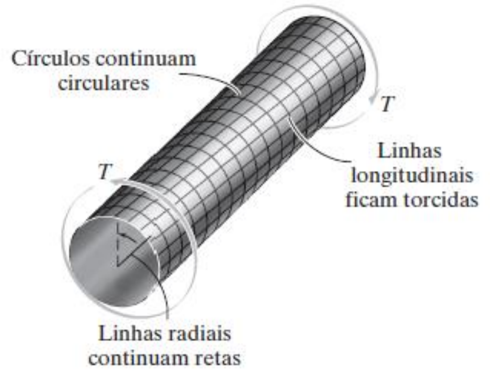
Torção

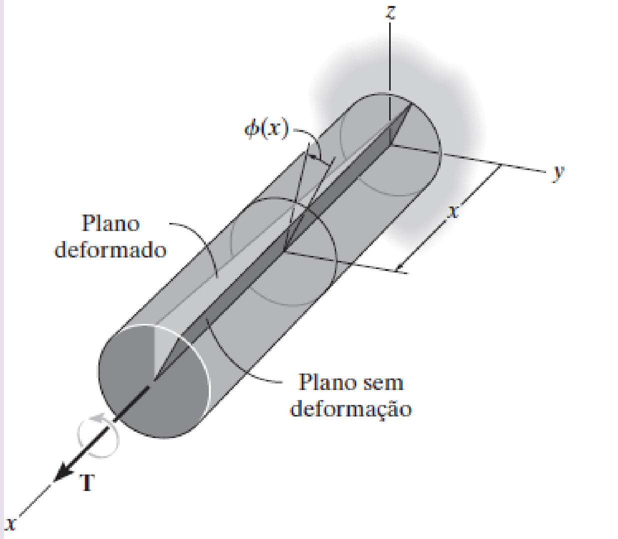
Deformação por torção de um eixo circular

- *Torque* é um momento que tende a torcer um elemento em torno de seu eixo longitudinal.
- Se o ângulo de rotação for *pequeno*, o *comprimento e o raio do eixo permanecerão inalterados*.


Antes da deformação
(a)



Depois da deformação
(b)

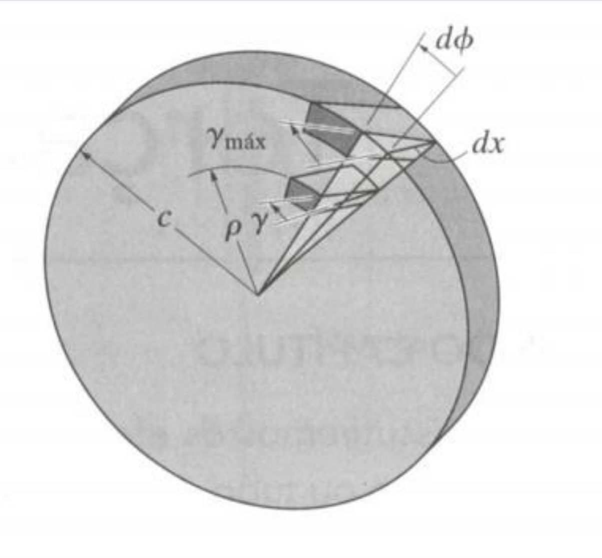


O ângulo de torção $\phi(x)$ aumenta à medida que x aumenta.

