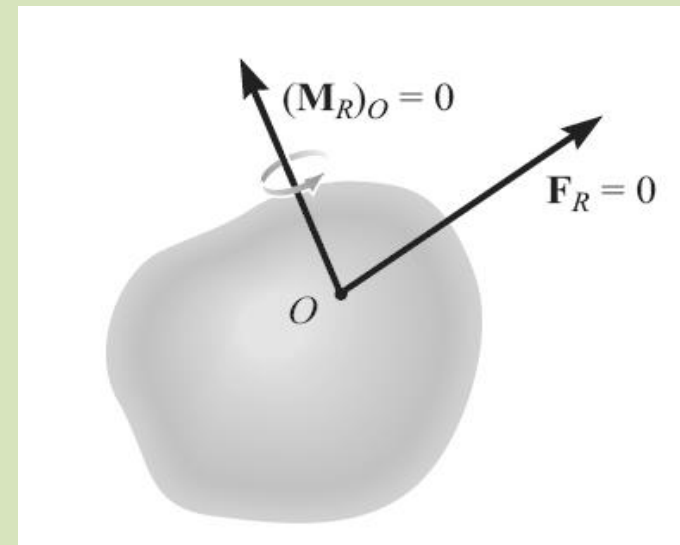
- Desenvolver as **equações de equilíbrio** para um corpo rígido.
- Introduzir o conceito do **diagrama de corpo livre** para um corpo rígido.
- Mostrar como resolver **problemas** de equilíbrio de corpo rígido usando as equações de equilíbrio.

# Condições de equilíbrio do corpo rígido

Como mostra a Figura, este corpo está sujeito a um **sistema externo de forças e momentos binários** que é resultado dos efeitos das forças gravitacionais, elétricas e magnéticas causadas pelos corpos adjacentes.



O sistema de forças e momentos de binários que atuam sobre um corpo podem ser **reduzidos a uma força resultante e um momento de binário** resultante equivalentes em qualquer ponto  $O$  arbitrário dentro ou fora do corpo. Se essa força e momento de binário resultantes são ambos iguais a zero, então dizemos que o corpo está em **equilíbrio**.



# Condições de equilíbrio do corpo rígido

Matematicamente, o equilíbrio de um corpo é expresso como:

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

Essas duas equações não são apenas **necessárias** para o equilíbrio; elas são também **suficientes**.

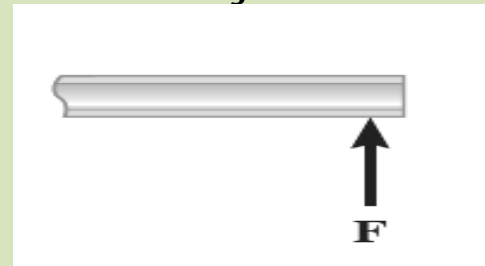
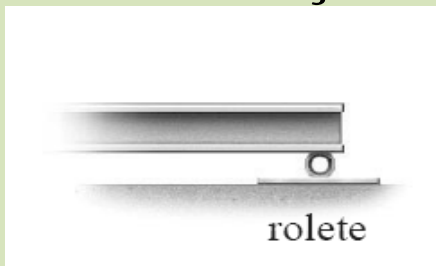
# Reações de apoio

Vamos analisar os vários tipos de reações que ocorrem em apoios e pontos de contato entre corpos sujeitos a sistemas de forças coplanares. Como regra geral:

- Se um apoio impede a translação de um corpo em uma determinada direção, então, uma **força é desenvolvida no corpo** nessa direção.
- Se a rotação também é impedida, **um momento de binário é exercido** sobre o corpo.

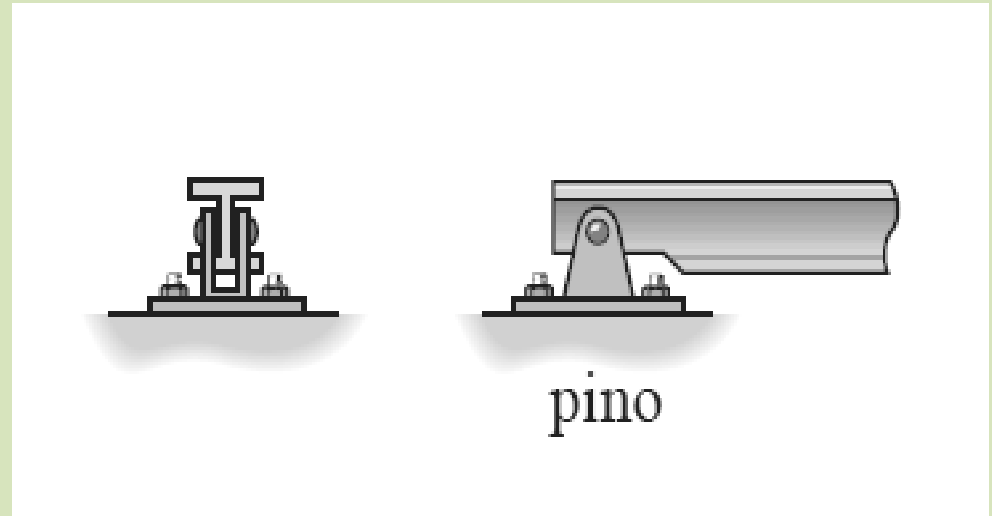
Por **exemplo**, vamos considerar três formas na qual um membro horizontal, como uma viga, é apoiado na sua extremidade.

- Um método consiste de um *rolete* ou cilindro. Como esse suporte apenas **impede que a viga *translade*** na direção vertical, o rolete só exercerá uma força sobre a viga nessa direção.

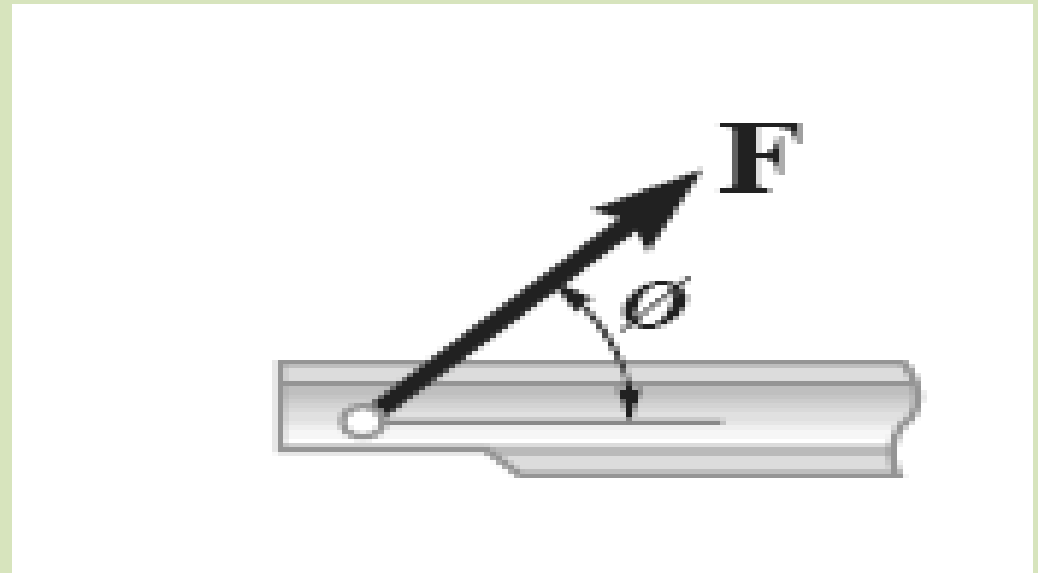


# Reações de apoio

A viga pode ser apoiada de uma forma **mais restritiva** por meio de um *pino*.

