

# Resultantes de um sistema de forças

## Objetivos da aula

- Discutir o conceito do **momento de uma força** e mostrar como calculá-lo em duas e três dimensões.
- Fornecer um método para **determinação do momento** de uma força em relação a um eixo específico.
- Definir o **momento de binário**.
- Apresentar métodos para a determinação das resultantes de sistemas de **forças não concorrentes**.
- Mostrar como converter uma **carga distribuída simples** em uma força resultante e seu ponto de aplicação.

# Momento de uma força

- Quando uma força não central é aplicada a um corpo, ela produzirá uma tendência de rotação do corpo em torno de um ponto que não está na linha de ação da força. Essa tendência de rotação algumas vezes é chamada de torque, mas normalmente é denominada **momento de uma força**, ou simplesmente momento.

# Intensidade

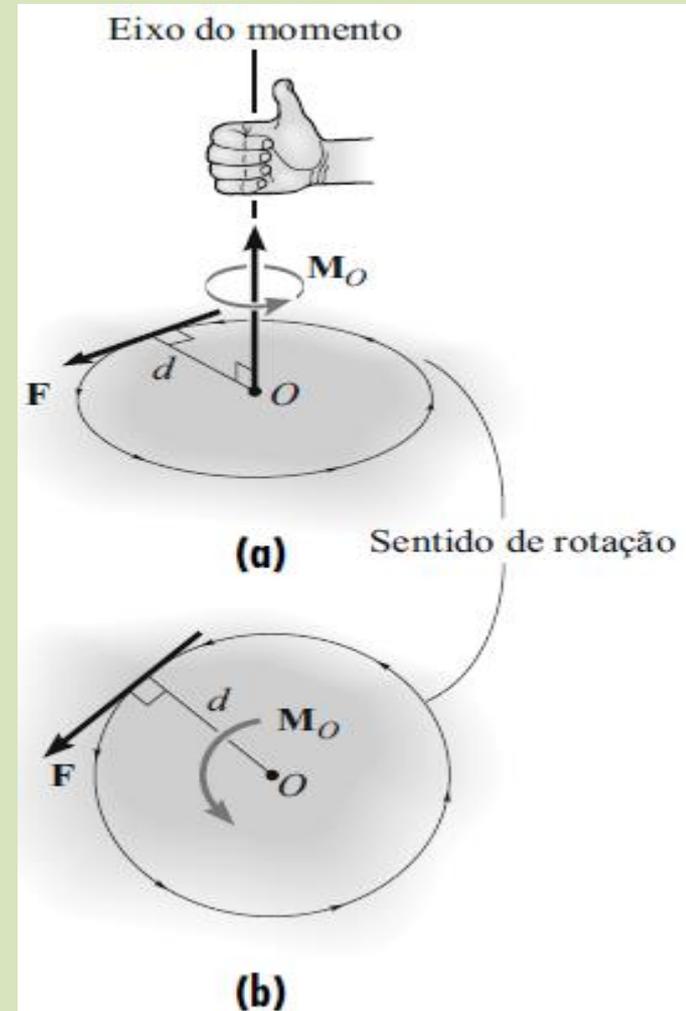
A **intensidade do momento** é  $M_O = F \cdot d$

onde  $d$  é o braço do momento ou distância perpendicular do eixo no ponto  $O$  até a linha de ação da força.

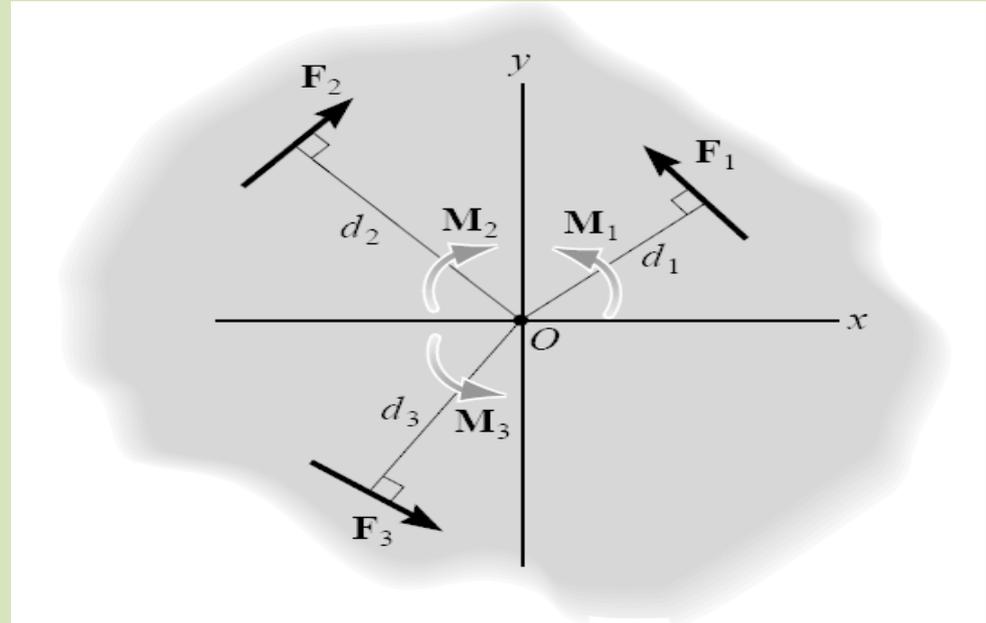
As unidades da intensidade do momento (força vezes a distância) são  $N \cdot m$  ou  $lb \cdot ft$ .

# Direção

A direção de  $M_O$  é definida pelo seu eixo do momento, o qual é **perpendicular ao plano que contém a força  $F$  e seu braço de momento  $d$** .



# Momento resultante



O momento resultante nessa figura é:

$$\curvearrowright + (M_R)_0 = \sum Fd; \quad (M_R)_0 = F_1 d_1 - F_2 d_2 + F_3 d_3$$

# Produto vetorial

O *produto vetorial* de dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  produz o vetor  $\mathbf{C}$ , que é escrito:

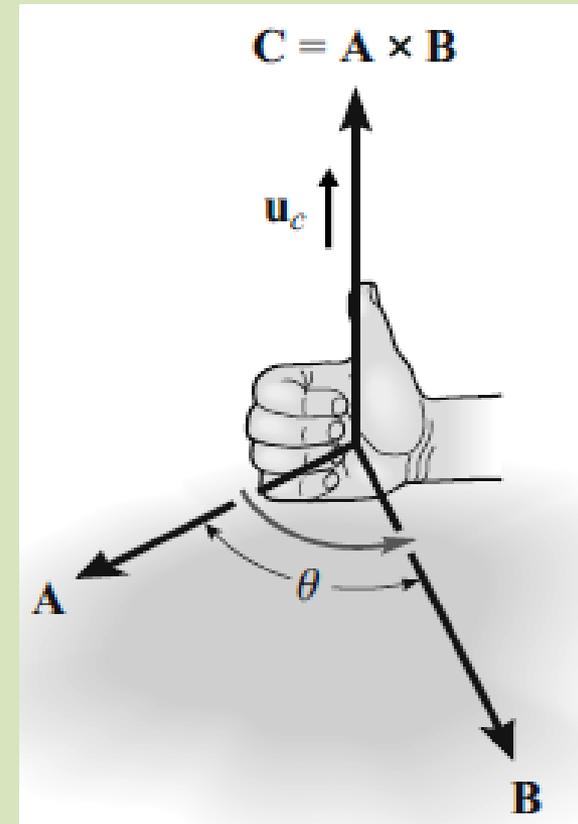
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

A intensidade de  $\mathbf{C}$  é definida como o produto das intensidades de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  vezes o seno do ângulo  $\theta$  entre eles ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ). Logo,

$$C = AB \sin \theta.$$

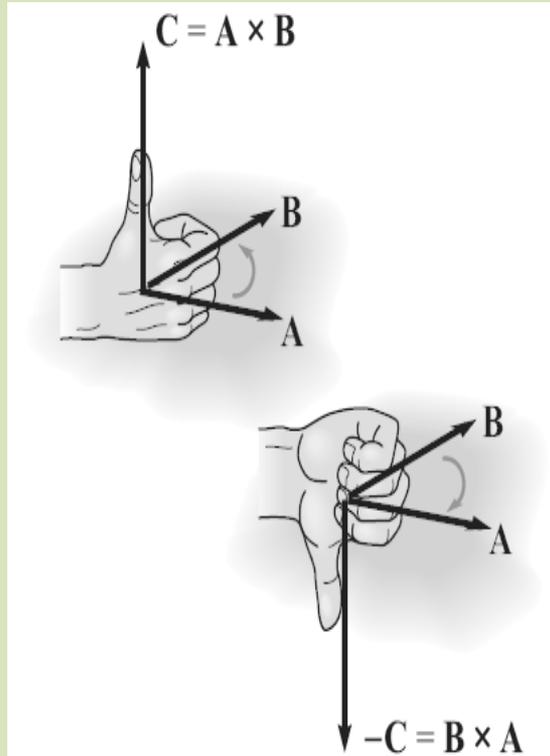
Para conhecer a direção e a intensidade de  $\mathbf{C}$ , podemos escrever:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin \theta) \mathbf{u}_C$$



# Propriedades do produto vetorial

- A **propriedade comutativa não é válida**; ou seja,  $A \times B \neq B \times A$ . Em vez disso,



$$A \times B = -B \times A$$

- Se o produto vetorial for multiplicado por um escalar  $a$ , ele obedece à **propriedade associativa**;

$$a (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) a$$

- O produto vetorial também obedece à **propriedade distributiva** da adição,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$$

Na forma **cartesiana** pode ser escrito como:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

# Momento de uma força – **formulação vetorial**

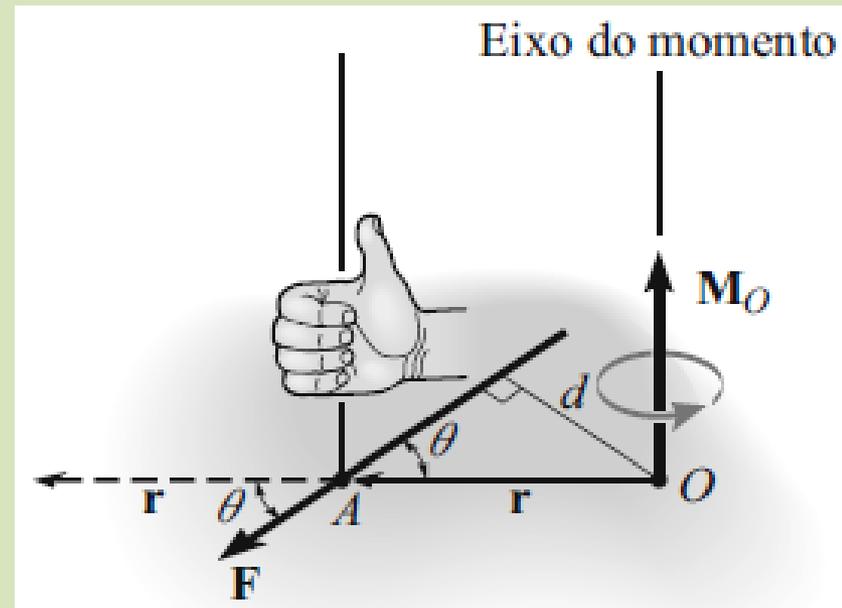
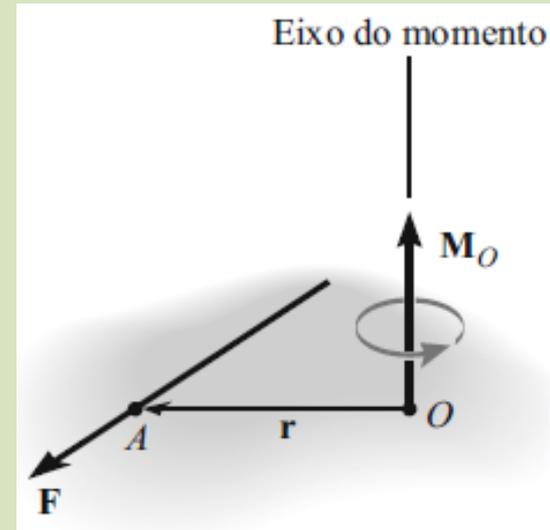
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

## Intensidade

$$M_O = r F \sin\theta$$

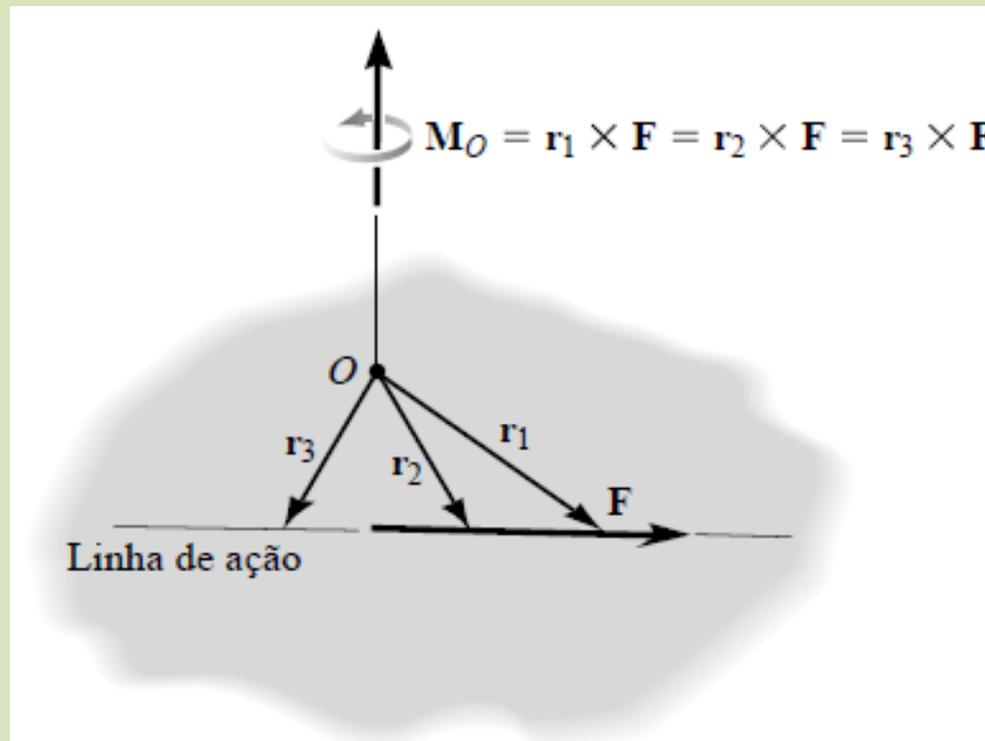
## Direção

A direção e o sentido do momento são determinados pela regra da mão direita do produto vetorial.