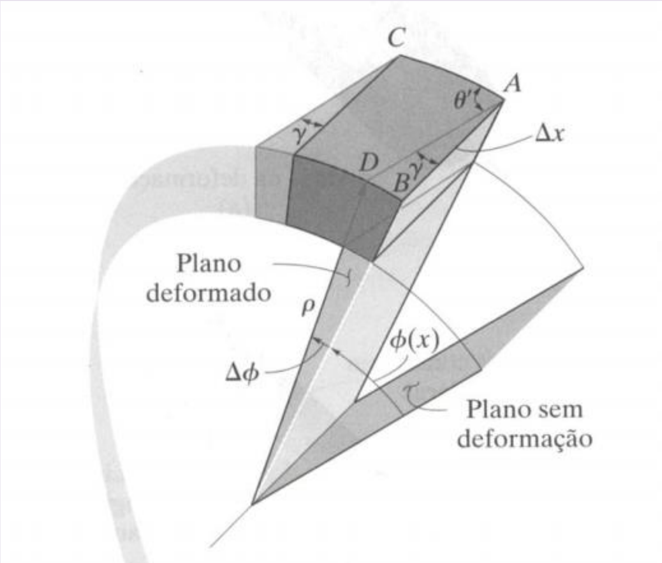
Torção

Cisalhamento por torção

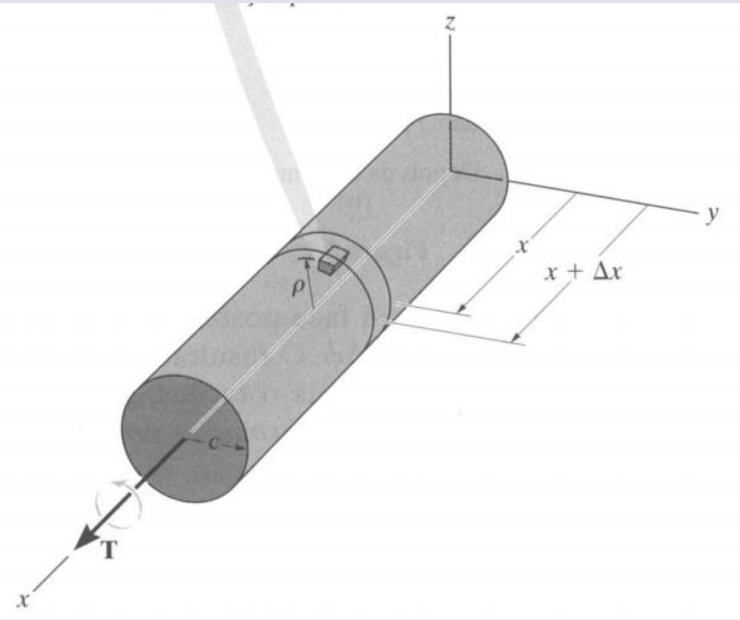
- $BD = \rho \, d\phi = dx \, \gamma$ $$\gamma = \frac{\pi}{2} - \lim_{B,D \to A} \theta'$$
- $\gamma = \rho \, d\phi/dx$, como $d\phi/dx$ = para todos os elementos na seção transversal na posição x, então a deformação por cisalhamento é proporcional a ρ
- Como $d\phi/dx = \gamma / \rho = \gamma_{max} / c$ então: $\gamma = (\rho / c) \, \gamma_{max}$



A tensão de cisalhamento para o material aumenta linearmente com ρ, isto é, $\gamma = (\rho/c)\gamma_{máx}$.



Deformação por cisalhamento do elemento



$\gamma = (\rho / c) \, \gamma_{max}$

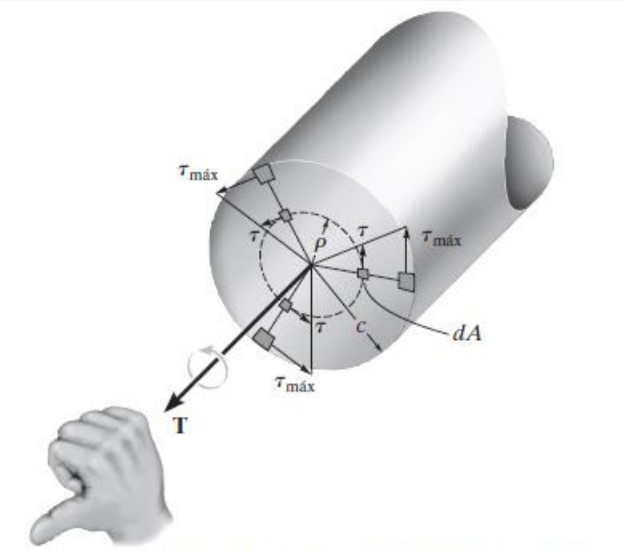
A fórmula da torção

- Se o material for linear elástico, então a lei de Hooke se aplica $\tau = G\gamma$.
- Uma ***variação linear na deformação por cisalhamento*** γ **resultа em uma** ***variação linear na tensão de cisalhamento*** τ correspondente, ao longo de qualquer linha radial na seção transversal. Portanto, igual que no caso da deformação por cisalhamento, τ *variará de zero a* τ_{max}