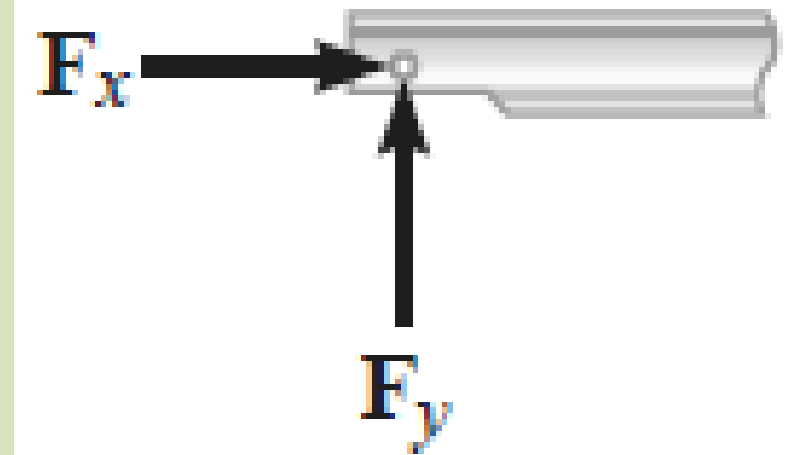
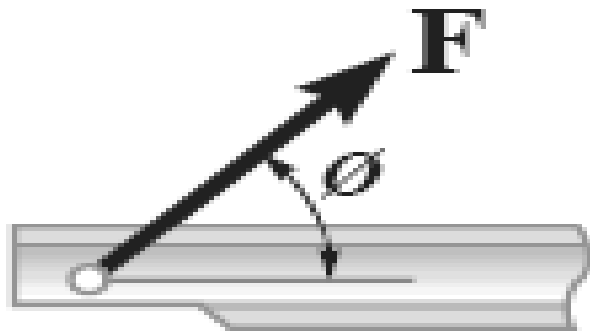


Aqui, o pino pode impedir a **translação da viga em qualquer direção  $\phi$**  e, portanto, o pino deve exercer uma força **F** sobre a viga nessa direção (não impede a rotação)



# Reações de apoio

Para fins de análise, geralmente é mais fácil representar essa força resultante  $\mathbf{F}$  por suas duas componentes retangulares  $\mathbf{F}_x$  e  $\mathbf{F}_y$ .

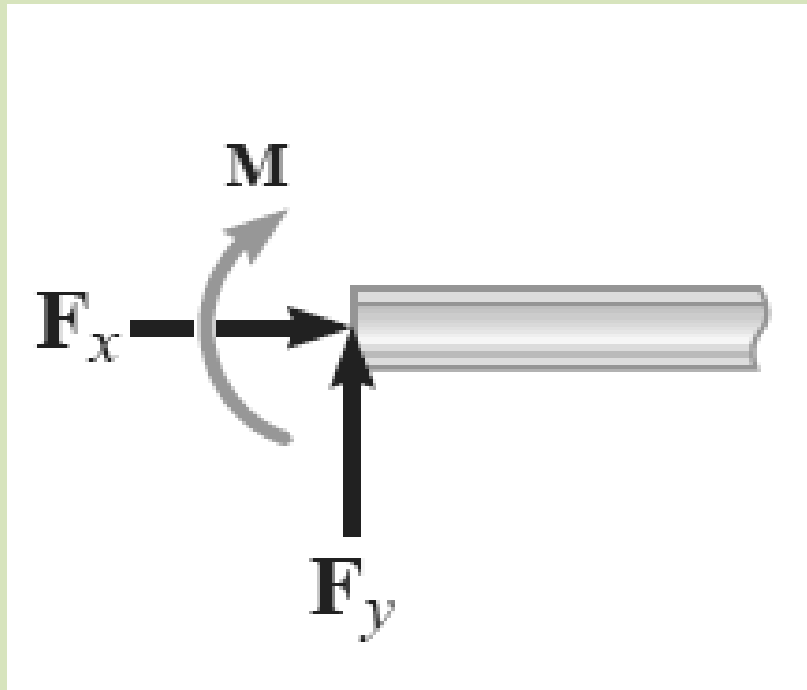


# Reações de apoio

A maneira mais restritiva de apoiar a viga seria usar um *apoio fixo*.

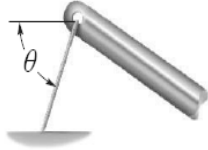
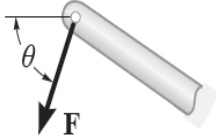
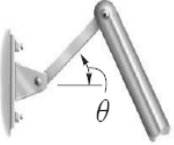


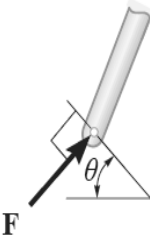
Esse apoio *impedirá tanto a translação quanto a rotação da viga*.

Para fazer isso, uma *força e momento de binário* devem ser desenvolvidos sobre a viga em seu ponto de conexão.

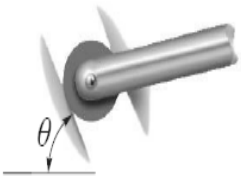
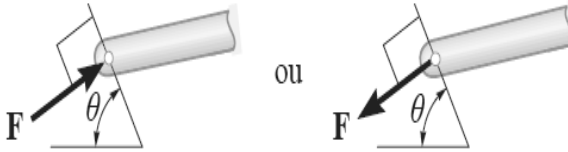

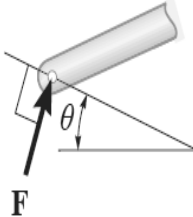
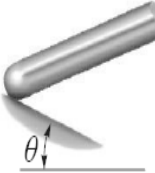
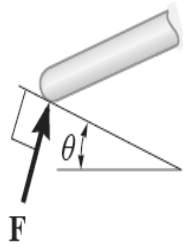


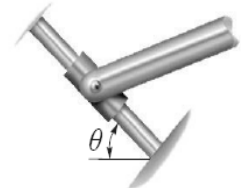
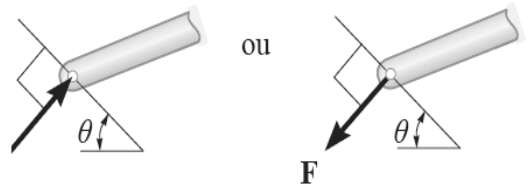

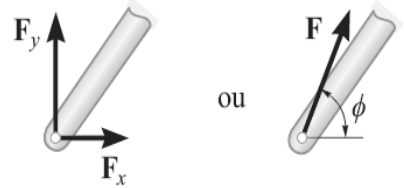

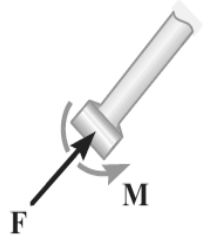

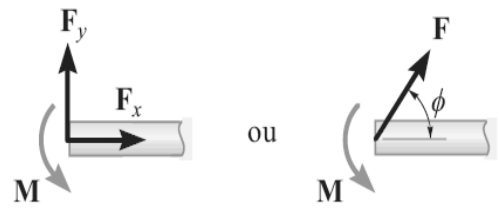
# Reações de apoio

A seguir são apresentados diferentes tipos de suportes para corpos rígidos sujeitos a sistemas de forças bidimensionais

Tipos de conexão	Reação	Número de incógnitas
<p>(1)</p>  <p>cabo</p>		<p>Uma incógnita. A reação é uma força de tração que atua para fora do membro na direção do cabo.</p>
<p>(2)</p>  <p>ligação sem peso</p>		<p>Uma incógnita. A reação é uma força que atua ao longo do eixo e ligação.</p>
<p>(3)</p>  <p>rolete</p>		<p>Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à superfície no ponto de contato.</p>