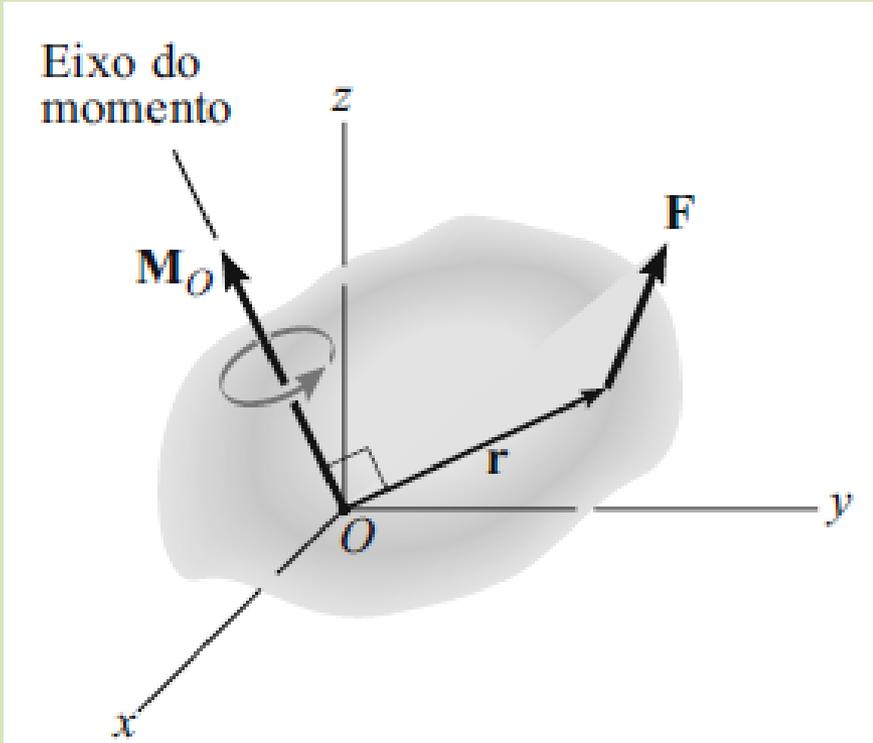
# Princípio da transmissibilidade

Podemos usar qualquer vetor posição  $\mathbf{r}$  medido do ponto  $O$  a qualquer ponto sobre a linha de ação da força  $\mathbf{F}$  (porque?). Assim,



# Formulação cartesiana

Se estabelecermos os eixos coordenados  $x, y, z$ , então o vetor posição  $\mathbf{r}$  e a força  $\mathbf{F}$  podem ser expressos como vetores cartesianos:

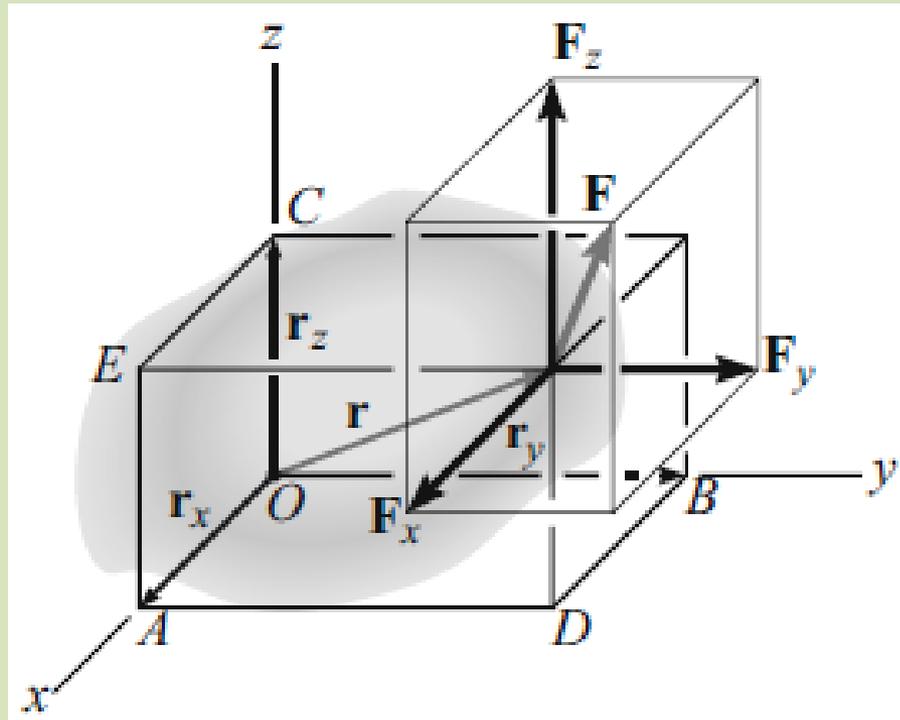


$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Se o determinante for expandido, temos:

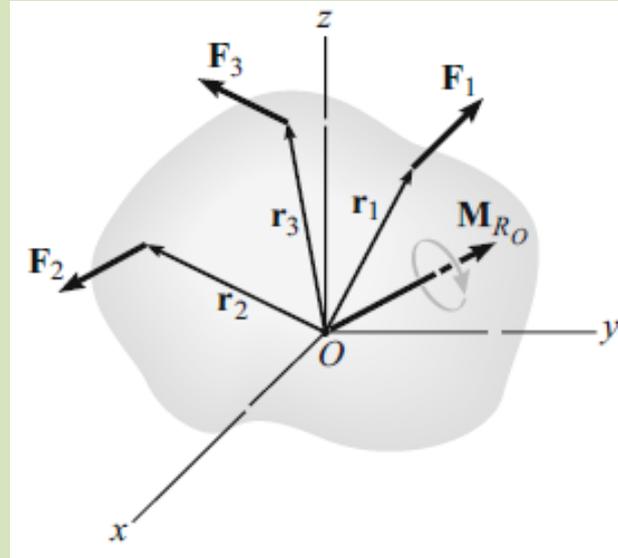
$$\mathbf{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y) \mathbf{i} - (r_x F_z - r_z F_x) \mathbf{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \mathbf{k}$$

O significado físico dessas três componentes do momento se torna evidente ao analisar a Figura:



$$\mathbf{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y) \mathbf{i} - (r_x F_z - r_z F_x) \mathbf{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \mathbf{k}$$

# Momento resultante de um sistema de forças



Essa resultante pode ser escrita simbolicamente como:

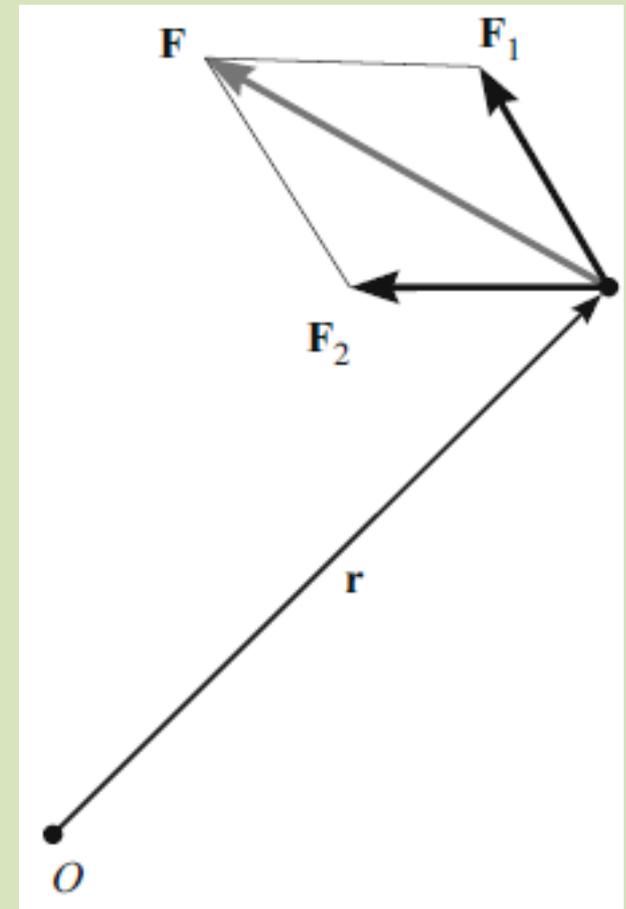
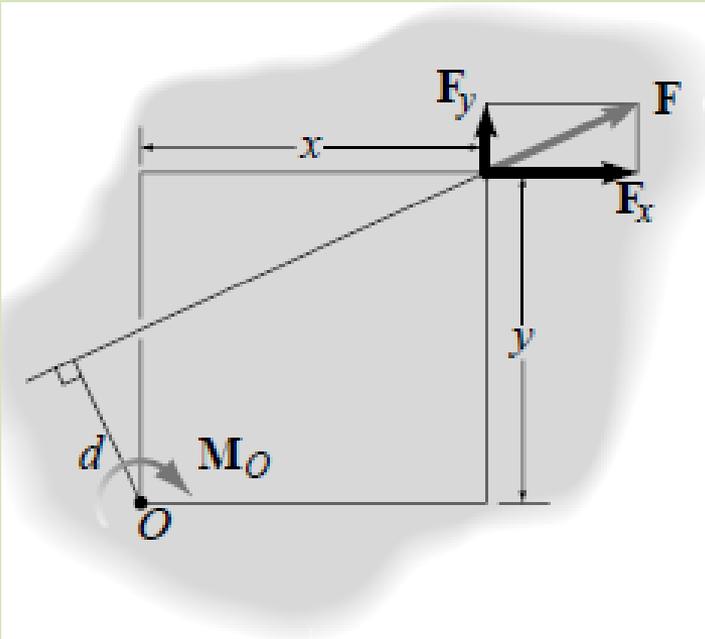
$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

# O princípio dos momentos

Como  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ , temos:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

- O **princípio dos momentos** afirma que o momento de uma força em relação a um ponto é igual à soma dos momentos das componentes da força em relação ao mesmo ponto.



Para os problemas bidimensionais:  
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{F}_x y - \mathbf{F}_y x$$

# Pontos importantes

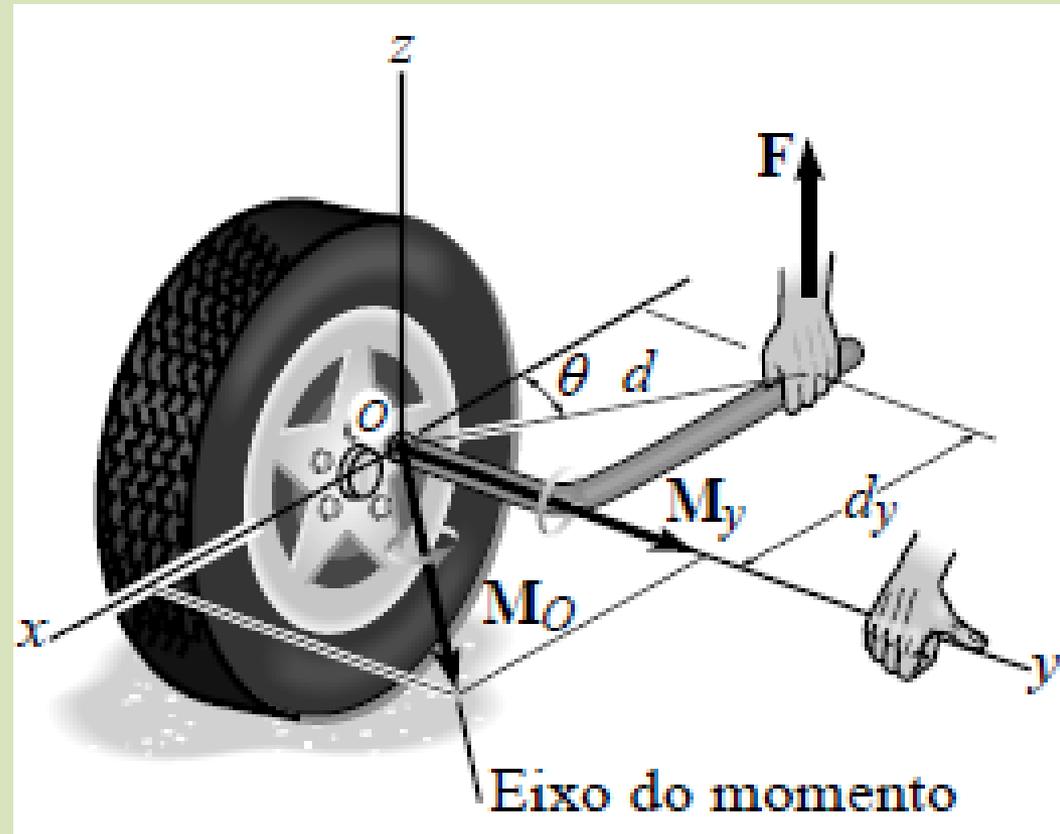
- O momento de uma força cria a tendência de um corpo **girar** em torno de um eixo passando por um ponto específico  $O$ .
- Usando a **regra da mão direita**, o sentido da rotação é indicado pela curva dos dedos, e o polegar é direcionado ao longo do eixo do momento, ou linha de ação do momento.
- A intensidade do momento é determinada através de  $M_O = Fd$ , onde  $d$  é chamado o braço do momento, que representa a **distância perpendicular ou mais curta** do ponto  $O$  à linha de ação da força.

# Pontos importantes

- **Em três dimensões**, o produto vetorial é usado para determinar o momento, ou seja,  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Lembre-se de que  $\mathbf{r}$  está direcionado do ponto  $O$  a qualquer ponto sobre a linha de ação de  $\mathbf{F}$ .
- O **princípio dos momentos** afirma que o momento de uma força em relação a um ponto é igual à soma dos momentos das componentes da força em relação ao mesmo ponto.

# Momento de uma força respeito de um eixo específico

- Na figura, para determinar o efeito de rotação, apenas a **componente y** do momento é necessária, e o momento total produzido não é importante.
- Para determinar essa componente, podemos usar uma **análise escalar** ou **vetorial**.

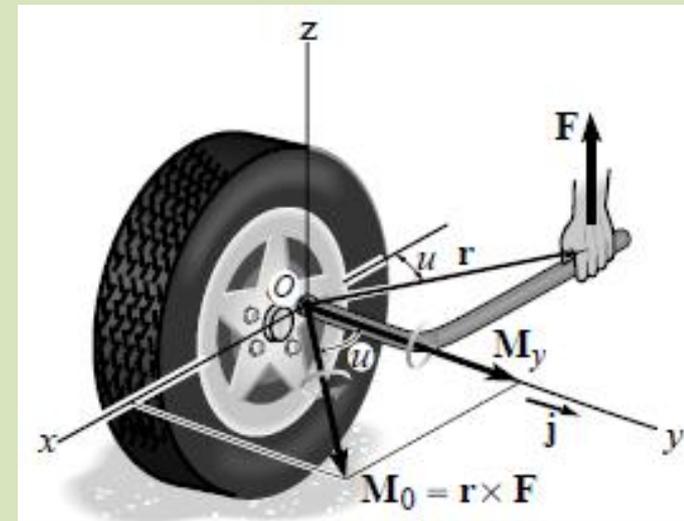


# Análise escalar

A intensidade do momento é:  $M_0 = Fr \sin\theta$

# Análise vetorial

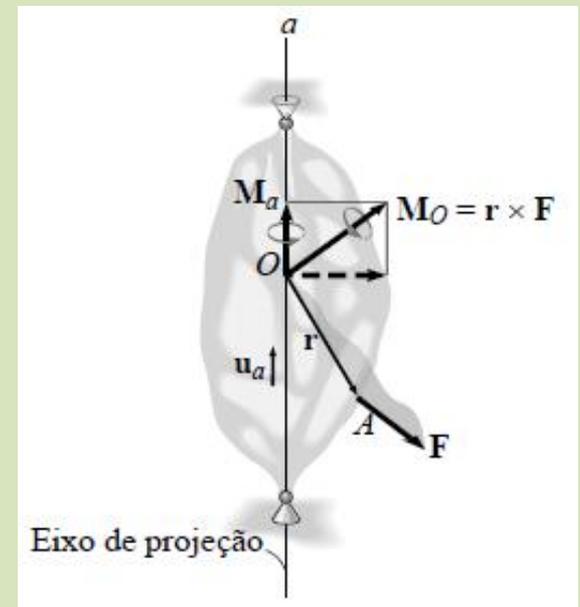
$$M_y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



Essa combinação é chamada de produto escalar triplo.

Em geral para qualquer direção a se obtém:

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_{ax} & u_{ay} & u_{az} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

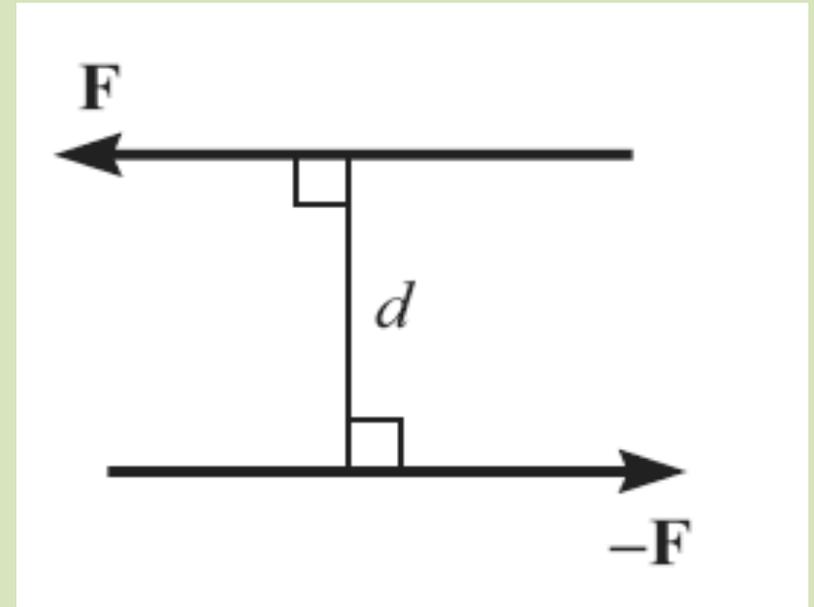
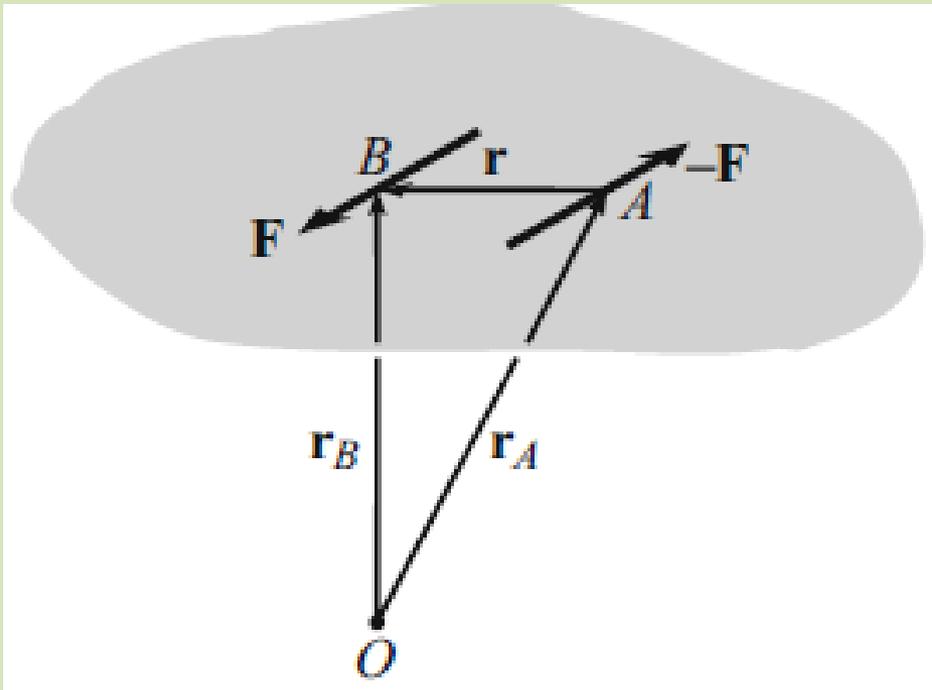


# Pontos importantes

- O momento de uma força em relação a um eixo especificado pode ser determinado desde que a **distância perpendicular** a partir da linha de ação da força até o eixo possa ser determinada.  $M_a = Fd_a$ .
- Se usarmos a análise vetorial,  $\mathbf{M}_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ , onde  $\mathbf{u}_a$  define a direção do eixo e  $\mathbf{r}$  é definido a partir de qualquer ponto sobre o eixo até qualquer ponto sobre a linha de ação da força.
- Se  $M_a$  é calculado como um escalar negativo, então o sentido da direção de  $\mathbf{M}_a$  é oposto a  $\mathbf{u}_a$ .