$$\tau = (\rho / c)\ \tau_{max}$$

Para qualquer elemento de área dA localizado em ρ teremos uma força $F = \tau\, dA$. O torque produzido por F será $dT = \rho\, \tau dA$ e para toda a seção teremos:

$$T = \int_A \rho\tau dA = \int_A \rho\frac{\rho}{c}\tau_{max}dA = \frac{\tau_{max}}{c}\int_A \rho^2 dA$$



A tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada linha radial da seção transversal.

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

$\tau_{máx}$ = tensão de cisalhamento máxima no eixo
τ = deformação por cisalhamento à distância ρ
T = torque interno resultante (método das seções!)
J = momento polar de inércia da área da seção transversal
c = raio externo do eixo
ρ = distância intermediária

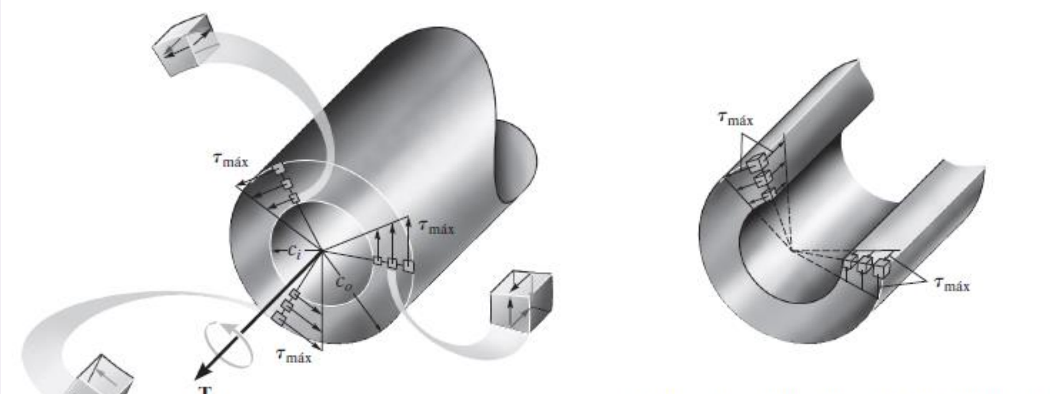
Como calcular o J (momento polar de inércia)?

- Se o eixo tiver uma seção transversal circular **maciça**, utilizamos um anel diferencial de área de espessura dρ portanto dA = 2$\pi\rho$dρ e a integral (0 a c) fica:

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

- Se o eixo tiver uma seção transversal **tubular**,

$$J = \frac{\pi}{2}\left(c_o^4 - c_i^4\right)$$



(a)

A tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada linha radial da seção transversal.

(b)

Exemplo 1

O eixo *maciço* de raio *c* é submetido a um torque **T**. Determine a fração de T à qual resiste o material contido no interior da região externa do eixo, que tem raio interno *c*/2 e raio externo *c.*

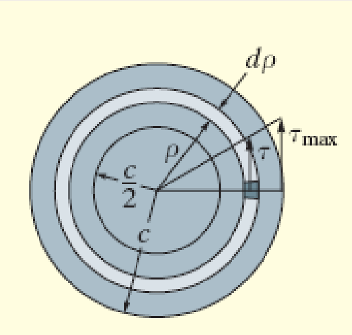
Solução:

A tensão no eixo varia linearmente, tal que $\tau = (\rho / c)\tau_{\text{máx}}$.