Tipos de conexão	Reação	Número de incógnitas
<p>(4)</p>  <p>rolete ou pino confinado em ranhura lisa</p>	 <p>ou</p>	<p>Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente a ranhura.</p>
<p>(5)</p>  <p>apoio oscilante</p>		<p>Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à superfície no ponto de contato.</p>
<p>(6)</p>  <p>superfície de contato lisa</p>		<p>Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à superfície no ponto de contato.</p>

Tipos de conexão	Reação	Número de incógnitas
<p>(7)</p>  <p>membro conectado por pino à um anel sobre haste lisa</p>		<p>Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à barra.</p>
<p>(8)</p>  <p>pino liso ou dobradiça</p>		<p>Duas incógnitas. As reações são duas componentes da força, ou a intensidade e a direção <math>\phi</math> da força resultante. Note que <math>\phi</math> e <math>\theta</math> não são necessariamente iguais [normalmente não, a menos que a barra mostrada seja uma ligação como em (2)].</p>
<p>(9)</p>  <p>membro fixo conectado ao colar em haste lisa</p>		<p>Duas incógnitas. As reações são o momento de binário e a força que age perpendicularmente à barra.</p>
<p>(10)</p>  <p>apoio fixo ou engaste</p>		<p>Três incógnitas. As reações são o momento de binário e as duas componentes da força, ou o momento de binário e a intensidade e direção <math>\phi</math> da força resultante.</p>

# Reações de apoio

Exemplos comuns de suportes reais são mostrados na seguinte sequência de fotos:



O cabo exerce uma força sobre o suporte, na direção do cabo.



O suporte *rocker* para esta viga mestra de ponte permite um movimento horizontal de modo que a ponte esteja livre para se expandir e contrair devido às mudanças de temperatura.

# Reações de apoio



Esta viga mestra de concreto está apoiada sobre a base que deve agir como uma superfície de contato lisa.



Esta construção utilitária é suportada por pinos no alto da coluna.



As vigas de solo desta construção são soldadas e, portanto, formam conexões fixas.

# Forças internas

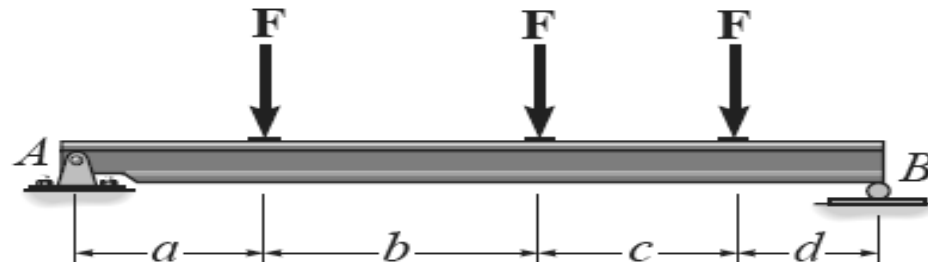
- As forças internas que atuam entre partículas adjacentes em um corpo sempre **ocorrem em pares** colineares de modo que tenham a mesma intensidade e ajam em direções opostas (**terceira lei de Newton**).
- Como essas forças se cancelam mutuamente, elas **não criarão um efeito externo sobre o corpo**. É por essa razão que as forças internas não devem ser incluídas no diagrama de corpo livre se o corpo inteiro precisa ser considerado.

# O peso e o centro de gravidade

- Quando um corpo está dentro de um campo gravitacional, cada uma de suas partículas possui um peso específico.
- O sistema de forças pode ser reduzido a uma única força resultante que age em um ponto específico. Essa força resultante é chamada de peso  $W$  do corpo, e a posição de seu ponto de aplicação, de *centro de gravidade*.

# Modelos idealizados

- Quando um engenheiro realiza uma análise de força de qualquer objeto, ele considera um **modelo analítico ou idealizado** correspondente que fornece resultados que se aproximam o máximo possível da situação real.
- Para isso, **escolhas cuidadosas** precisam ser feitas de modo que a seleção do tipo de apoio, o comportamento do material e as dimensões do objeto possam ser justificados.



# Procedimentos para análise

- Desenhe a forma esboçada
- Mostre todas as forças e momentos de binário
- Identifique cada carga e dimensões



# Pontos importantes

- Nenhum problema de equilíbrio deve ser resolvido sem antes desenhar o **diagrama de corpo livre**, a fim de considerar todas as forças e momentos de binário que atuam sobre o corpo.
- Se um suporte **impede a translação** de um corpo em uma determinada direção, então o suporte exerce uma força sobre o corpo nessa direção.
- Se a **rotação é impedida**, então o suporte exerce um momento de binário sobre o corpo.
- Estude a os suportes da tabela
- As **forças internas** nunca são mostradas no diagrama de corpo livre, já que elas ocorrem em pares colineares iguais, mas opostos e, portanto, se cancelam.
- **O peso** de um corpo é uma força externa e seu efeito é representado por uma única força resultante que atua sobre o centro de gravidade  $G$  do corpo.
- **Momentos de binário** podem ser colocados em qualquer lugar no diagrama de corpo livre, já que são **vetores livres**. As forças podem agir em qualquer ponto ao longo de suas linhas de ação, já que são vetores deslizantes.

# Equações de equilíbrio

As condições para o **equilíbrio em duas dimensões** são:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0$$

Um conjunto *alternativo* de três equações de equilíbrio independentes é (onde a linha que passa pelos pontos A e B não deve ser paralela ao eixo y):

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0$$

Um segundo conjunto alternativo de equações de equilíbrio é:

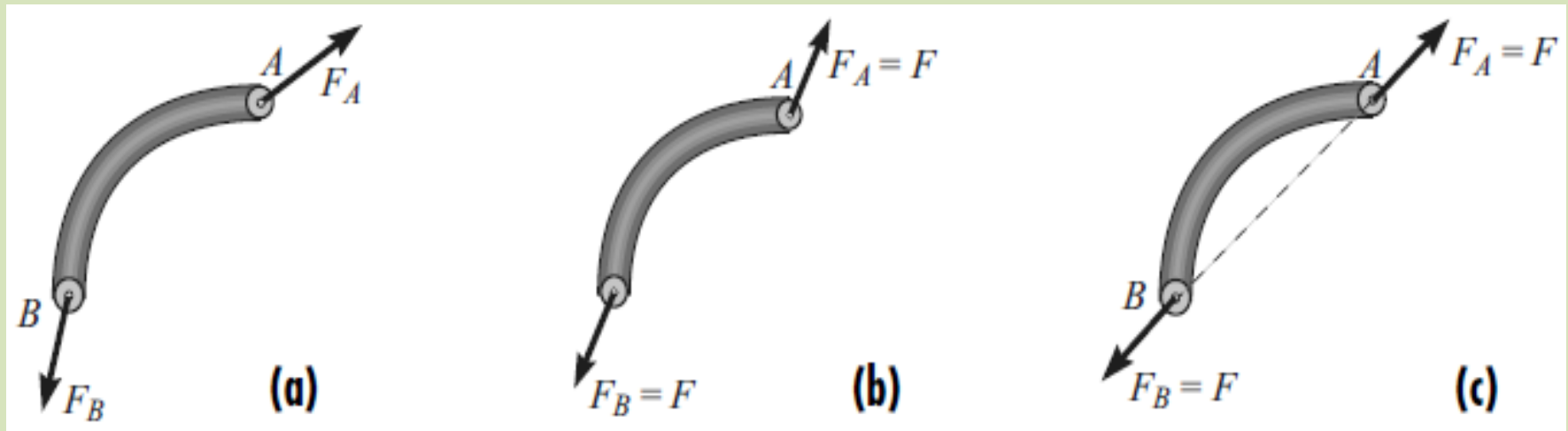
$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0$$

Aqui é necessário que os pontos A, B e C não estejam na mesma linha.