# Momento de um binário

Um *binário* é definido como duas forças paralelas que têm a mesma intensidade, mas direções opostas, e são separadas por uma distância perpendicular  $d$ .



# Momento de um binário

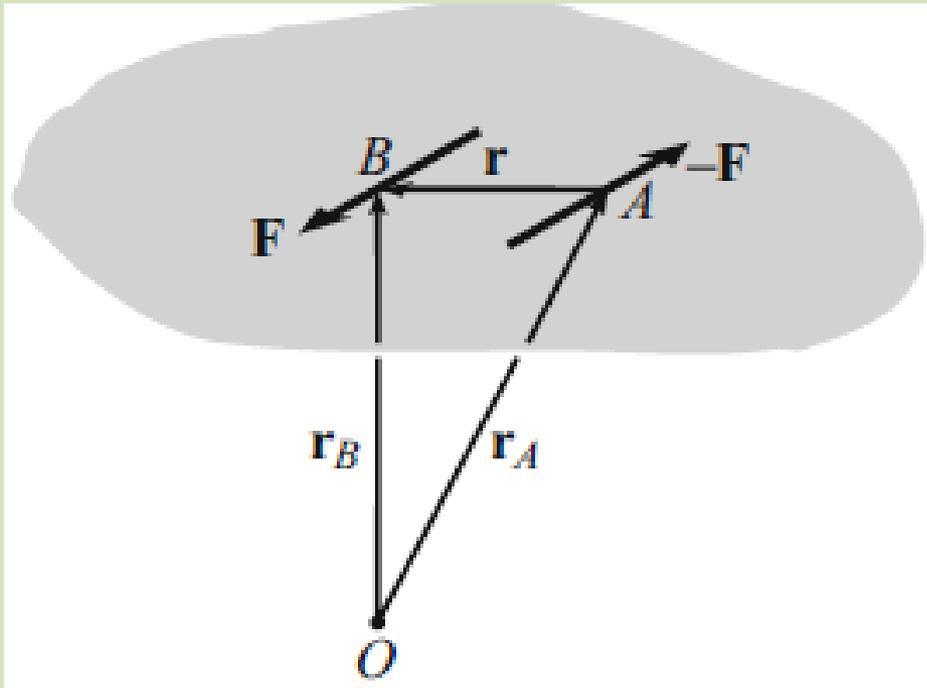
Por exemplo, os vetores posição  $\mathbf{r}_A$  e  $\mathbf{r}_B$  estão direcionados do ponto  $O$  para os pontos  $A$  e  $B$  situados na linha de ação de  $-\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}$ .

Portanto, o *momento* do binário em relação a  $O$  é

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_A \times -\mathbf{F} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}$$

Entretanto, como  $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}$  ou  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ , teremos que

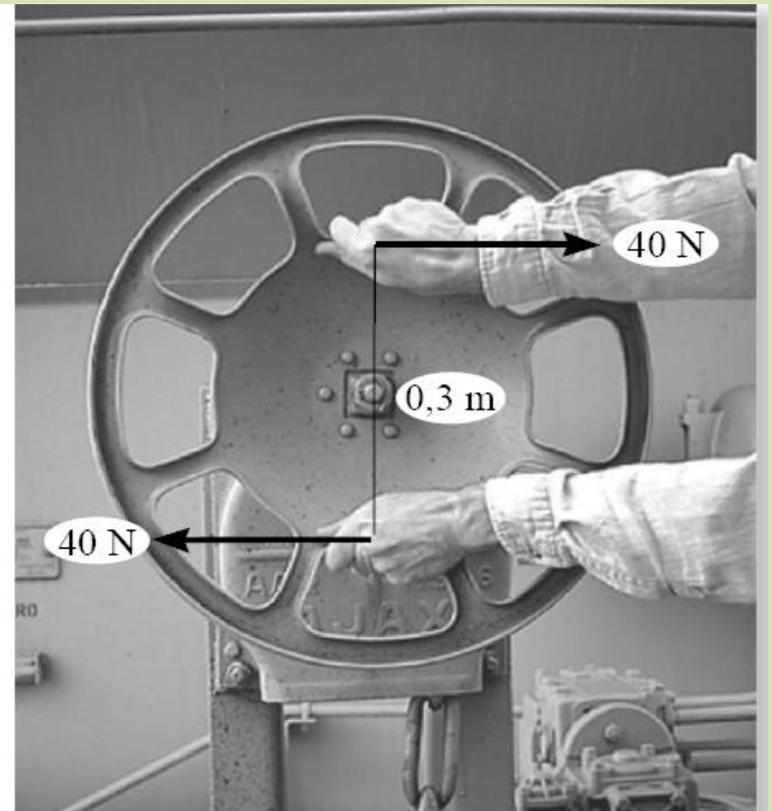
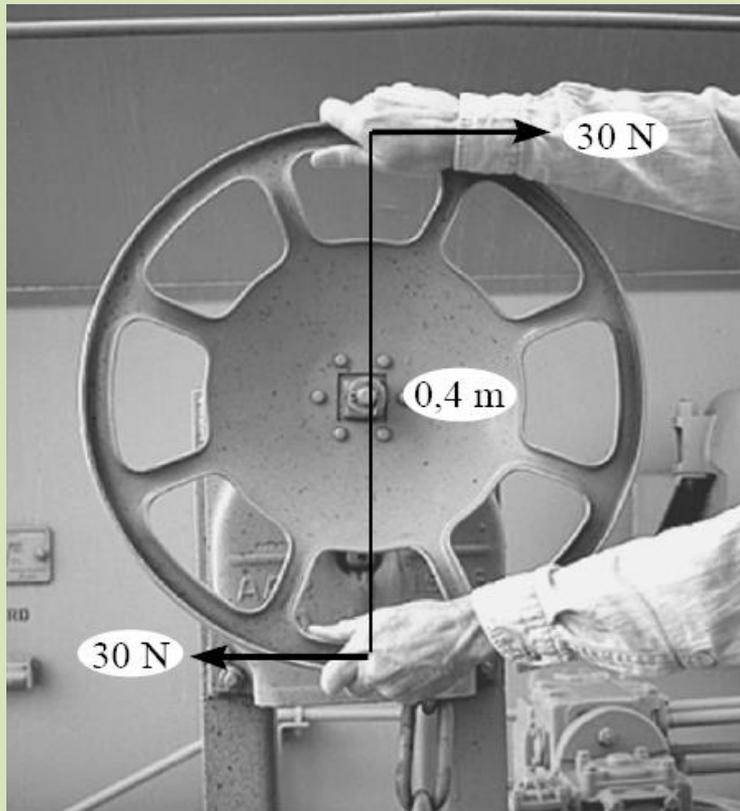
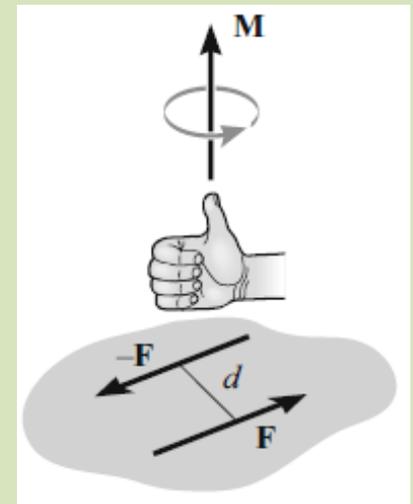
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



# Formulação escalar

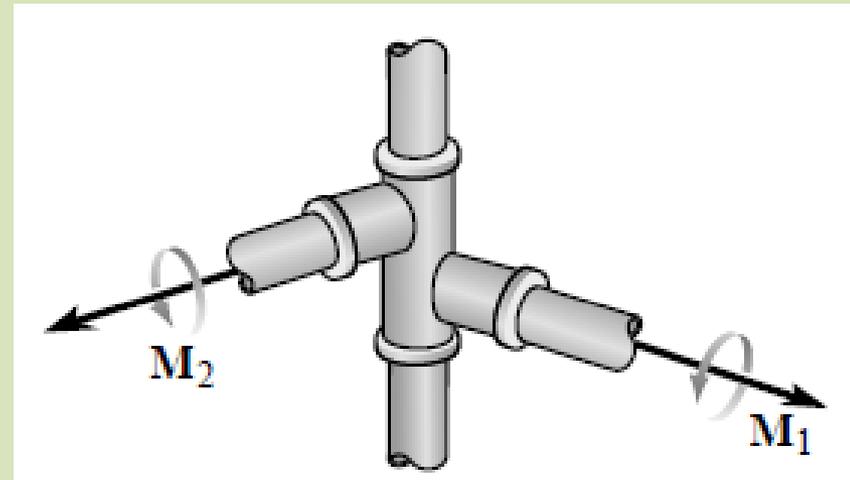
O momento de um binário  $M$  é definido como tendo uma *intensidade* de:  $M = Fd$

## Binários equivalentes

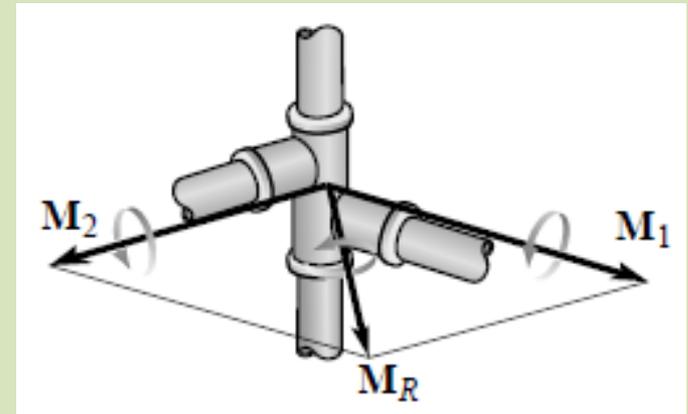


# Momento de binário resultante

Considere os momentos binários  $\mathbf{M}_1$  e  $\mathbf{M}_2$  agindo sobre o tubo na figura.



Podemos unir suas origens em qualquer ponto arbitrário e encontrar o momento binário resultante,  $\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ , como mostra a figura ao lado:



Se mais de dois momentos de binário agem sobre o corpo, podemos generalizar esse conceito e escrever a resultante vetorial como:

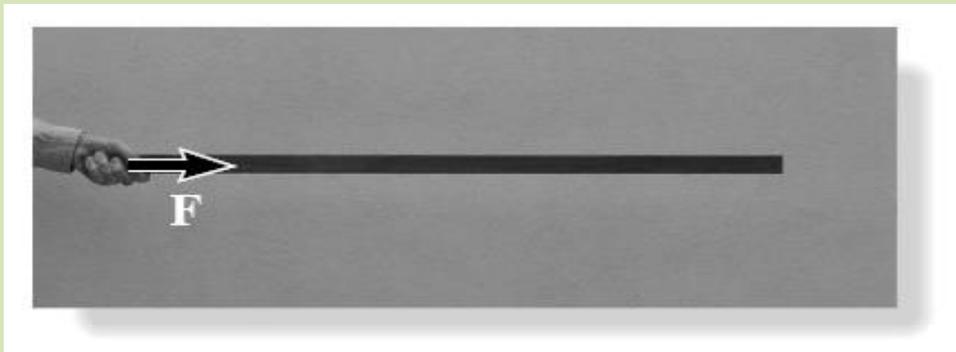
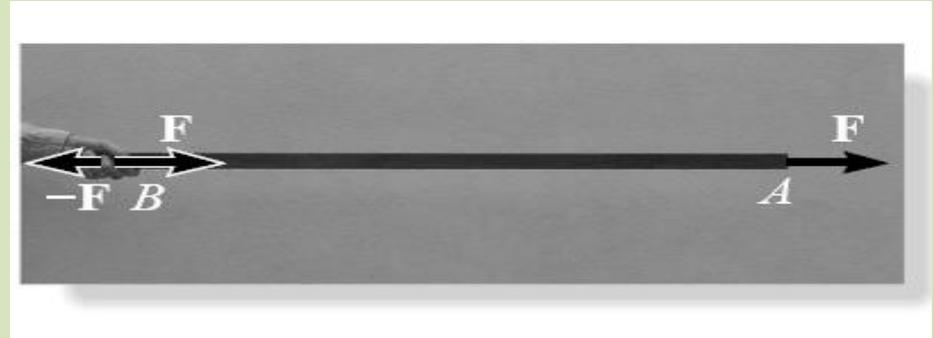
$$\mathbf{M}_R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

# Pontos importantes

- Um momento de binário é produzido por **duas forças não colineares que são iguais em intensidade**, mas com direções opostas. Seu efeito é produzir rotação pura, ou tendência de rotação em uma direção específica.
- Um momento de binário é um **vetor livre** e, conseqüentemente, causa o mesmo efeito rotacional em um corpo, independentemente de onde o momento de binário é aplicado ao corpo.
- Em três dimensões, o momento de binário geralmente é determinado usando a **formulação vetorial**,  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , onde  $\mathbf{r}$  é direcionado a partir de qualquer ponto sobre a linha de ação de uma das forças até qualquer ponto sobre a linha de ação da outra força  $\mathbf{F}$ .
- Um momento de **binário resultante** é simplesmente a soma vetorial de todos os momentos de binário do sistema.

# Simplificação de um sistema de forças e binários

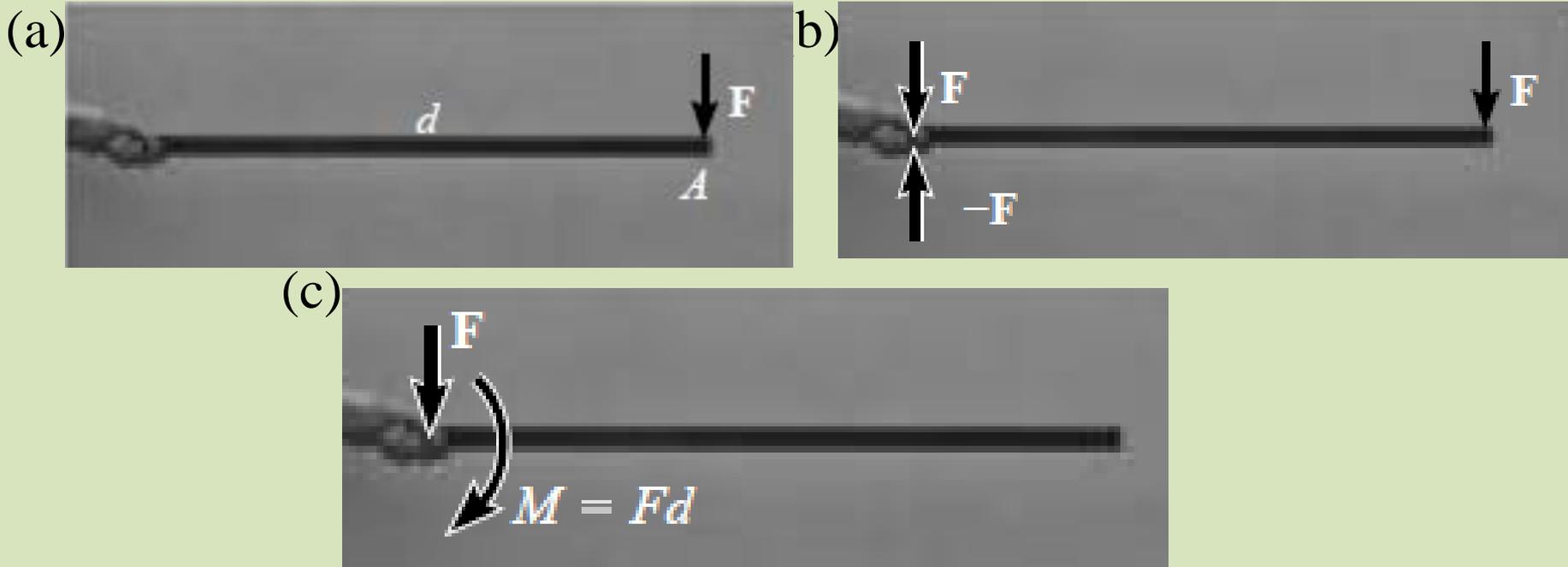
- Um sistema é equivalente se os *efeitos externos* que ele produz sobre um corpo são iguais aos causados pelo sistema de forças e momentos binários originais.
- Nesse contexto, os efeitos externos de um sistema se referem ao *movimento de rotação e translação* do corpo se este estiver livre para se mover, ou se refere às *forças reativas* nos suportes se o corpo é mantido fixo.