O torque no anel (área) localizado no interior da região sombreada mais clara é

$$dT' = \rho(\tau dA) = \rho(\rho/c)\tau_{\text{máx}}(2\pi\rho d\rho)$$

Para toda a área sombreada mais clara, o torque é



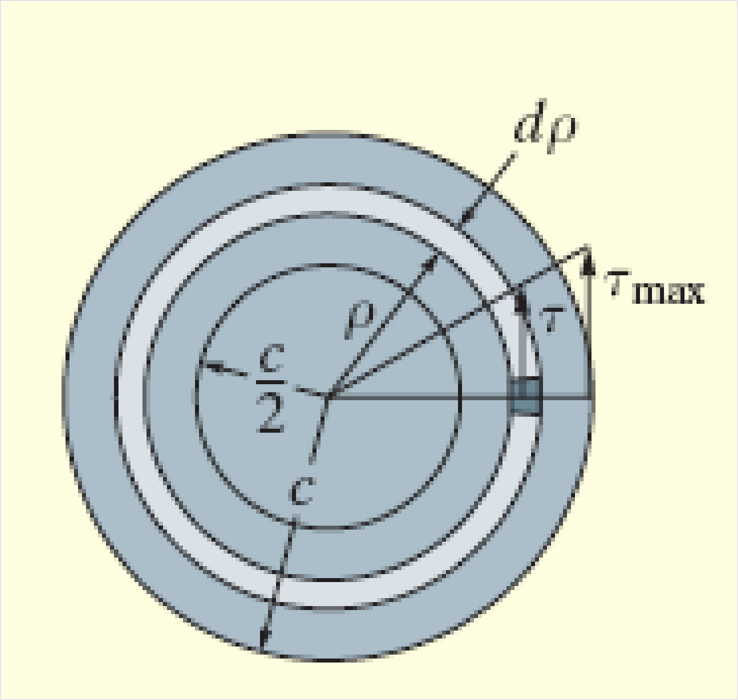
$$T' = \frac{2\pi\tau_{\text{máx}}}{c}\int_{c/2}^{c}\rho^3 d\rho = \frac{15\pi}{32}\tau_{\text{máx}}c^3 \quad (1)$$

Qual o valor de τ_{max} em função do torque interno resultante T?

Usando a fórmula de torção para determinar a tensão máxima no eixo, temos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} = \frac{Tc}{(\pi/2)c^4}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{2T}{\pi c^3}$$

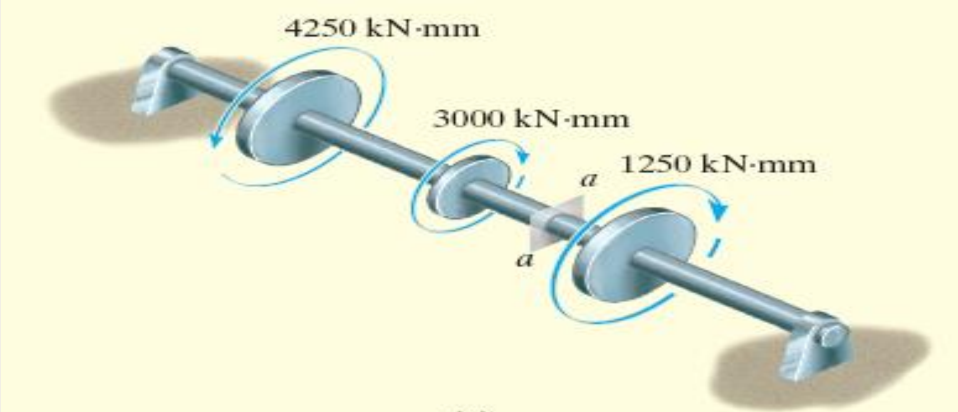


Substituindo essa expressão na Equação 1,

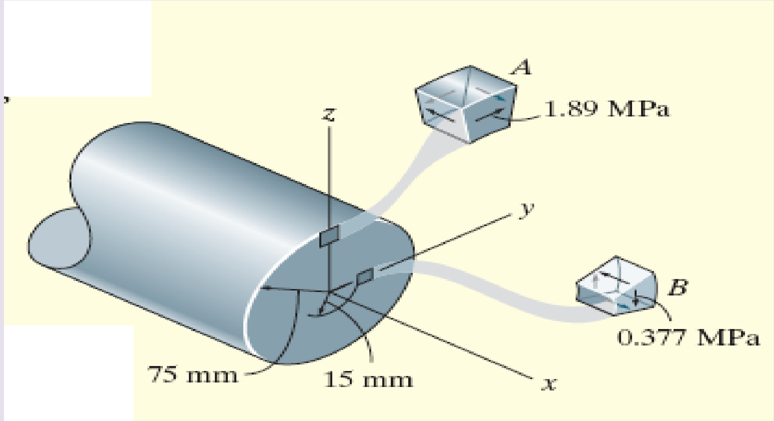
$$T' = \frac{15}{16}T \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 2