# Sistemas de duas e três forças

- Duas forças

Um *membro de duas forças* possui forças aplicadas em apenas dois de seus pontos.

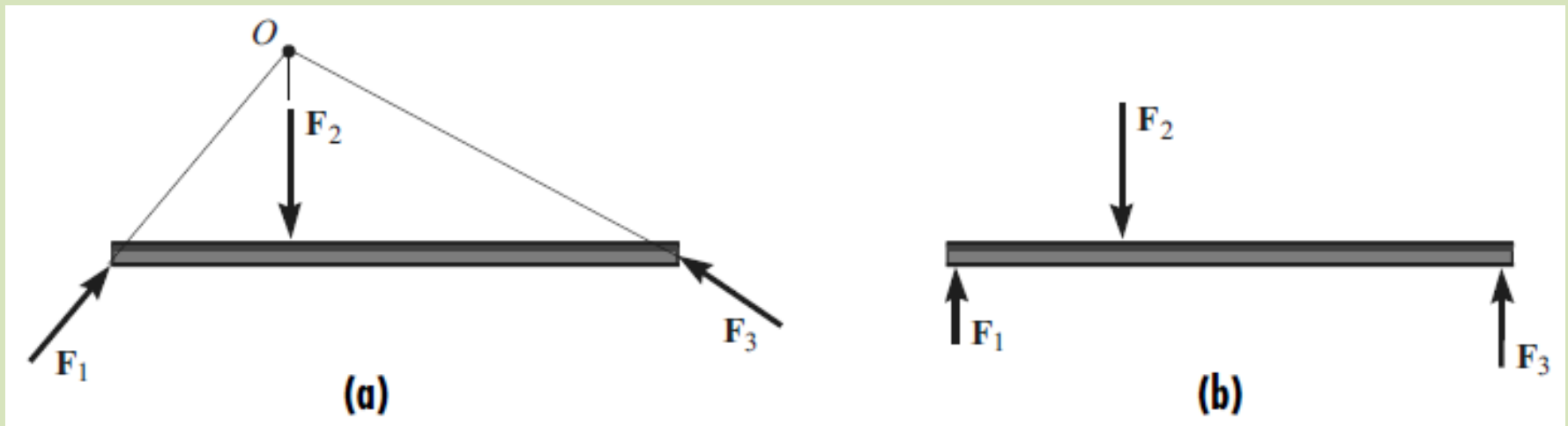


Para que qualquer membro de duas forças esteja em equilíbrio, as duas forças agindo sobre o membro *precisam ter a mesma intensidade, agir em direções opostas e ter a mesma linha de ação* direcionada ao longo da linha que une os dois pontos onde essas forças atuam.

# Sistemas de duas e três forças

- Membros de três forças

O equilíbrio de momentos pode ser satisfeito apenas se as três forças formarem um sistema de forças **concorrentes** ou **paralelas**.



# Equilíbrio em três dimensões





## Reações de apoio

As **forças reativas** e os **momentos de binário** que atuam em vários tipos de suportes e conexões quando os membros são vistos em **três dimensões** são relacionados na tabela a seguir.




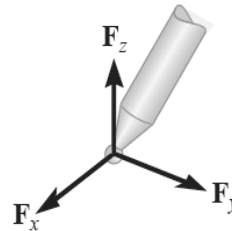
# Reações de apoio

Suportes para corpos rígidos sujeitos a sistemas de forças tridimensionais


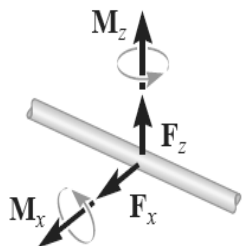

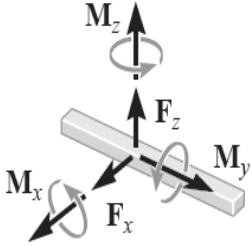
As **forças reativas** e os **momentos de binário** que atuam em vários tipos de suportes e conexões quando os membros são vistos em **três dimensões** são relacionados na tabela a seguir.

Tipos de conexão	Reação	Número de incógnitas
(1)  cabo		Uma incógnita. A reação é uma força que age para fora do membro na direção conhecida do cabo.
(2)  apoio de superfície lisa		Uma incógnita. A reação é uma força que age perpendicular à superfície no ponto de contato.

# Reações de apoio


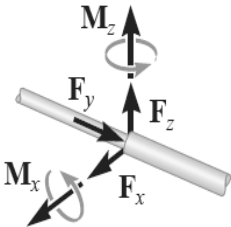

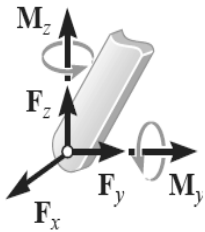
Tipos de conexão	Reação	Número de incógnitas
<p>(3)</p>  <p>rolete</p>		<p>Uma incógnita. A reação é uma força que age perpendicular à superfície no ponto de contato.</p>
<p>(4)</p>  <p>junta esférica</p>		<p>Três incógnitas. As reações são três componentes de força retangulares.</p>

# Reações de apoio

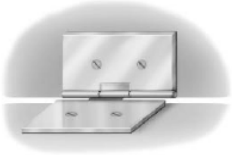
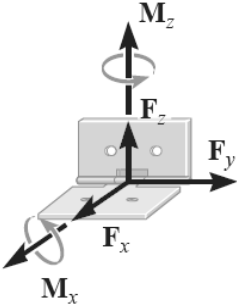

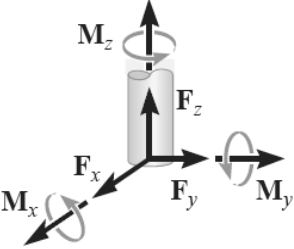
Tipos de conexão	Reação	Número de incógnitas
<p>(5)</p>  <p>mancal radial simples</p>		<p>Quatro incógnitas. As reações são duas componentes de força e duas componentes de momento de binário que agem perpendicularmente à barra. <b>Nota:</b> Os momentos de binário normalmente não são aplicados se o corpo for sustentado em algum outro local. Veja os exemplos.</p>
<p>(6)</p>  <p>mancal radial simples com eixo quadrado</p>		<p>Cinco incógnitas. As reações são duas componentes de força e três componentes de momento de binário. <b>Nota:</b> Os momentos de binário normalmente não são aplicados se o corpo for sustentado em algum outro local. Veja os exemplos.</p>



# Reações de apoio

Tipos de conexão	Reação	Número de incógnitas
<p>(7)</p>  <p>mancal axial simples</p>		<p>Cinco incógnitas. As reações são três componentes de força e duas componentes de momento de binário.  <b>Nota:</b> Os momentos de binário normalmente não são aplicados se o corpo for sustentado em algum outro local. Veja os exemplos.</p>
<p>(8)</p>  <p>pino liso simples</p>		<p>Cinco incógnitas. As reações são três componentes de força e duas componentes de momento de binário.  <b>Nota:</b> Os momentos de binário normalmente não são aplicados se o corpo for sustentado em algum outro local. Veja os exemplos.</p>

# Reações de apoio

Tipos de conexão	Reação	Número de incógnitas
<p>(9)</p>  <p>dobradiça simples</p>		<p>Cinco incógnitas. As reações são três componentes de força e duas componentes de momento de binário. <b>Nota:</b> Os momentos de binário normalmente não são aplicados se o corpo for sustentado em algum outro local. Veja os exemplos.</p>
<p>(10)</p>  <p>apoio fixo</p>		<p>Seis incógnitas. As reações são três componentes de força e duas componentes de momento de binário.</p>

# Reações de apoio

É importante reconhecer os símbolos usados para representar cada um desses suportes e entender claramente como as forças e os momentos de binário são desenvolvidos. Como no caso bidimensional:

- Uma força é desenvolvida por um suporte que limite a translação de seu membro conectado.
- Um momento de binário é desenvolvido quando a rotação do membro conectado é impedida.