E se a força  $F$  for perpendicular?

# Simplificação de um sistema de forças e binários

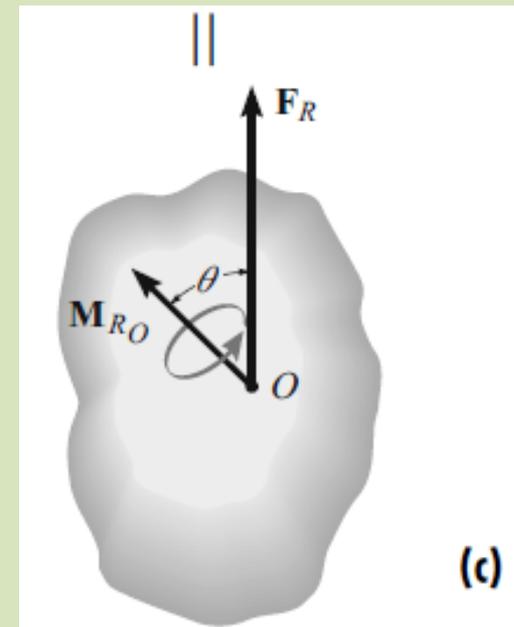
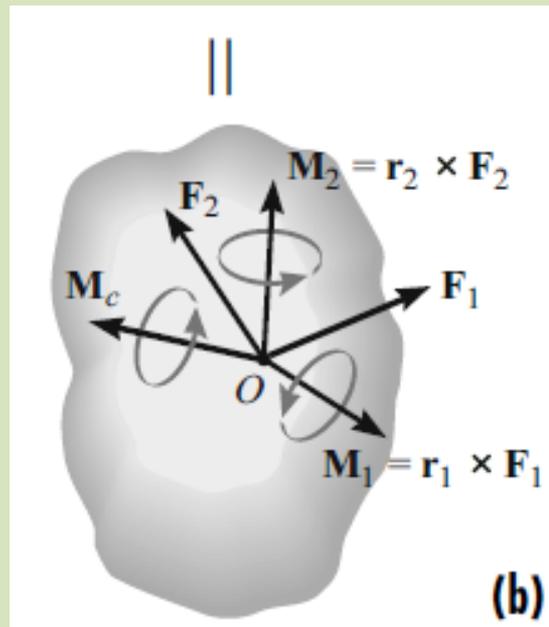
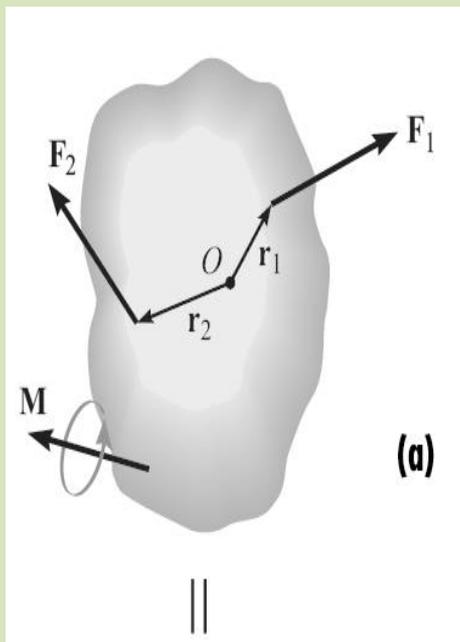
Se  $\mathbf{F}$  for aplicado **perpendicularmente** ao bastão, como na Figura (a), então podemos aplicar um par de forças  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$  iguais e opostas no ponto B (b). A força  $\mathbf{F}$  agora é aplicada em B, e as outras duas forças,  $\mathbf{F}$  em A e  $-\mathbf{F}$  em B, formam um binário que produz o momento de binário  $M = Fd$  (c).



Podemos **generalizar** esse método de reduzir um sistema de forças e binários a uma força resultante  $\mathbf{F}_R$  equivalente agindo no ponto  $O$  e um momento de binário resultante  $(\mathbf{M}_R)_O$  (decorrente do deslocamento das forças na figura b) usando as duas equações a seguir:

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M}_O + \Sigma \mathbf{M}$$



**No caso bidimensional, essas equações vetoriais se reduzem às três equações escalares a seguir:**

$$(F_R)_x = \Sigma F_x$$

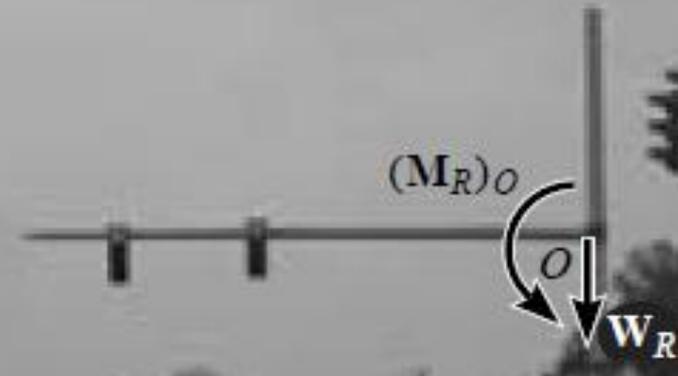
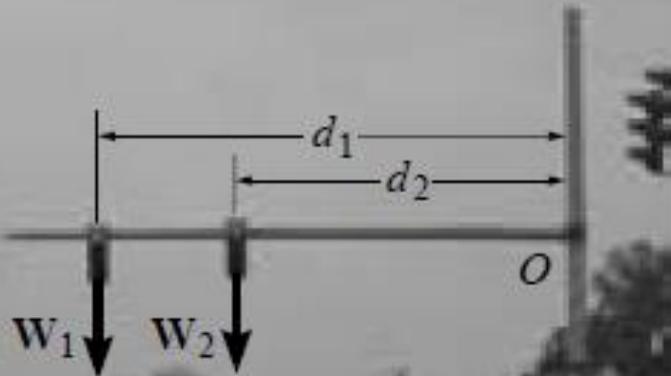
$$(F_R)_y = \Sigma F_y$$

$$(M_R)_O = \Sigma M_O + \Sigma M$$

# Sistema de forças e momentos binários

Em este exemplo, a resultante é determinada pela suas duas componentes:

$$(F_R)_x \text{ e } (M_R)_o$$



# Procedimentos para análise

- **Estabeleça os eixos coordenados** com a origem localizada no ponto  $O$  e o eixo tendo uma orientação selecionada.

## Somatória das forças

- Se o sistema de forças for *coplanar*, **decomponha cada força** em suas componentes  $x$  e  $y$ . Se uma componente estiver direcionada ao longo do eixo positivo  $x$  ou  $y$ , ela representa um escalar positivo; enquanto se estiver direcionada ao longo do eixo negativo  $x$  ou  $y$ , ela é um escalar negativo.
- Em três dimensões, represente cada força como um **vetor cartesiano** antes de somar as forças.

# Procedimentos para análise

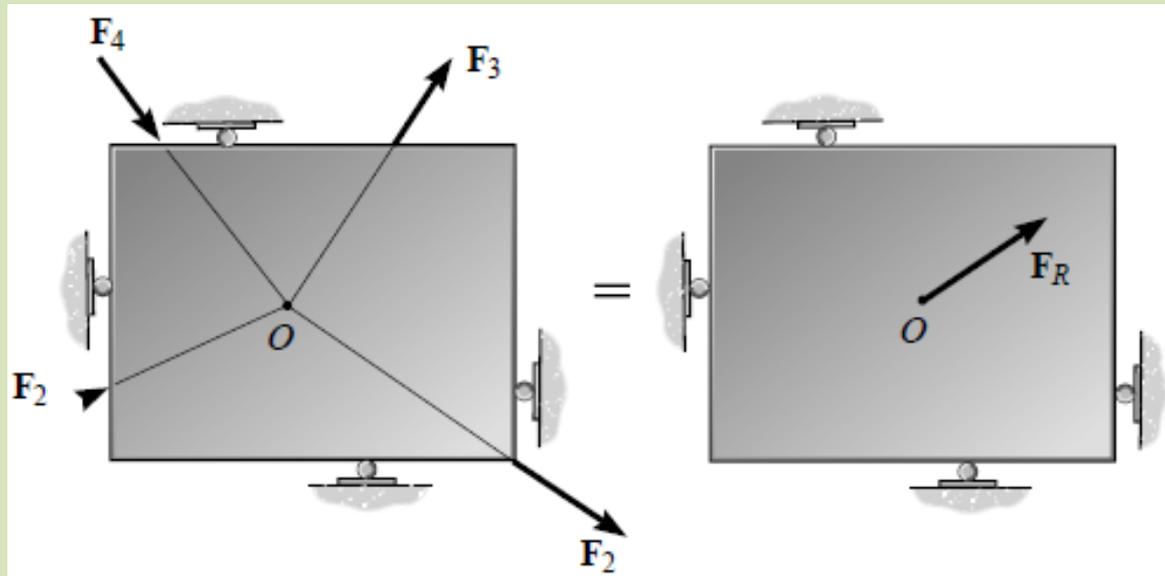
## Somatória dos momentos

- Ao determinar os momentos de um sistema de forças *coplanares* em relação ao ponto  $O$ , normalmente é vantajoso usar o **princípio dos momentos**, ou seja, determinar os momentos das componentes de cada força, em vez do momento da própria força.
- **Em três dimensões, use o produto vetorial** para determinar o momento de cada força em relação ao ponto  $O$ . Aqui, os vetores posição se estendem de  $O$  até qualquer ponto sobre a linha de ação de cada força.

# Simplificações adicionais de um sistema de forças e binários

## Sistema de forças concorrentes

O sistema equivalente pode ser representado por uma única força resultante agindo em  $O$ .

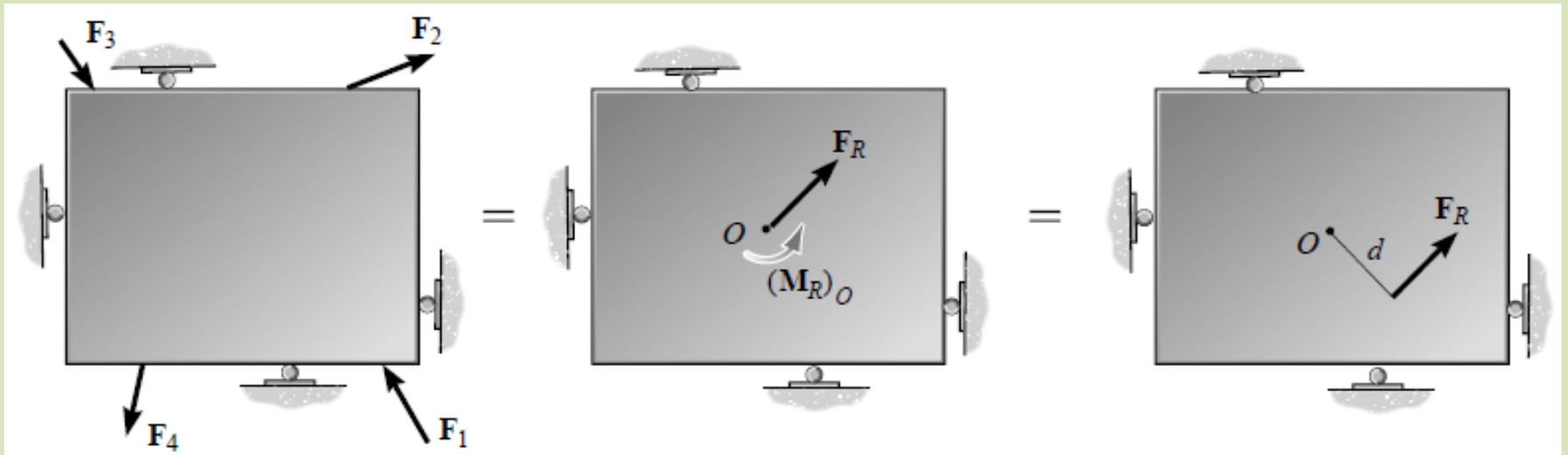


# Sistema de forças coplanares

## Sistema de forças não concorrentes

A distância  $d$  pode ser determinada através da **equação escalar**:

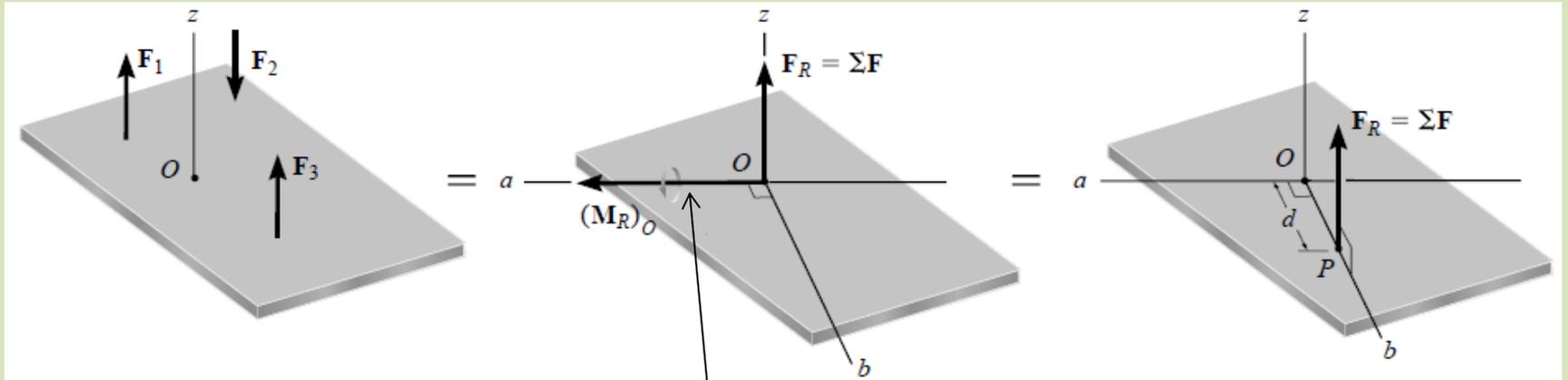
$$(M_R)_O = F_R d = \Sigma M_O \text{ ou } d = (M_R)_O / F_R$$



# Sistema de forças paralelas

A distância  $d$  ao longo do eixo perpendicular  $b$  a partir do ponto  $O$  requer:

$$(M_R)_O = F_R d = \Sigma M_O \text{ ou } d = \Sigma M_O / F_R$$



Errado

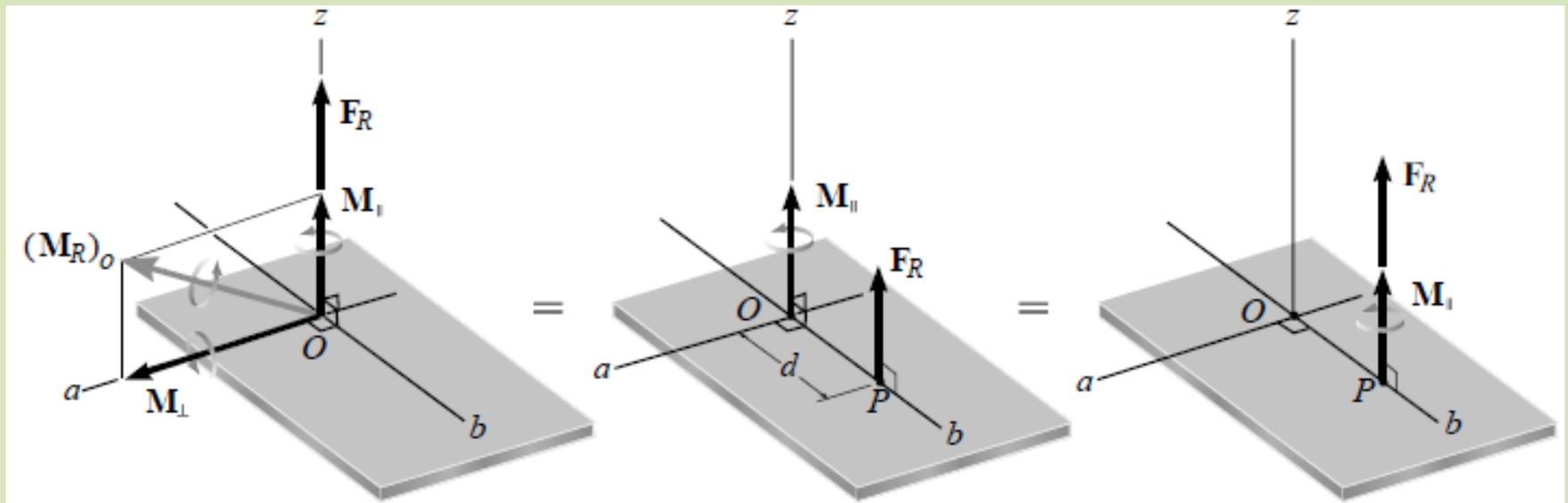
## Somatória dos momentos

- O momento da força resultante em relação ao ponto  $O$  é igual à soma de todos os momentos de binário no sistema mais os momentos de todas as forças no sistema em relação a  $O$ .
- Essa condição de momento é usada para encontrar a posição da força resultante em relação ao ponto  $O$ .

# Redução a um torsor

A combinação de uma força resultante  $F_R$  e um momento de binário colinear  $M_{\parallel}$  tenderá a transladar e girar o corpo em relação ao seu eixo. Esta combinação é chamada **torsor**.

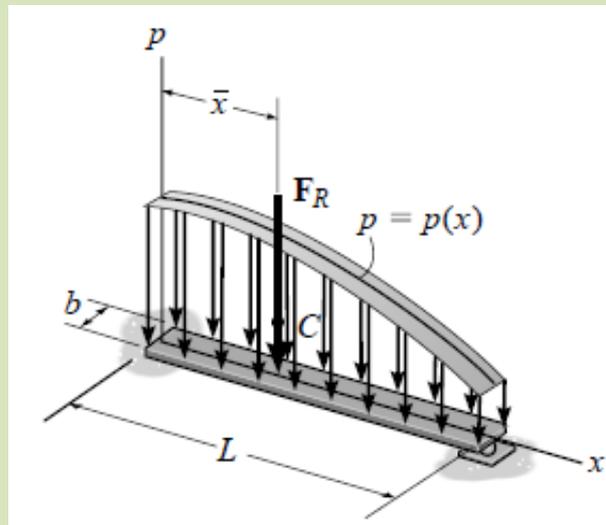
Veja que em geral o momento resultante não é paralelo a  $F_R$ , mas ele pode ser decomposto e sua componente perpendicular cancelada por um deslocamento da  $F_R$ .



# Cargas distribuídas

São cargas distribuídas:

- a pressão do vento sobre a superfície de um cartaz de propaganda,
- a pressão da água dentro de um tanque,
- o peso da areia sobre o piso de uma caixa de armazenamento.

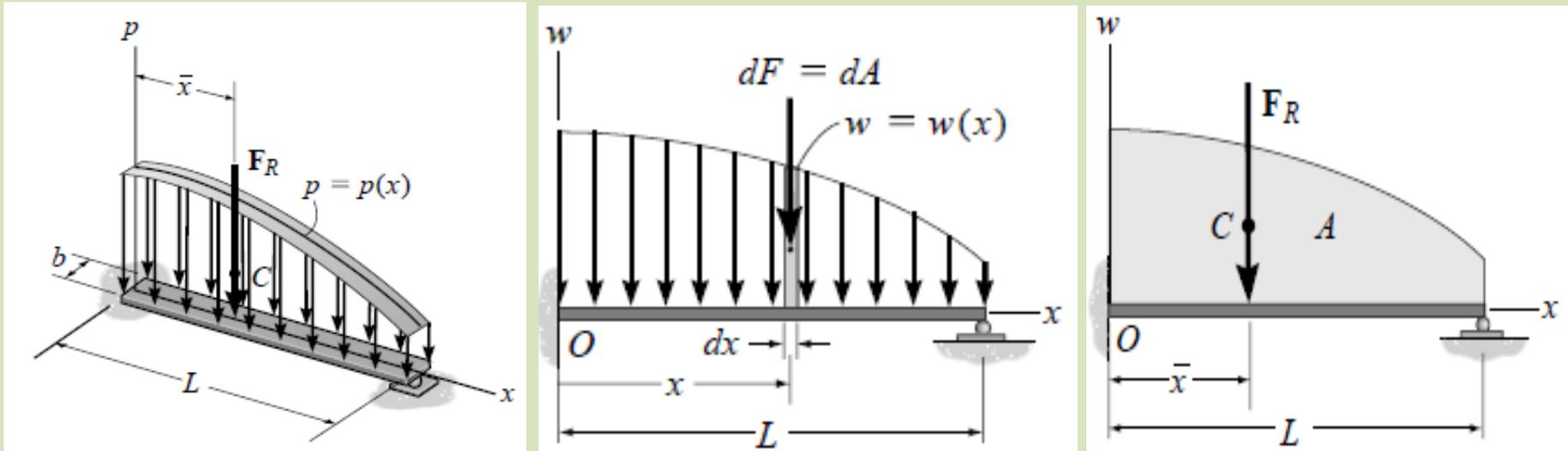


# Intensidade da força resultante

A intensidade de  $dF$  é determinada pela área diferencial em cinza  $dA$  abaixo da curva de carregamento. Para o comprimento inteiro  $L$ ,

$$+\downarrow F_R = \sum F \qquad F_R = \int_L w(x) dx = \int_A dA = A$$

Portanto, a intensidade da força resultante é igual à área total  $A$  sob o diagrama de carregamento.



## Posição da força resultante

Aplicando a equação  $(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M}_O$  a posição da linha de ação da força resultante pode ser obtida igualando os momentos da força resultante e da distribuída em relação ao ponto O. Como  $d\mathbf{F}$  produz um momento  $d\mathbf{F} \times x = x W(x) dx$  em relação a O então

$$-\bar{x}F_R = - \int_L xw(x)dx$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L xw(x)dx}{\int_L w(x)dx} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

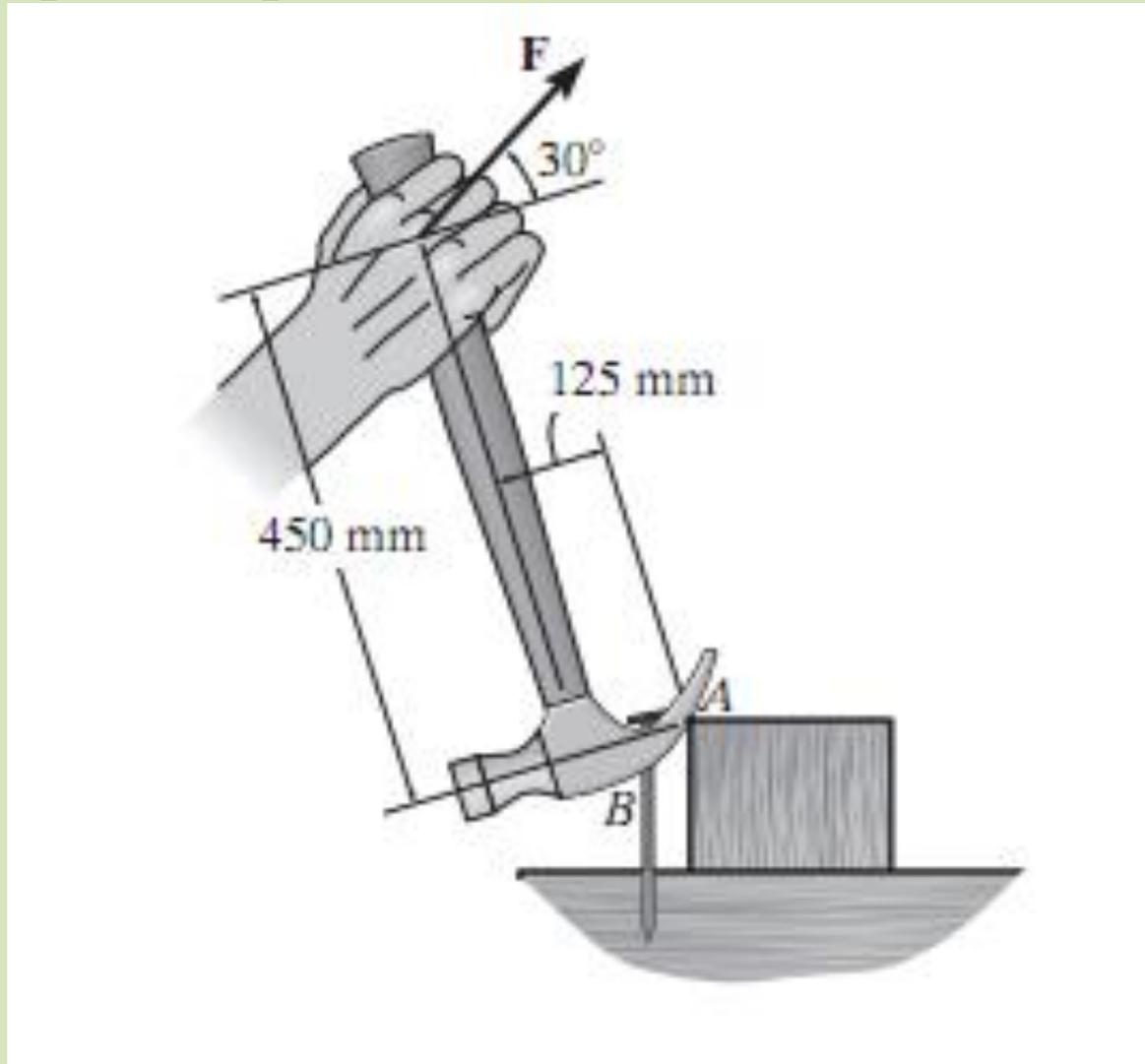
A força resultante tem uma linha de ação que passa pelo centroide C (centro geométrico) da área sob o diagrama de carregamento.

# Pontos importantes

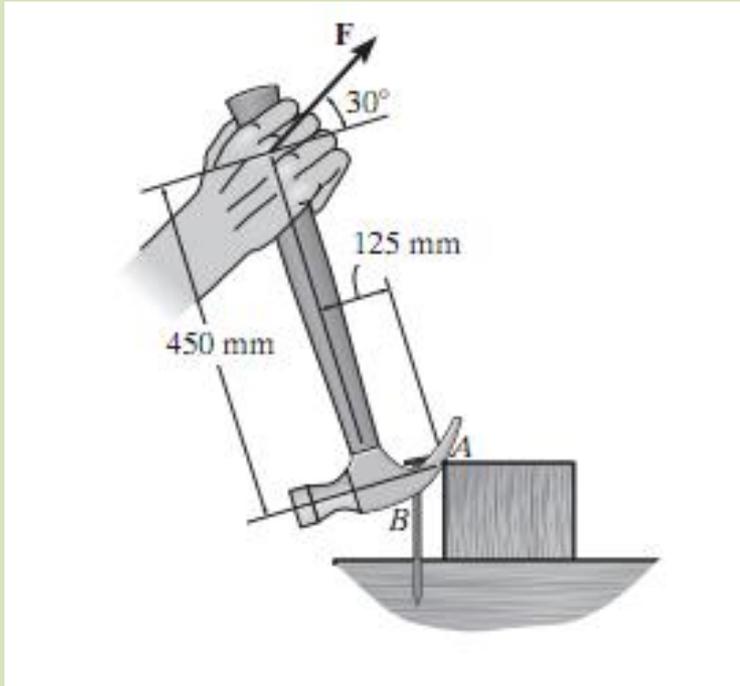
- As **cargas distribuídas coplanares são definidas** usando-se uma função de carga  $w = w(x)$  que indica a intensidade do carregamento ao longo da extensão de um membro. Essa intensidade é medida em N/m.
- Os efeitos externos causados por uma carga distribuída coplanar atuando sobre um corpo podem ser representados por uma **única força resultante**.
- Essa força resultante é equivalente à **área sob o diagrama de carga** e tem uma linha de ação que passa pelo centroide ou centro geométrico dessa área.

## Exemplo 1:

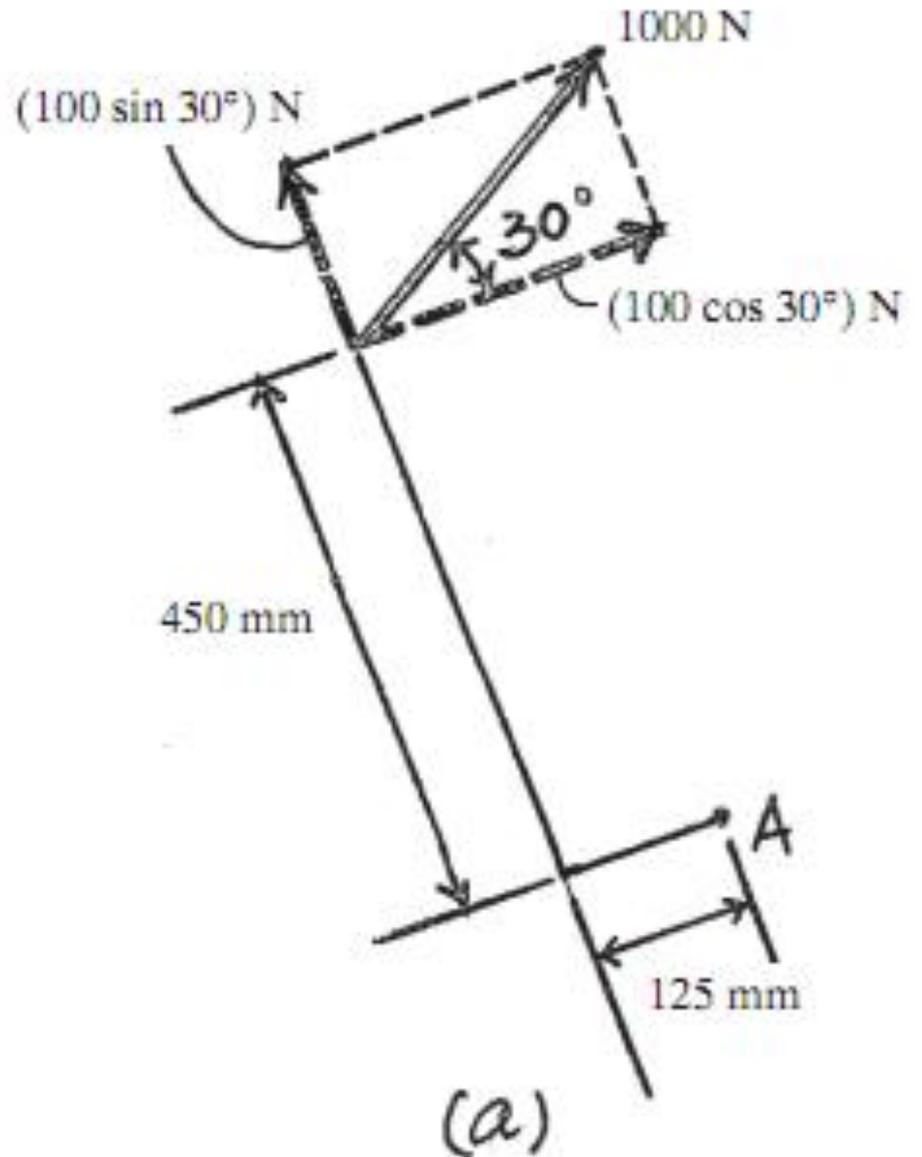
O cabo do martelo está sujeito a uma força de 1000 N. Qual o momento respeito do ponto A?