# Equações de equilíbrio

As condições de equilíbrio de um corpo rígido sujeito a um sistema de forças tridimensional exigem que a **força e o momento de binário resultantes que atuam sobre o corpo sejam zero.**

## Equações de equilíbrio **vetoriais**

As duas condições para o equilíbrio de um corpo rígido podem ser expressas matematicamente na **forma vetorial** como:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = 0$$

# Equações de equilíbrio **escalares**

Se todas as **forças externas e momentos de binário** forem expressos na forma de vetor cartesiano e substituídas nas equações apresentadas anteriormente, temos:

$$\Sigma F = \Sigma F_x i + \Sigma F_y j + \Sigma F_z k = 0$$

$$\Sigma M_O = \Sigma M_x i + \Sigma M_y j + \Sigma M_z k = 0$$

Como as componentes **i, j e k** são **independentes**, as equações anteriores são satisfeitas desde que

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

e

$$\Sigma M_x = 0$$

$$\Sigma M_y = 0$$

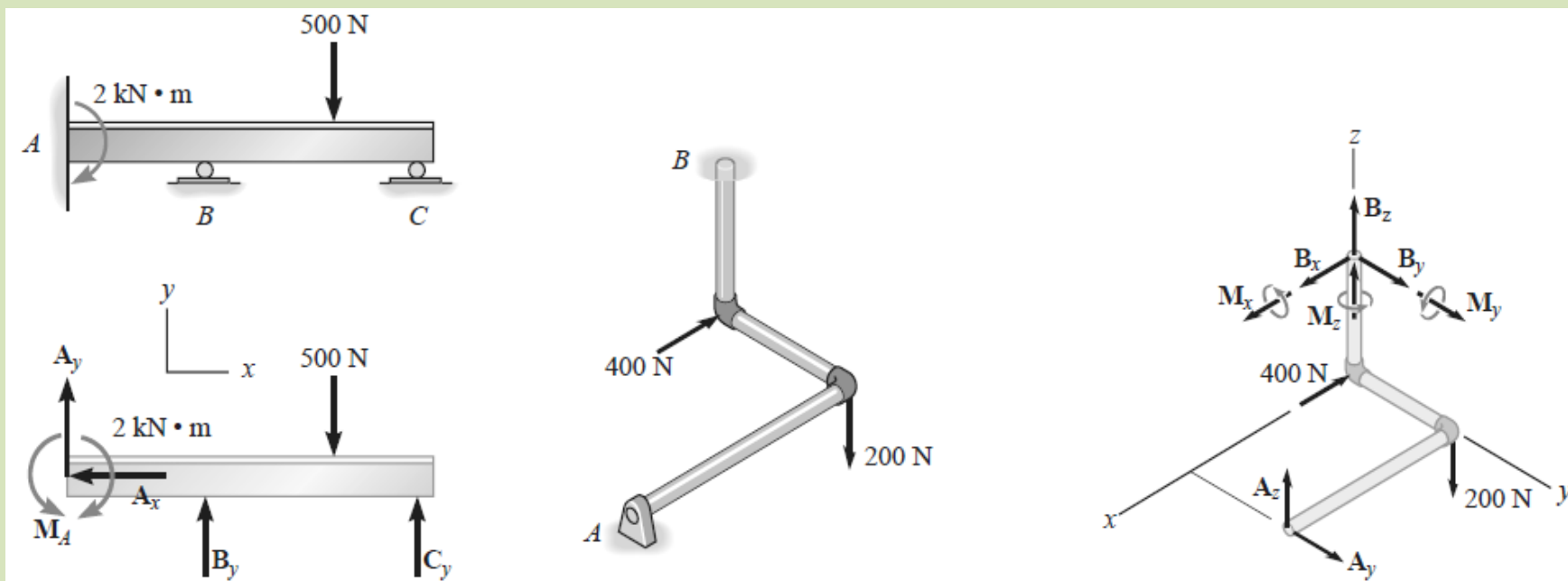
$$\Sigma M_z = 0$$

# Restrições e determinação estática

## Restrições redundantes

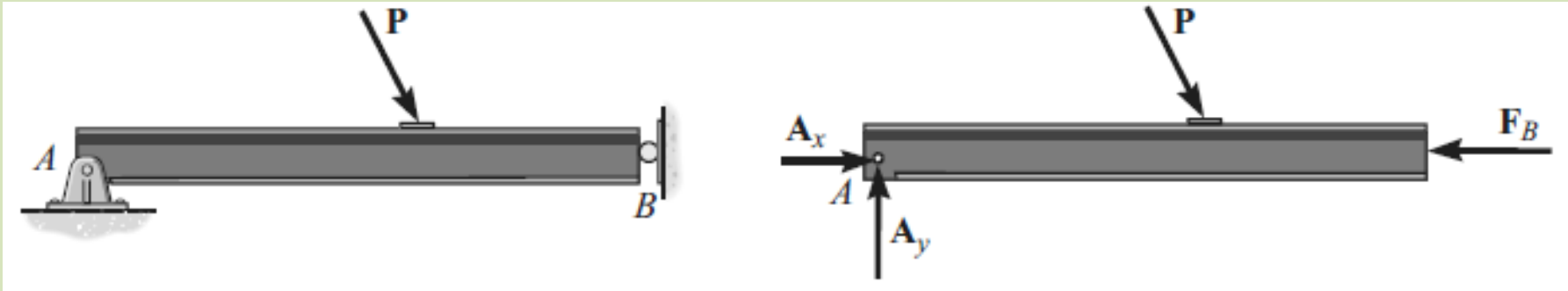
Quando um corpo possui suportes redundantes, ou seja, mais suportes do que o necessário para mantê-lo em equilíbrio, ele se torna **estaticamente indeterminado**.

Por **exemplo**, na viga temos 5 incógnitas ( $M_A$ ,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_y$  e  $C_y$ ) e 3 equações e no encanamento temos 8 incógnitas para 6 equações:



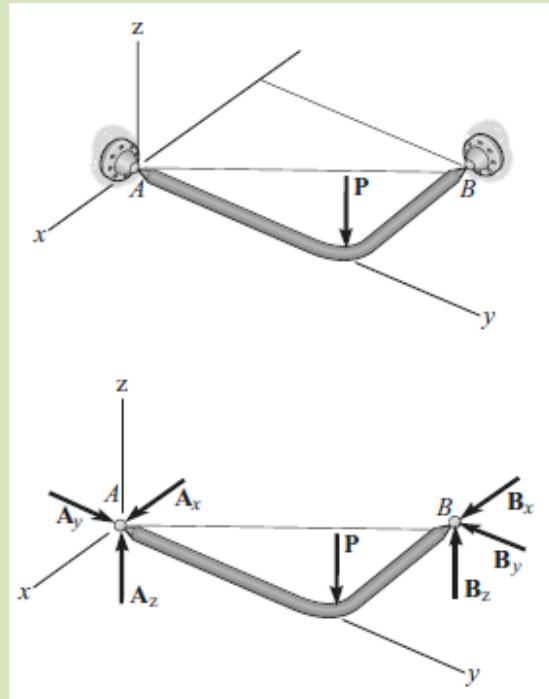
# Restrições impróprias

Ter o mesmo número de forças reativas desconhecidas que equações de equilíbrio disponíveis nem sempre garante que um corpo será estável quando sujeito a uma determinada carga. Por exemplo, neste caso as **forças reativas são concorrentes** em A, e a força P fará girar a barra (levemente)