# Exemplo 1:

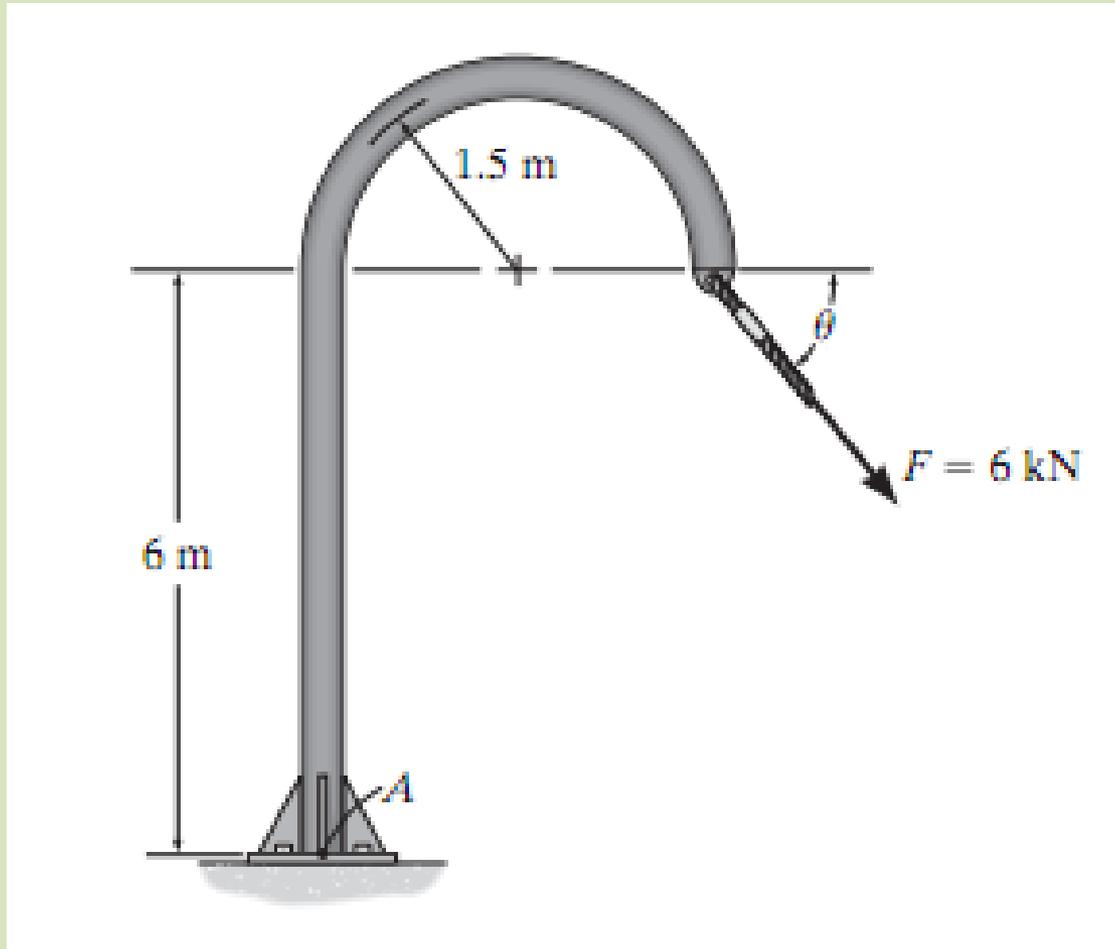


$$\begin{aligned} (+M_A &= [-1000 \cos 30^\circ (450) - 1000 \sin 30^\circ (125)] (10^{-3}) \\ &= -452.2 \text{ N}\cdot\text{m} = 452 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (\text{clockwise}) \end{aligned}$$

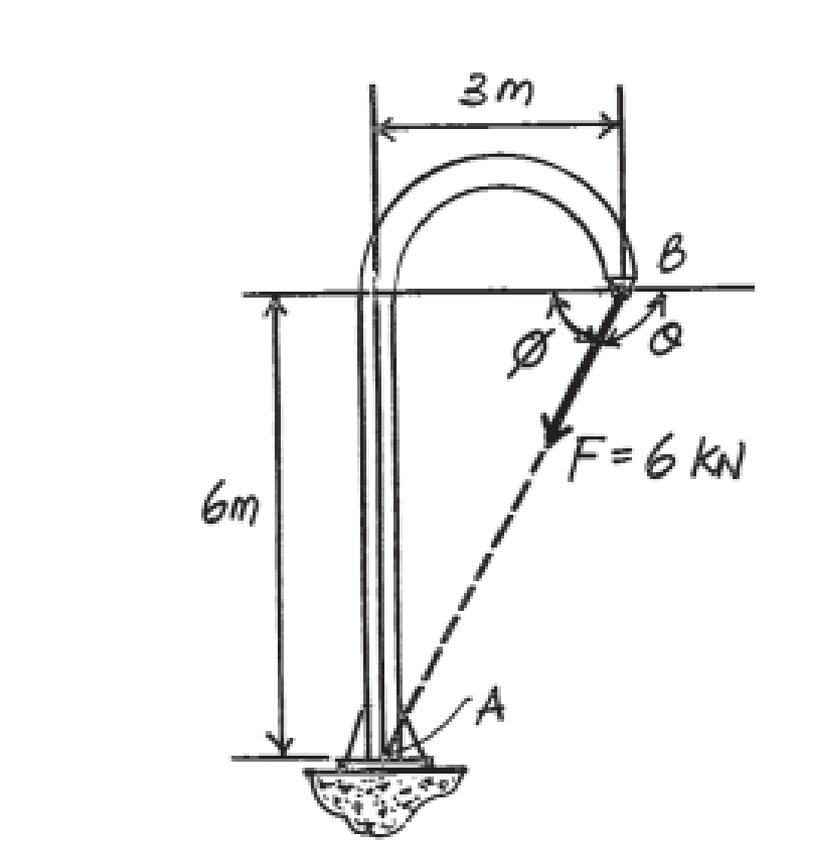
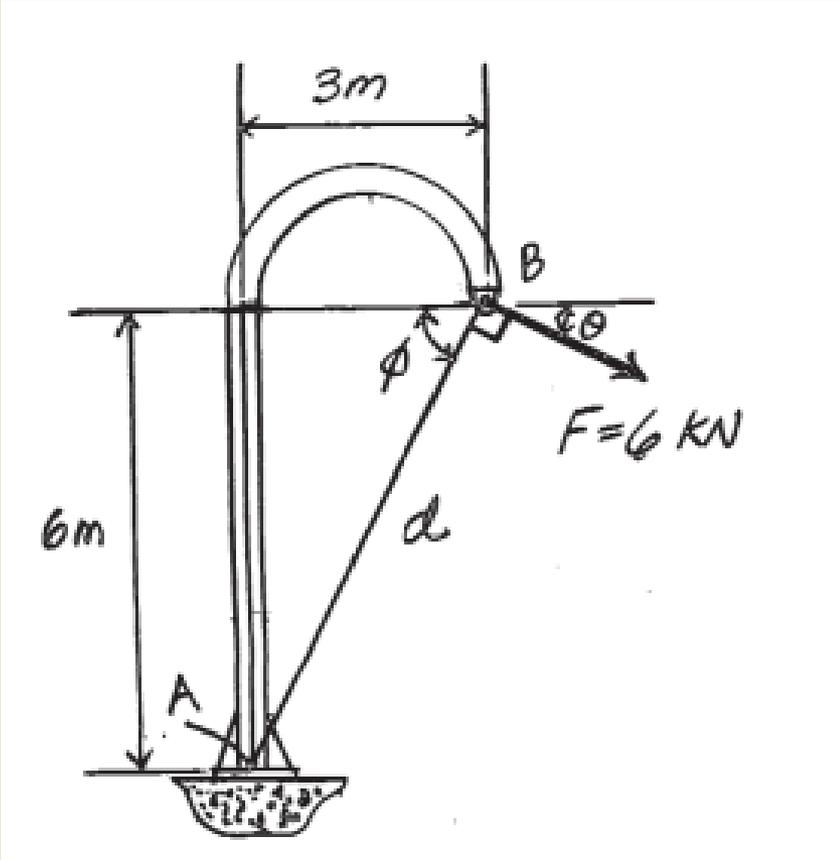
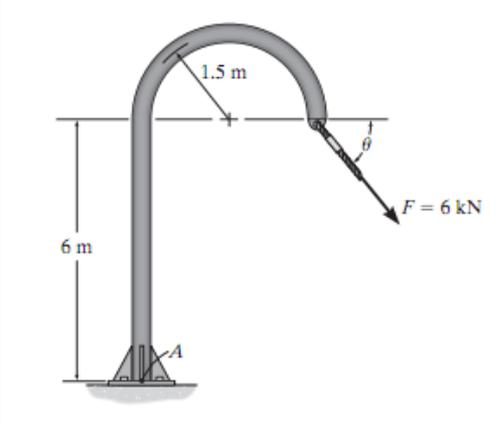


## Exemplo 2:

Qual o ângulo da força  $F$  (entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ ) que produz o momento máximo e mínimo respeito do ponto  $A$ ? Quais os valores desses momentos máximo e mínimo?



# Exemplo 2:



## Exemplo 2:

In order to produce the maximum moment about point  $A$ , force  $F$  must act perpendicular to line  $AB$ , Fig.  $a$ . From the geometry of the diagram,

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{6}{3}\right) = 63.43^\circ$$

$$\theta = 90^\circ - \phi = 90^\circ - 63.43^\circ = 26.6^\circ$$

Also,

$$d = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} \text{ m}$$

The maximum moment of  $F$  about point  $A$  is given by

$$(M_A)_{\max} = Fd = 6(\sqrt{45}) = 40.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

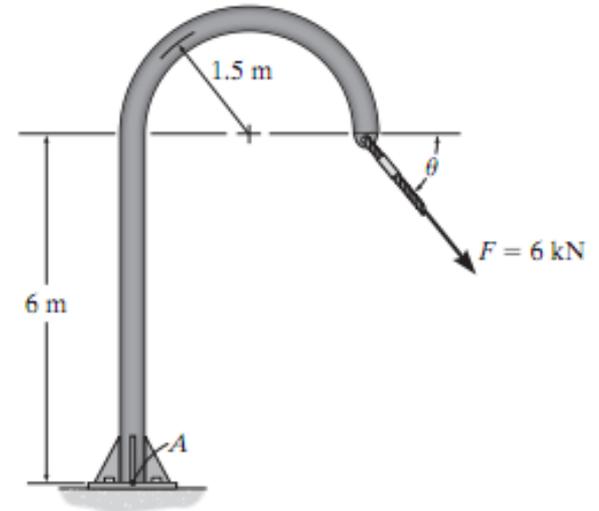
The minimum moment of  $F$  about point  $A$  occurs when the line of action of  $F$  passes through point  $A$ . Referring to Fig.  $b$ ,

$$\theta = 180^\circ - \phi = 180^\circ - 63.43^\circ = 117^\circ$$

and

$$(M_A)_{\min} = Fd = 6(0) = 0$$

**Ans**

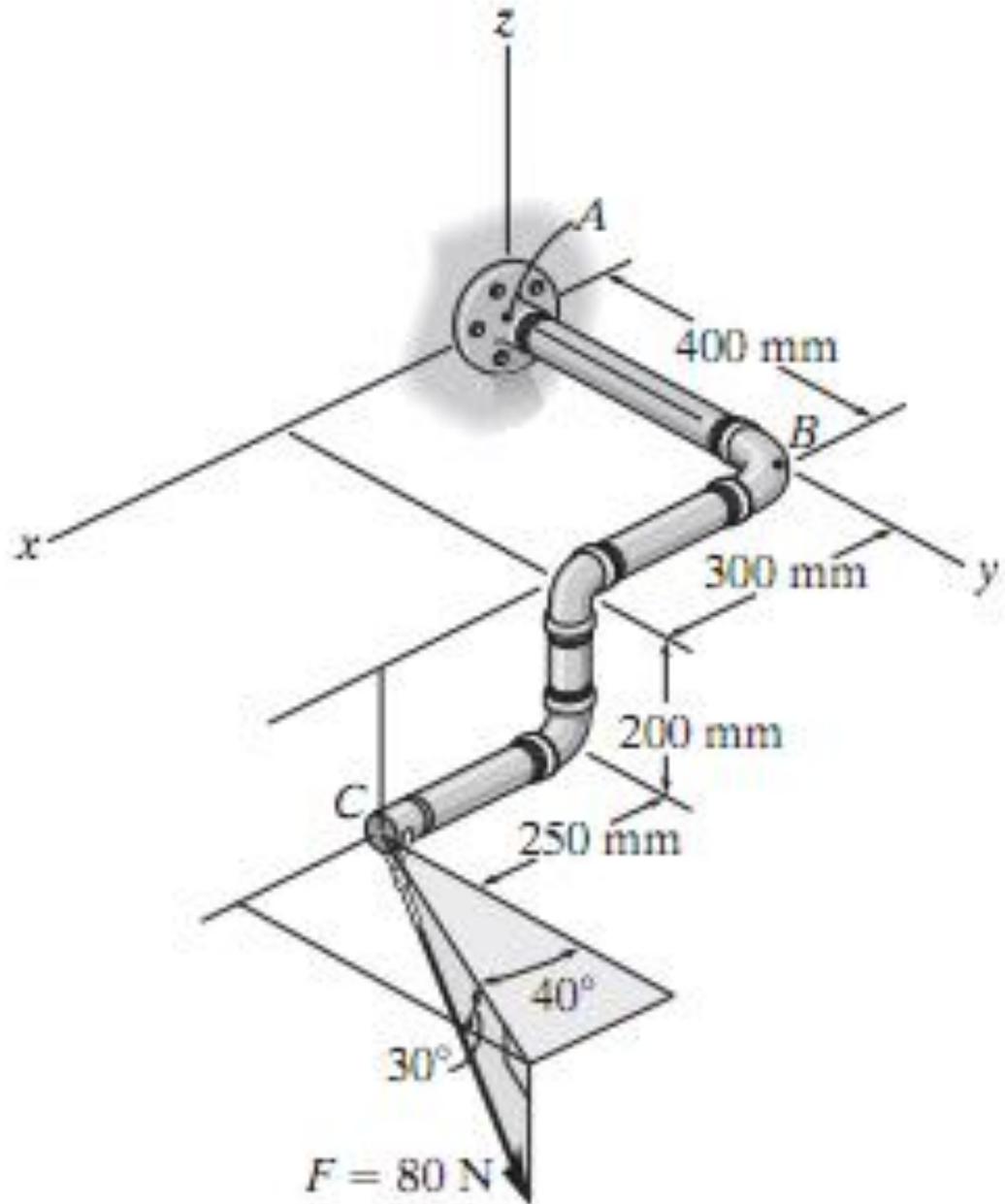


**Ans**

**Ans**

### Exemplo 3:

O conjunto da figura está sujeito a uma força de 80N aplicada no ponto C. Determine o momento dessa força respeito do ponto A



## Exemplo 3:

### *Position Vector And Force Vector:*

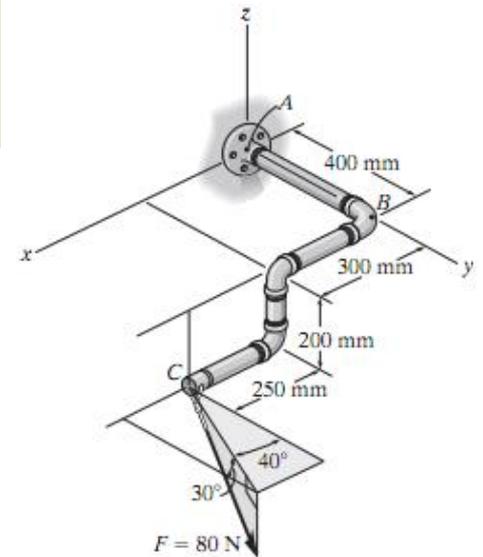
$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AC} &= \{(0.55 - 0)\mathbf{i} + (0.4 - 0)\mathbf{j} + (-0.2 - 0)\mathbf{k}\} \text{ m} \\ &= \{0.55\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} - 0.2\mathbf{k}\} \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= 80 (\cos 30^\circ \sin 40^\circ \mathbf{i} + \cos 30^\circ \cos 40^\circ \mathbf{j} - \sin 30^\circ \mathbf{k}) \text{ N} \\ &= \{44.53\mathbf{i} + 53.07\mathbf{j} - 40.0\mathbf{k}\} \text{ N}\end{aligned}$$

*Moment of Force F About Point A:* Applying Eq. 4–7, we have

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{F}_B$$

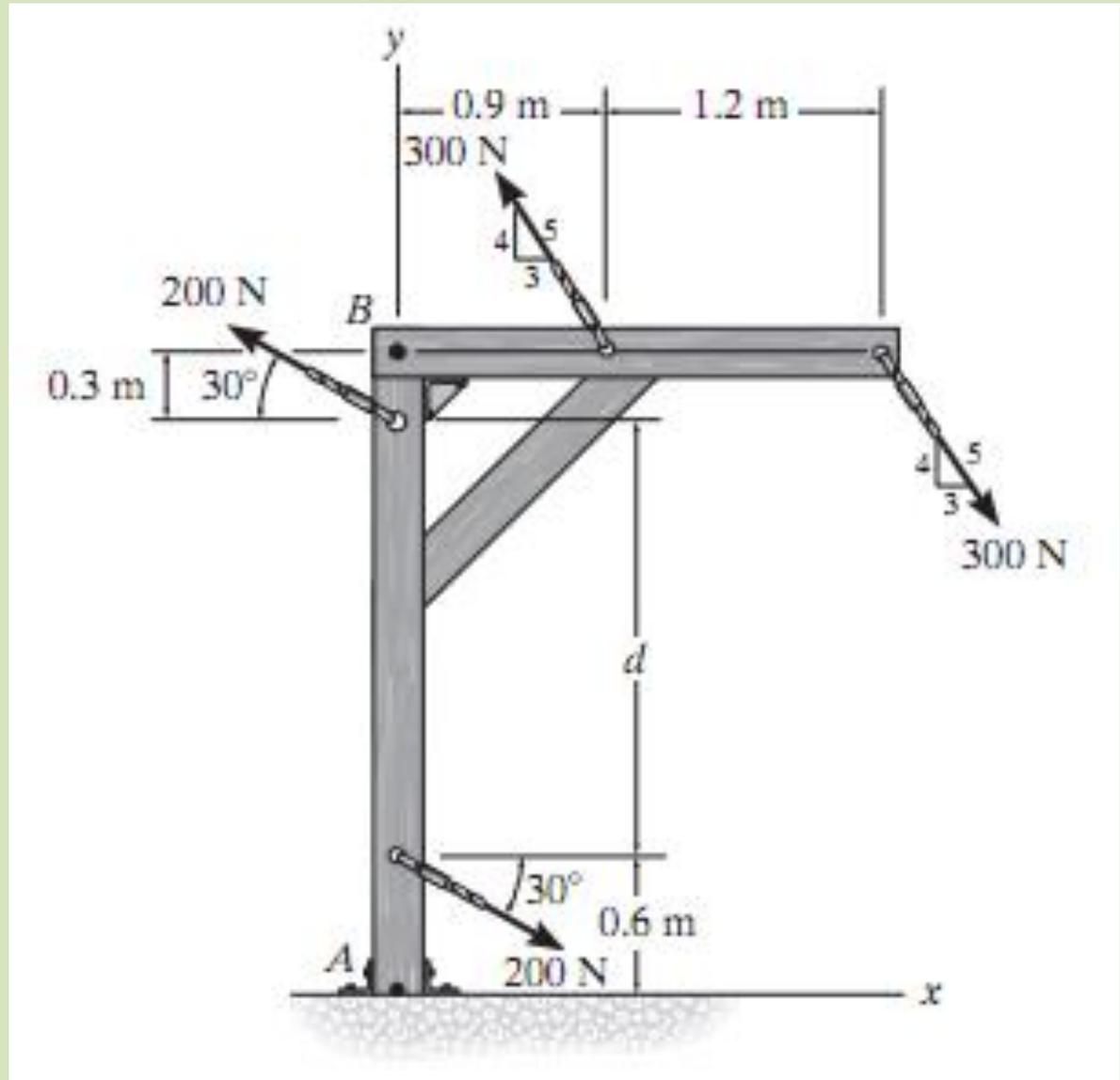
$$\begin{aligned}&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.55 & 0.4 & -0.2 \\ 44.53 & 53.07 & -40.0 \end{vmatrix} \\ &= \{-5.39\mathbf{i} + 13.1\mathbf{j} + 11.4\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$



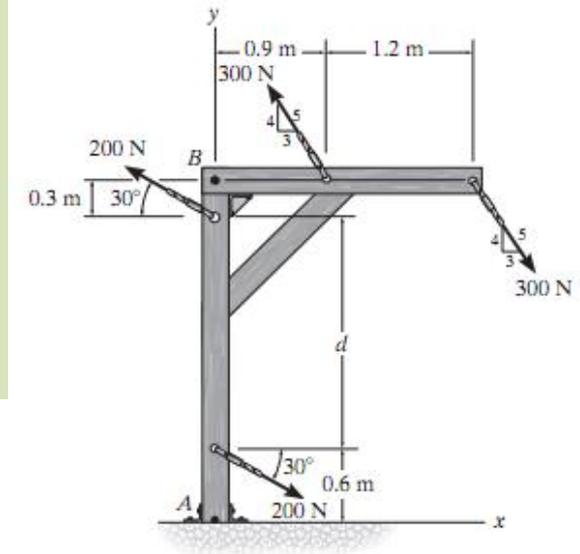
**Ans**

## Exemplo 4:

Dois binários atuam na estrutura da figura. Se  $d=1,2$  m determine o momento de binário resultante. Calcule o resultado decompondo cada força em componentes  $x$  e  $y$  e a) encontrando o momento de cada binário e b) somando os momentos de todas as componentes de força em relação ao ponto A



## Exemplo 4:

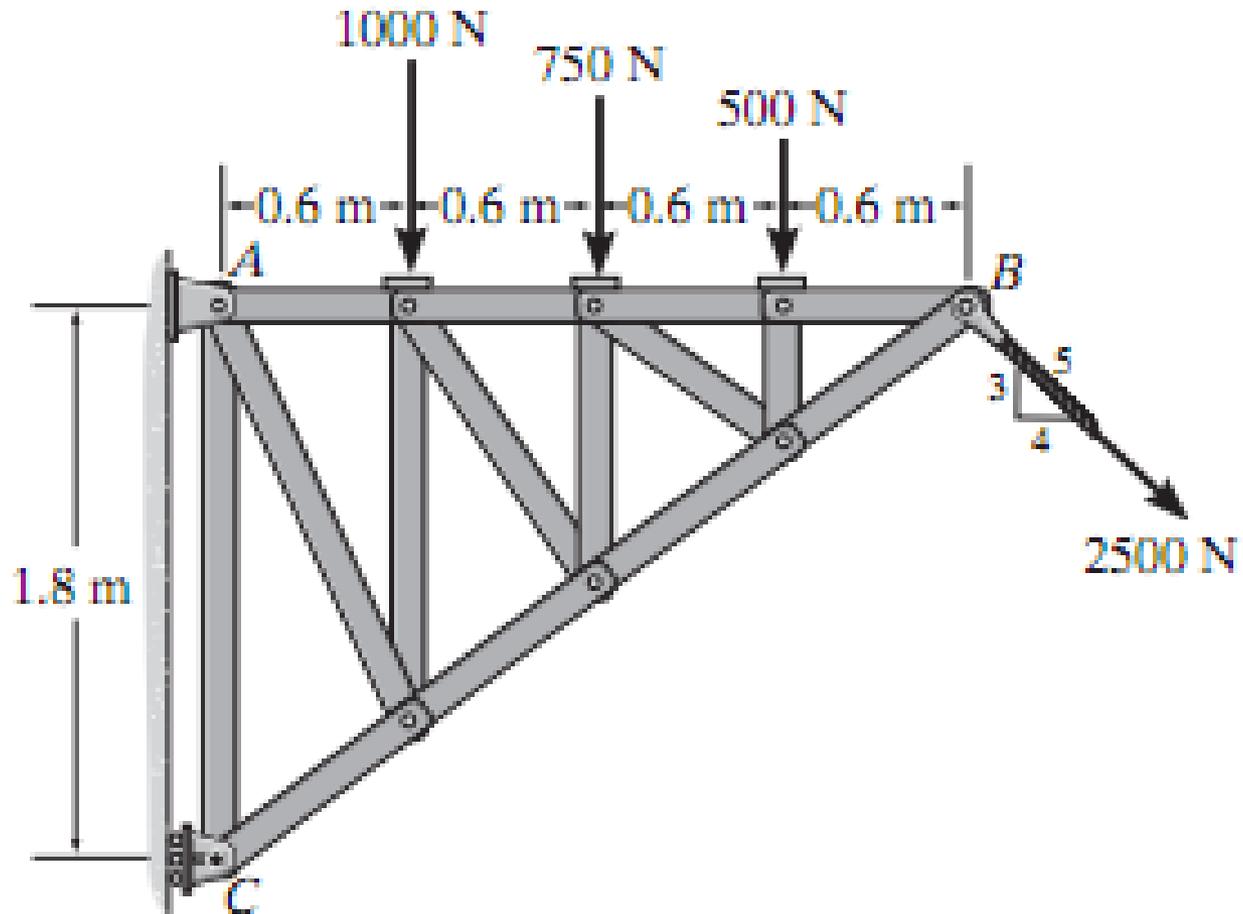


$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad (+ M_C &= 200 \cos 30^\circ (1.2) - 300 \left( \frac{4}{5} \right) (1.2) \\
 &= -80.15 \text{ N} \cdot \text{m} = 80.15 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Ans}
 \end{aligned}$$

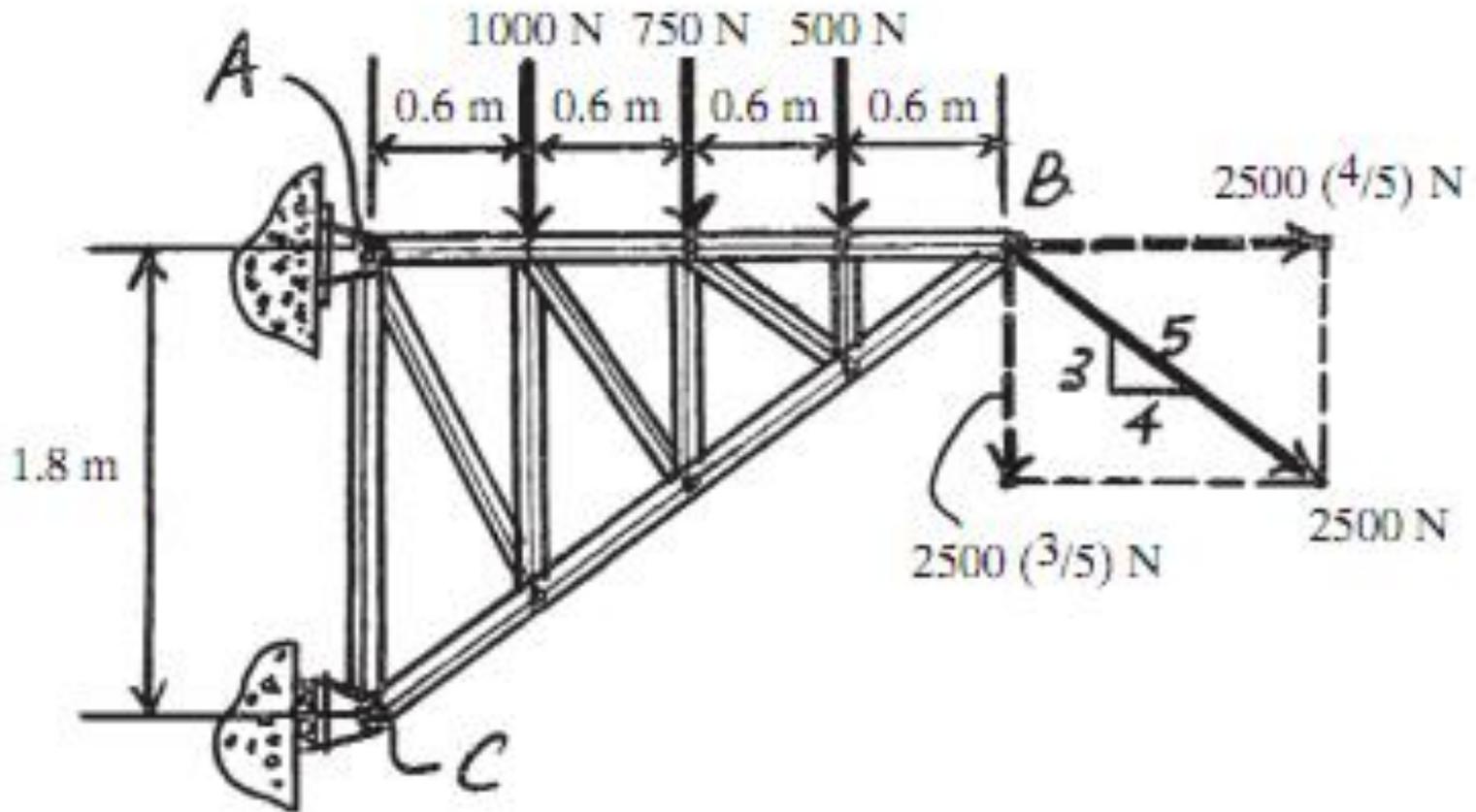
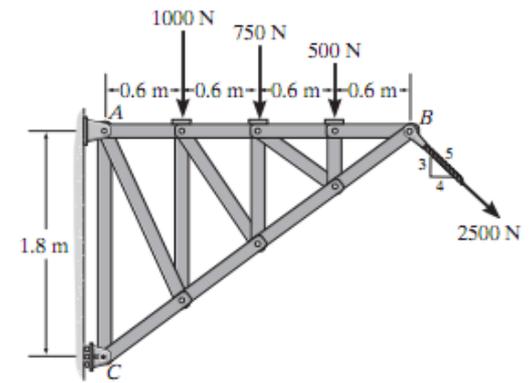
$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad (+ M_C &= -200 \cos 30^\circ (0.6) + 200 \cos 30^\circ (1.8) + 300 \left( \frac{4}{5} \right) (0.9) + \\
 &300 \left( \frac{3}{5} \right) (2.1) - 300 \left( \frac{4}{5} \right) (2.1) - 300 \left( \frac{3}{5} \right) (2.1) \\
 &= -80.15 \text{ N} \cdot \text{m} = 80.15 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Ans}
 \end{aligned}$$

## Exemplo 5:

Substituir o sistema de forças atuando na treliça da figura por uma força e um momento de binário resultante agindo no ponto C



# Exemplo 5:



# Exemplo 5:

**Equivalent Resultant Force:** The 2500-N force is resolved into its  $x$  and  $y$  components, Fig.  $a$ . Summing these force components algebraically along the  $x$  and  $y$  axes,

$$\rightarrow \Sigma (F_R)_x = \Sigma F_x; \quad (F_R)_x = 2500 \left( \frac{4}{5} \right) = 2000 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow \Sigma (F_R)_y = \Sigma F_y; \quad (F_R)_y = -1000 - 750 - 500 - 2500 \left( \frac{3}{5} \right) = -3750 \text{ N} = 3750 \text{ N} \downarrow$$

The magnitude of the resultant force  $\mathbf{F}_R$  is given by

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{2000^2 + 3750^2} = 4250 \text{ N} \quad \text{Ans}$$

The angle  $\theta$  of  $\mathbf{F}_R$  is

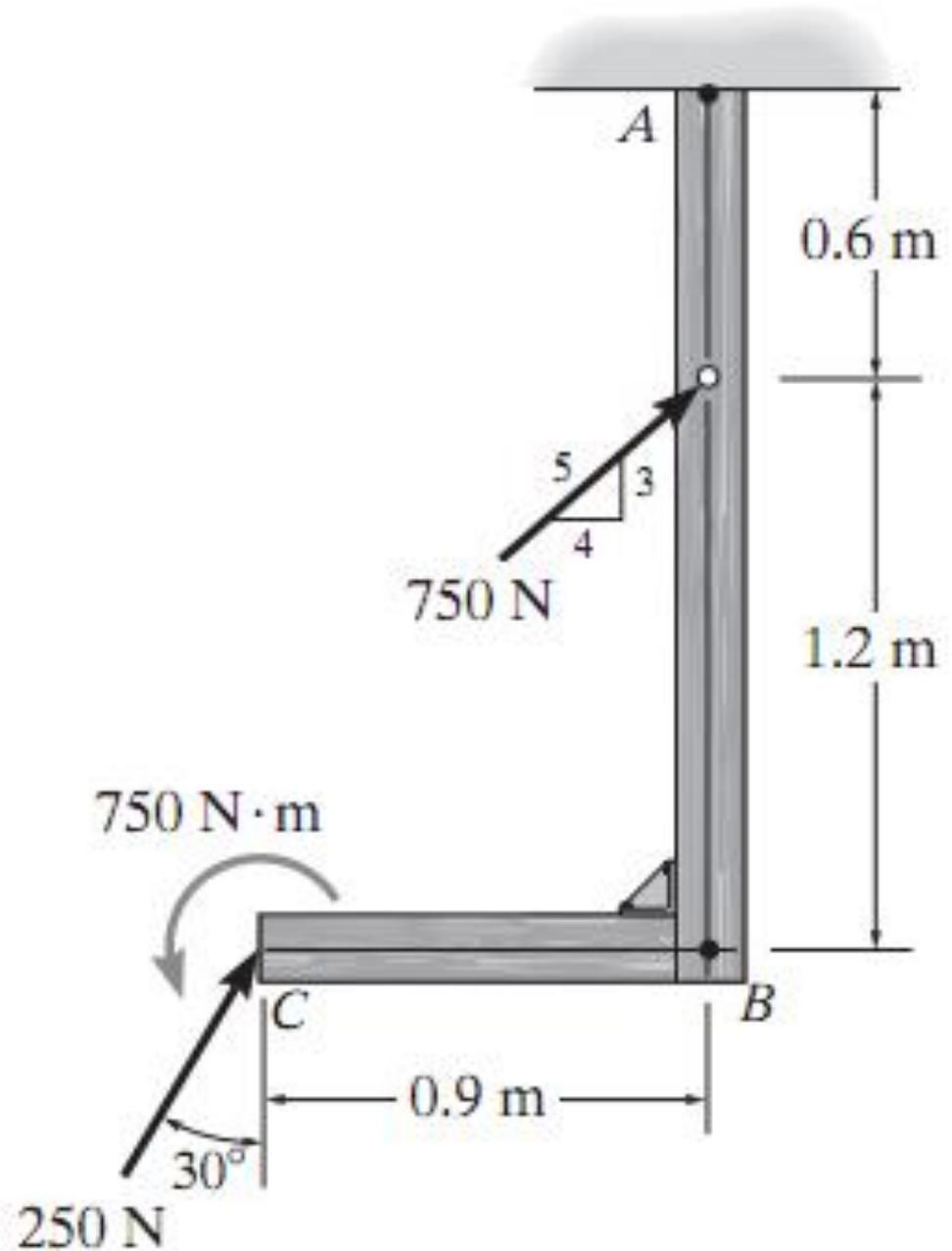
$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{(F_R)_y}{(F_R)_x} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{3750}{2000} \right] = 61.93^\circ = 61.9^\circ \quad \swarrow \quad \text{Ans}$$