# Restrições impróprias

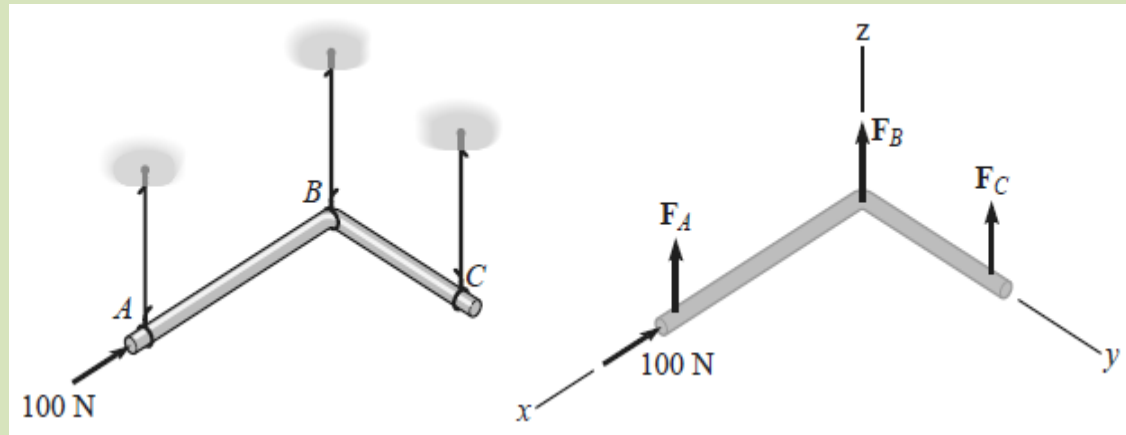
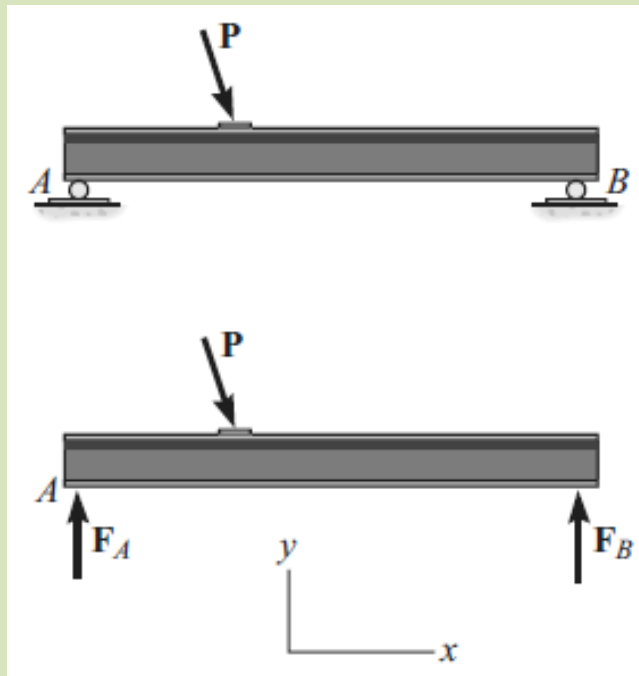
Em três dimensões, um corpo estará incorretamente restrito se **as linhas de ação de todas as forças reativas interceptarem um eixo comum**. Por exemplo,





# Restrições impróprias

Outra maneira em que a restrição imprópria leva à instabilidade ocorre quando as **forças reativas são todas paralelas**. Exemplos bi e tridimensionais (não há como equilibrar a componente  $x$ ):



# Procedimentos para análise

## Equações de equilíbrio

- Se as componentes de **força e momento**  $x$ ,  $y$ ,  $z$  parecem fáceis de determinar, aplique as seis equações de equilíbrio **escalares**; caso contrário, use as equações vetoriais.
- Não é necessário que o conjunto de eixos escolhido para a soma de forças coincida com o conjunto de eixos escolhido para a soma de momentos.
- Na verdade, pode-se escolher um **eixo em qualquer direção** arbitrária para somar forças e momentos.

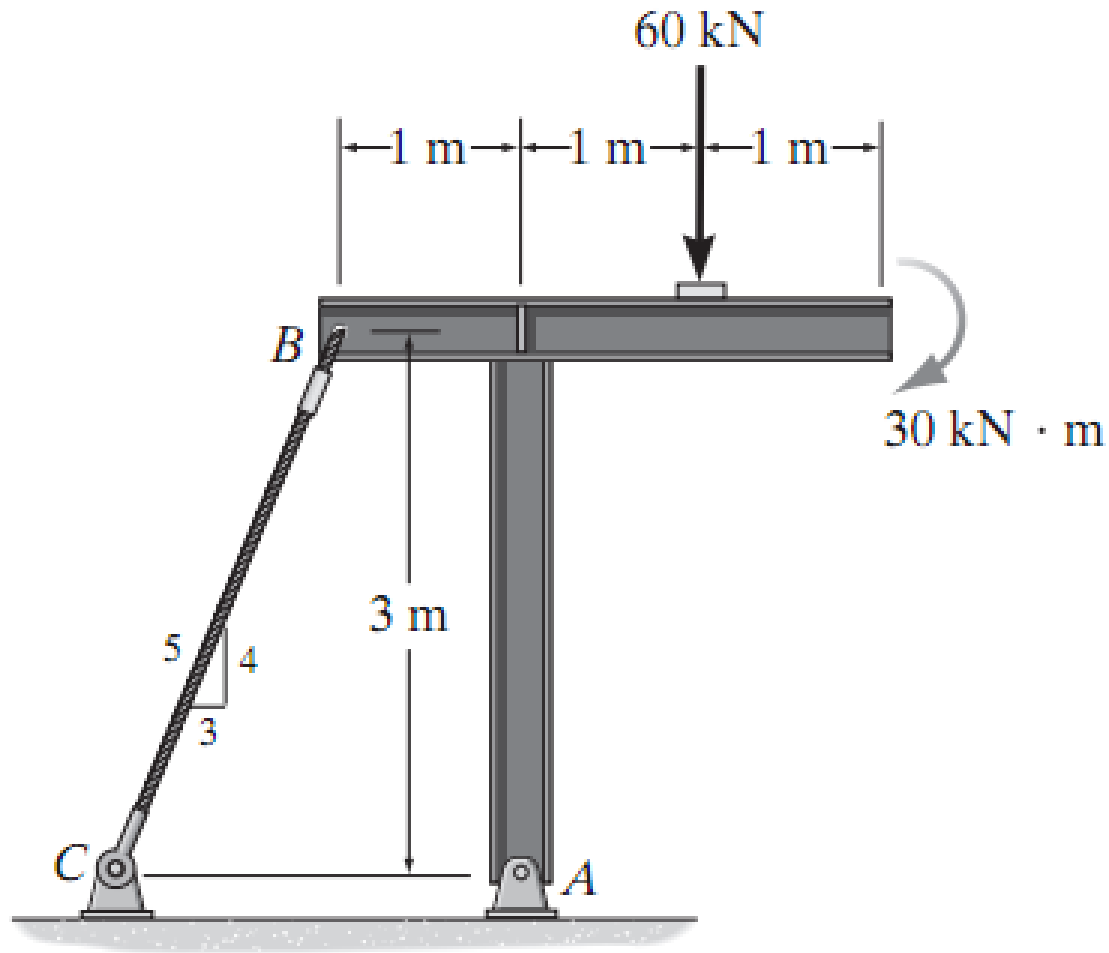
# Procedimentos para análise

## Equações de equilíbrio

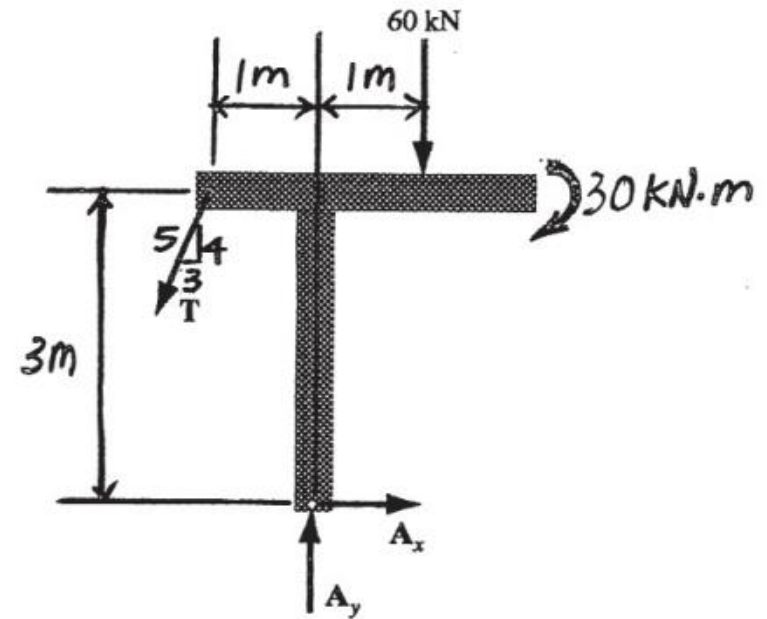
- Para a soma de momentos, escolha a direção de um eixo de modo que este **intercepte as linhas de ação do maior número possível de forças** conhecidas.
- Perceba que os momentos de forças passando por pontos nesse eixo e os momentos de forças que são paralelas ao eixo serão **zero**.
- Se a solução das equações de equilíbrio produz um escalar negativo a uma intensidade de força ou momento de binário, então o **sentido é oposto** ao considerado no diagrama de corpo livre.

## Exemplo 1

Determine as componentes vertical e horizontal da reação no pino A e a tração desenvolvida no cabo BC utilizado para sustentar a estrutura de aço.



# Exemplo 1



$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad T \left( \frac{3}{5} \right) (3) + T \left( \frac{4}{5} \right) (1) - 60(1) - 30 = 0$$

$$T = 34.62 \text{ kN} = 34.62 \text{ kN}$$

**Ans**

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x - 34.62 \left( \frac{3}{5} \right) = 0$$

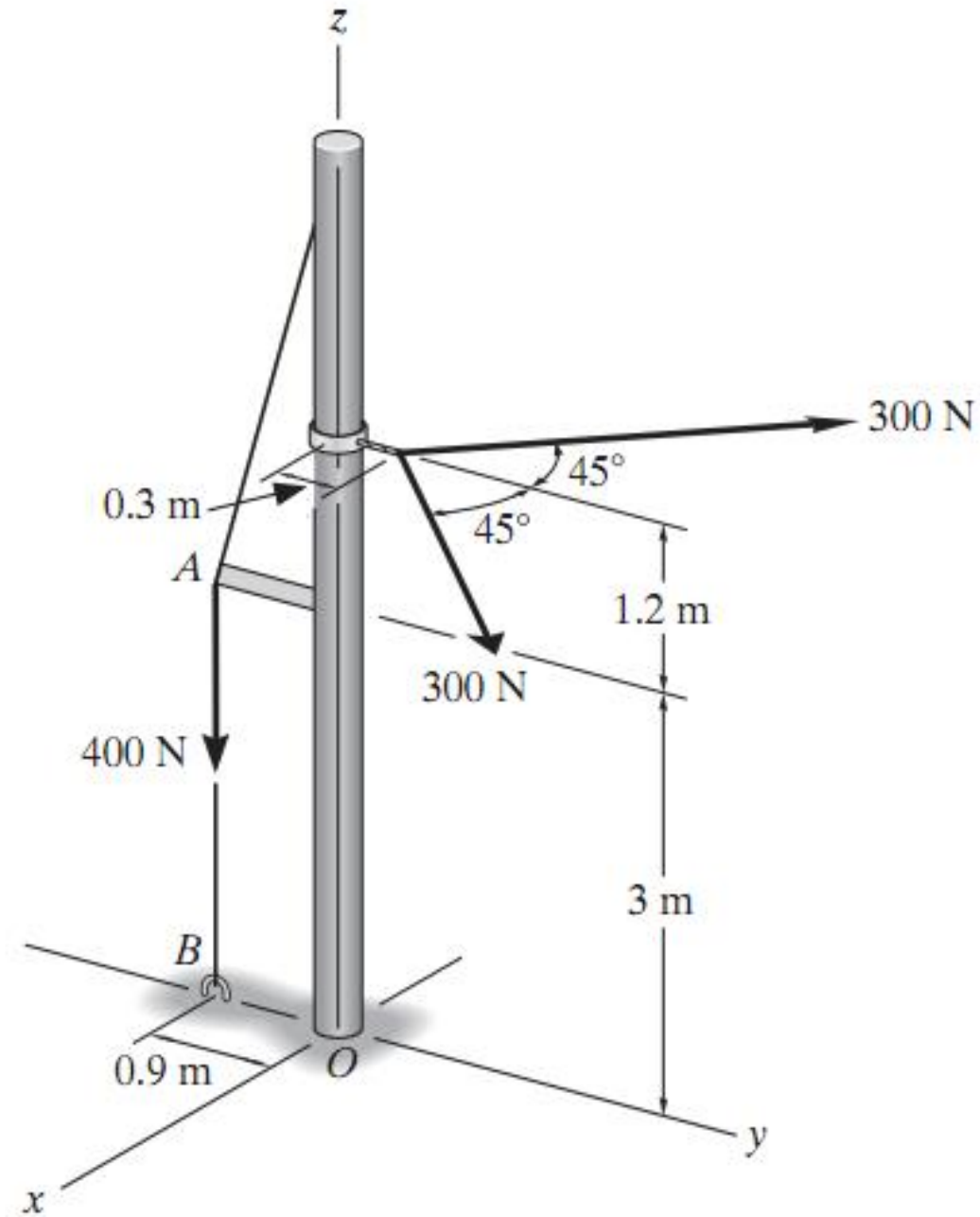
$$A_x = 20.77 \text{ kN} = 20.8 \text{ kN}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 60 - 34.62 \left( \frac{4}{5} \right) = 0$$

$$A_y = 87.69 \text{ kN} = 87.7 \text{ kN}$$

## Exemplo 2

O poste de uma linha de transmissão elétrica está sujeito a duas forças de 300 N do cabo, situadas em um plano paralelo ao plano  $x$ - $y$ . Se a tração no fio tirante  $AB$  é 400 N, determine as componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  da reação na base fixa  $O$  do poste