**Equivalent Couple Moment:** Summing the moment of the forces and force components, Fig.  $a$ , algebraically about point  $C$ ,

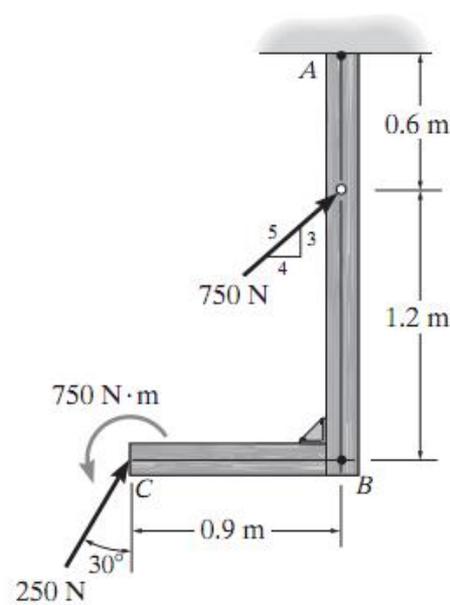
$$\begin{aligned} \zeta + (M_R)_C = \Sigma M_C; \quad (M_R)_C &= -1000 (0.6) - 750 (1.2) - 500 (1.8) - 2500 \left( \frac{3}{5} \right) (2.4) - 2500 \left( \frac{4}{5} \right) (1.8) \\ &= -9600 \text{ N} \cdot \text{m} = 9.60 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ (clockwise)} \quad \text{Ans} \end{aligned}$$

## Exemplo 6:

Substituir o sistema de forças e os binários atuando na estrutura da figura por uma força resultante equivalente e especifique onde a linha de ação da resultante intercepta o membro BC medida a partir de B



# Exemplo 6:



$$\rightarrow F_{Rx} = \Sigma F_x; \quad F_{Rx} = 750 \left( \frac{4}{5} \right) + 250 \sin 30^\circ = 725 \text{ N}$$

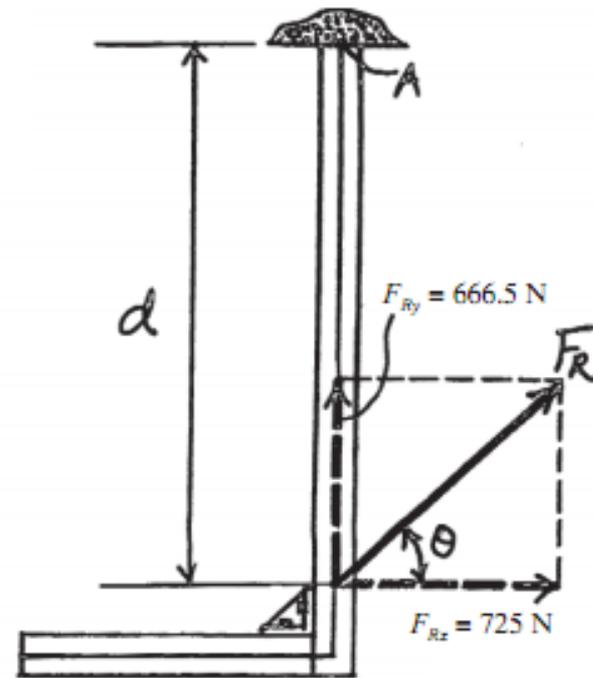
$$+\uparrow F_{Ry} = \Sigma F_y; \quad F_{Ry} = 250 \cos 30^\circ + 750 \left( \frac{3}{5} \right) = 666.5 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{(725)^2 + (666.5)^2} = 984.8 \text{ N} \quad \text{Ans}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{666.5}{725} \right) = 42.6^\circ \quad \text{Ans}$$

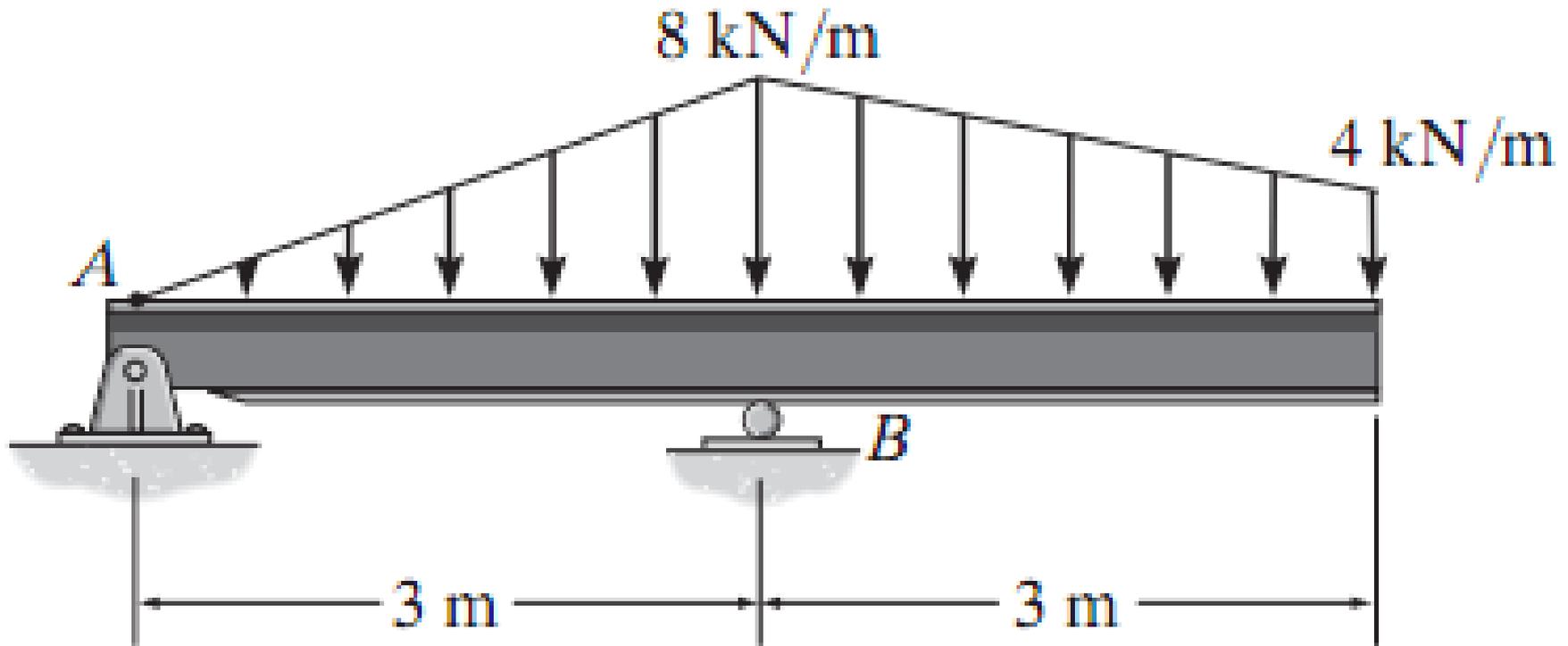
$$\begin{aligned} (+ M_{RA} = \Sigma M_A; \quad 725 (d) &= 750 \left( \frac{4}{5} \right) (0.6) - 250 \cos 30^\circ (0.9) \\ &+ 250 \sin 30^\circ (1.8) + 750 \end{aligned}$$

$$d = 1.57 \text{ m} \quad \text{Ans}$$



## Exemplo 7:

Substituir o carregamento distribuído por uma força resultante equivalente e especifique sua posição na viga medindo a partir de A



# Exemplo 7:

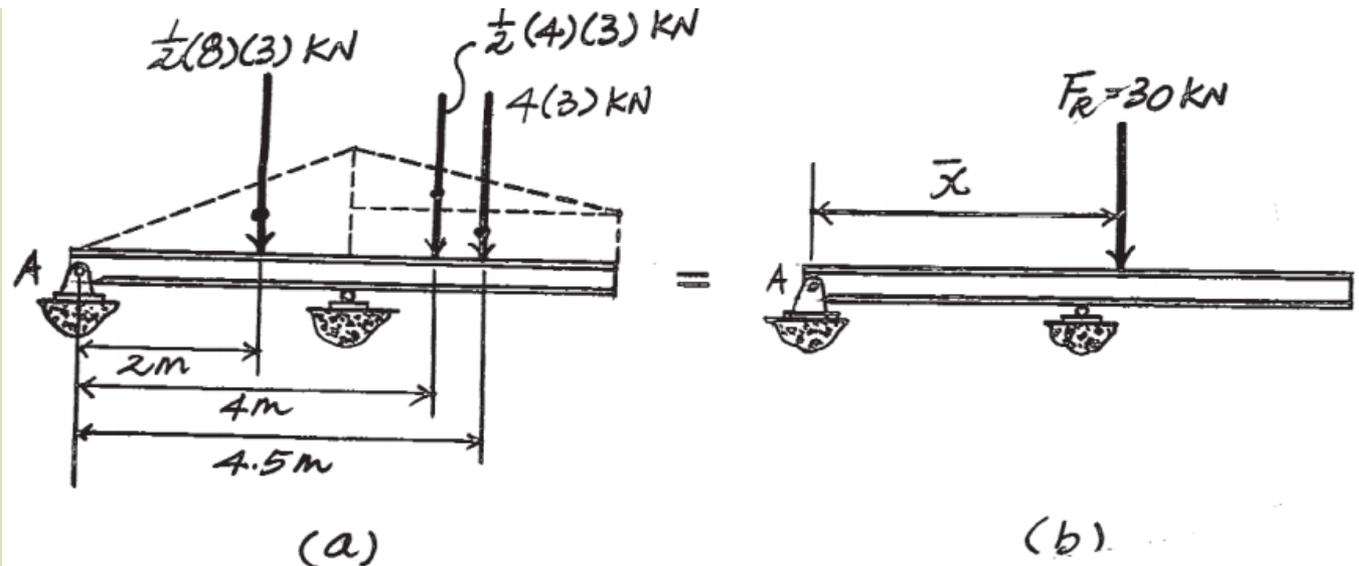
**Loading:** The distributed loading can be divided into three parts as shown in Fig. *a*.

**Resultants:** Equating the sum of the forces along the *y* axis of Figs. *a* and *b*,

$$+\downarrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \quad F_R = \frac{1}{2}(8)(3) + \frac{1}{2}(4)(3) + 4(3) = 30 \text{ kN} \downarrow \quad \text{Ans}$$

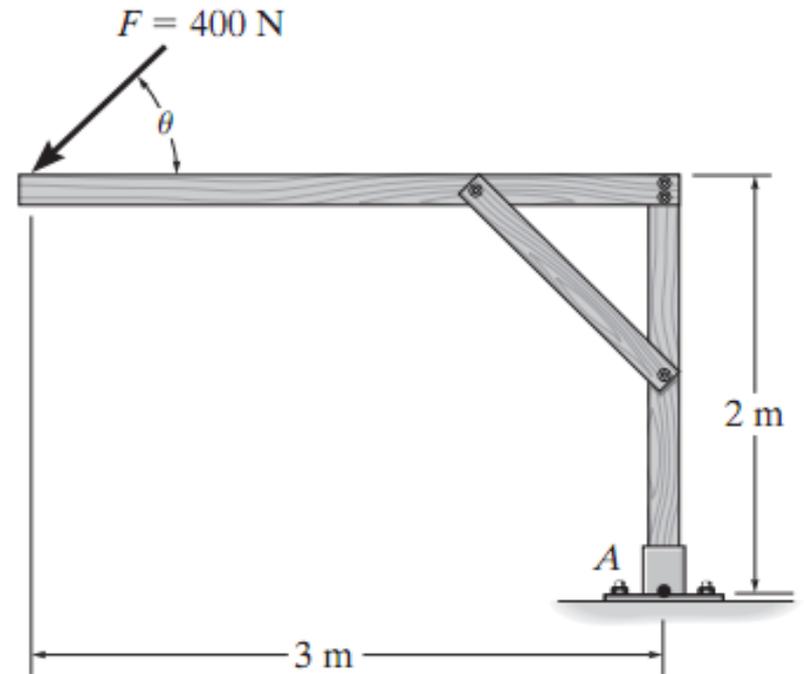
If we equate the moments of  $F_R$ , Fig. *b*, to the sum of the moment of the forces in Fig. *a* about point *A*,

$$\begin{aligned} (+)(M_R)_A = \Sigma M_A; \quad -30(\bar{x}) &= -\frac{1}{2}(8)(3)(2) - \frac{1}{2}(4)(3)(4) - 4(3)(4.5) \\ (\bar{x}) &= 3.4 \text{ m} \quad \text{Ans} \end{aligned}$$



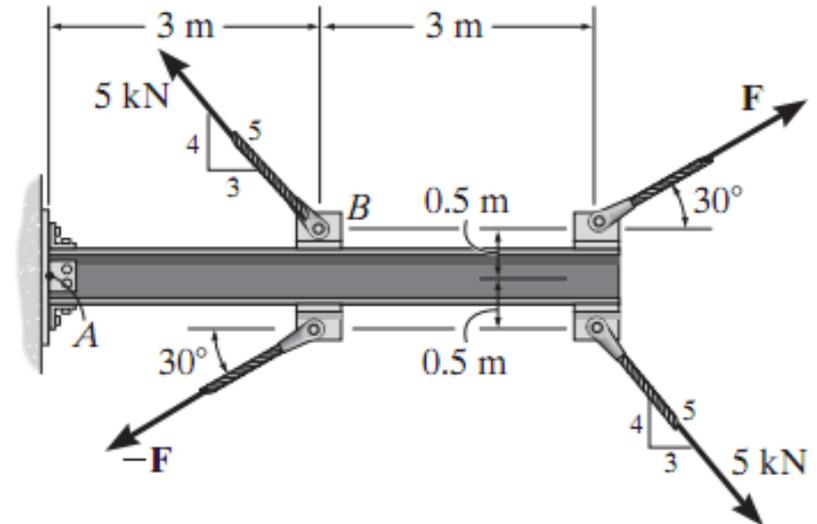
## Exercício 1:

Determine a direção  $\theta$  ( $0 < \theta < 180$ ) da força  $F$  que produz o momento máximo em torno do ponto A. calcule o valor desse momento.



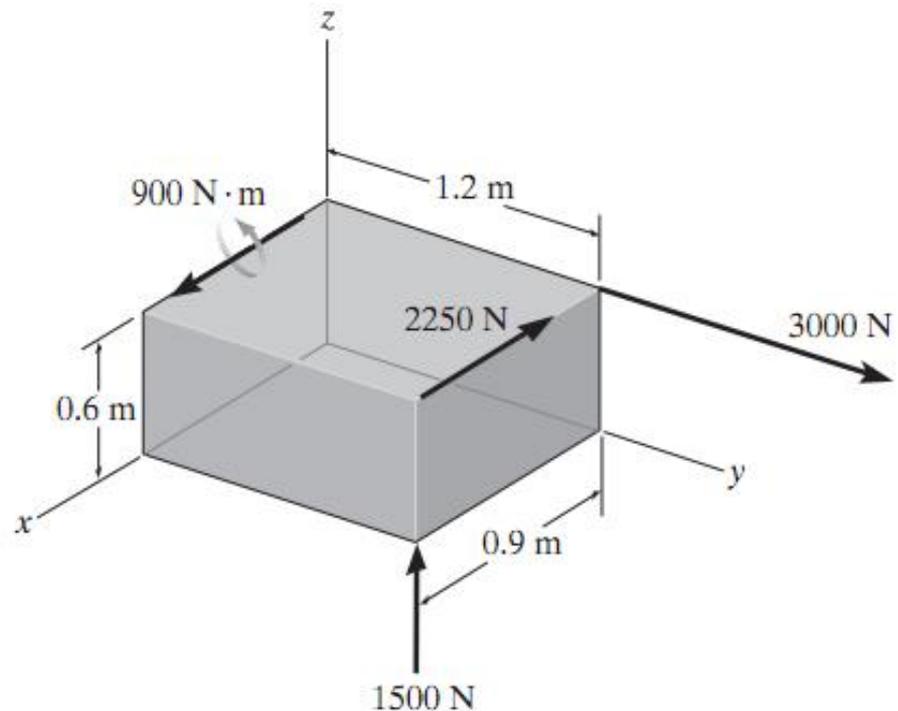
## Exercício 2:

Determine a intensidade necessária da força  $F$  se o momento de binário resultante sobre a viga deve ser zero



### Exercício 3:

Substitua o sistema de forças e momentos de binário que agem sobre o bloco retangular por um tursor. Especifique a intensidade da força e o momento de binário do tursor e a posição onde a linha de ação intercepta o plano x-y



### Exercício 4:

Substitua o carregamento distribuído por uma força resultante equivalente e especifique sua posição na viga, medindo a partir do ponto A