## Exemplo 2

$$\Sigma F_x = 0; \quad O_x + 300 \sin 45^\circ - 300 \sin 45^\circ = 0$$

$$O_x = 0 \quad \text{Ans}$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad O_y + 300 \cos 45^\circ + 300 \cos 45^\circ = 0$$

$$O_y = -424.3 \text{ N} \quad \text{Ans}$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad O_z - 400 = 0$$

$$O_z = 400 \text{ N} \quad \text{Ans}$$

$$\Sigma M_x = 0; \quad (M_O)_x + 400(0.9) - 2[300 \cos 45^\circ(4.2)] = 0$$

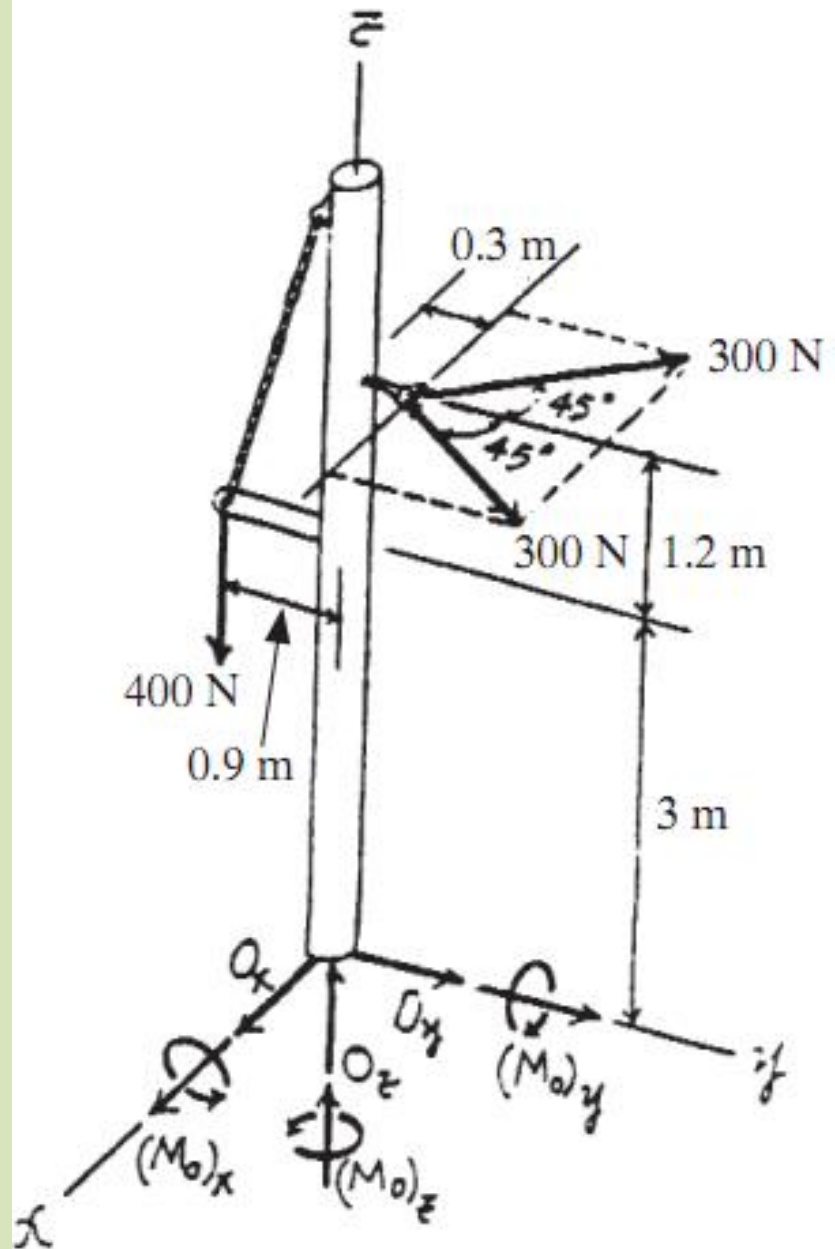
$$(M_O)_x = 1422 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{Ans}$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad (M_O)_y + 300 \sin 45^\circ(4.2) - 300 \sin 45^\circ(4.2) = 0$$

$$(M_O)_y = 0 \quad \text{Ans}$$

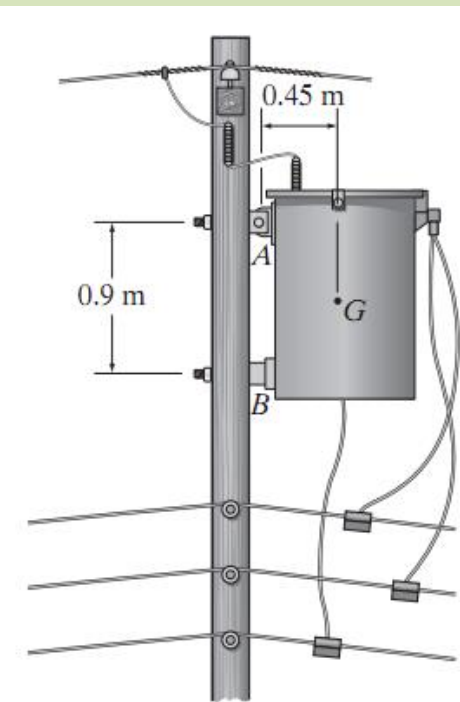
$$\Sigma M_z = 0; \quad (M_O)_z + 300 \sin 45^\circ(0.3) - 300 \sin 45^\circ(0.3) = 0$$

$$(M_O)_z = 0 \quad \text{Ans}$$



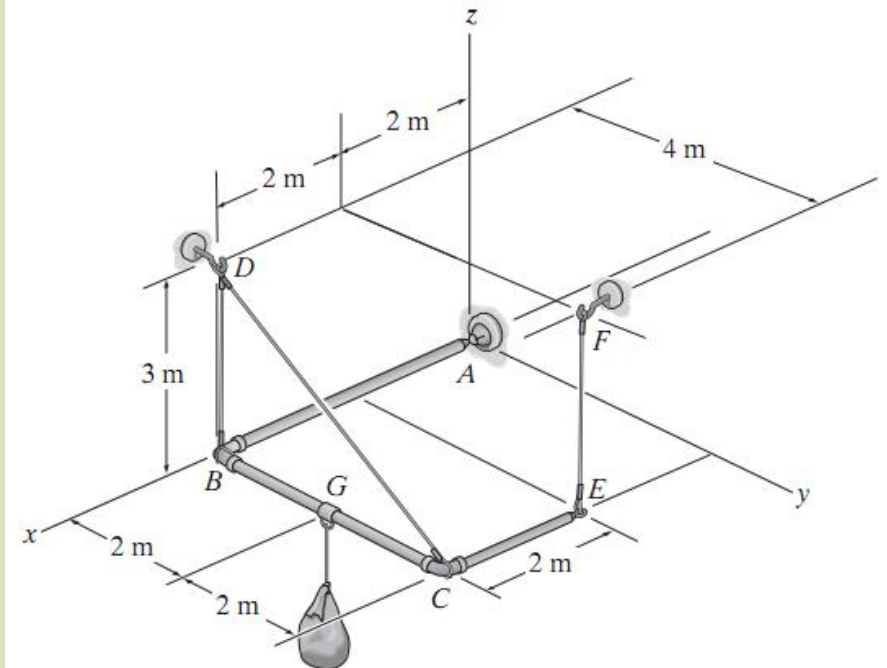
## Exercício 1

O transformador elétrico de 1500 N com centro de gravidade em  $G$  é sustentado por um pino em  $A$  e uma sapata lisa em  $B$ . Determine as componentes horizontal e vertical da reação no pino  $A$  e a reação da sapata  $B$  sobre o transformador



## Exercício 2

Se a carga tem um peso de 200 kN, determine as componentes  $x, y, z$  da reação na junta esférica  $A$  e a tração em cada um dos cabos





### Exercício 3

Determine as reações nos apoios A e B da estrutura