O eixo está apoiado em dois mancais e sujeito a três torques. Determine a **tensão de cisalhamento** desenvolvida nos pontos *A* e *B* localizados na seção *a–a* do eixo.

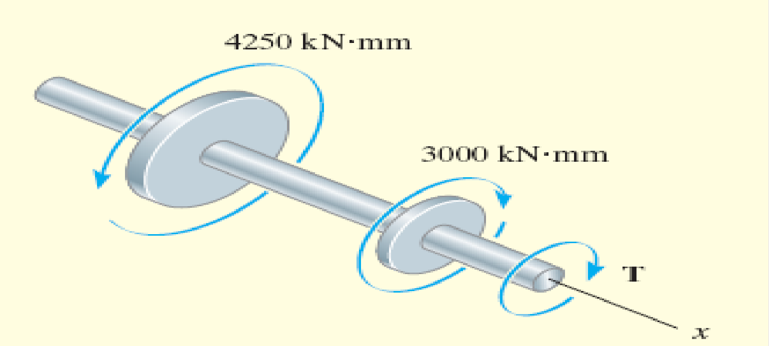


(a)



Solução:

Pelo diagrama de corpo livre do segmento esquerdo determinamos o torque interno resultante na seção:



$$\sum M_x = 0; \quad 4.250 - 3.000 - T = 0 \Rightarrow T = 1.250\,\text{kN}\cdot\text{mm}$$

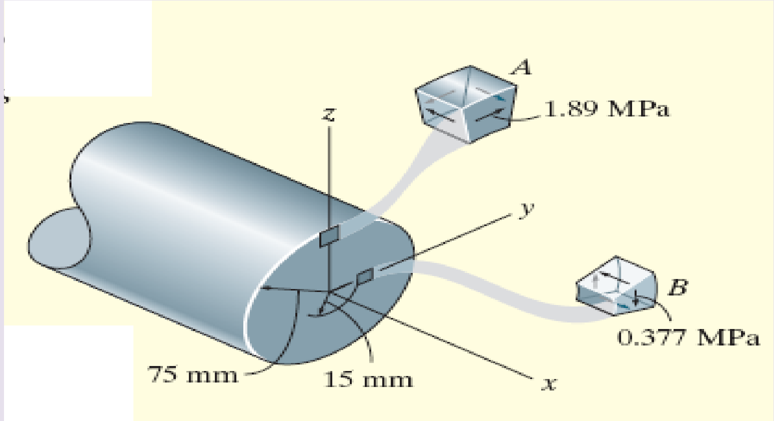
O momento polar de inércia para o eixo é $J = \dfrac{\pi}{2}(75)^4 = 4{,}97 \times 10^7\ \text{mm}^4$

Visto que *A* se encontra em $\rho = c = 75$ mm, utilizando a fórmula da torção...

$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{(1.250)(75)}{4{,}97 \times 10^7} = 1{,}89\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$

Da mesma forma, para *B*, em ρ =15 mm, temos

$$\tau_B = \frac{Tc}{J} = \frac{(1.250)(15)}{4{,}97 \times 10^7} = 0{,}377\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$



Transmissão de potência

- ***Potência*** é definida como o trabalho realizado por unidade de tempo.
- Para um eixo rotativo com torque, a potência é:

$$P = T\omega \quad \text{onde a velocidade angular do eixo é } \omega = d\theta / dt$$

- Visto que $1\,\text{ciclo} = 2\pi\ \text{rad} \Rightarrow \omega = 2\pi f$, a equação para a potência é

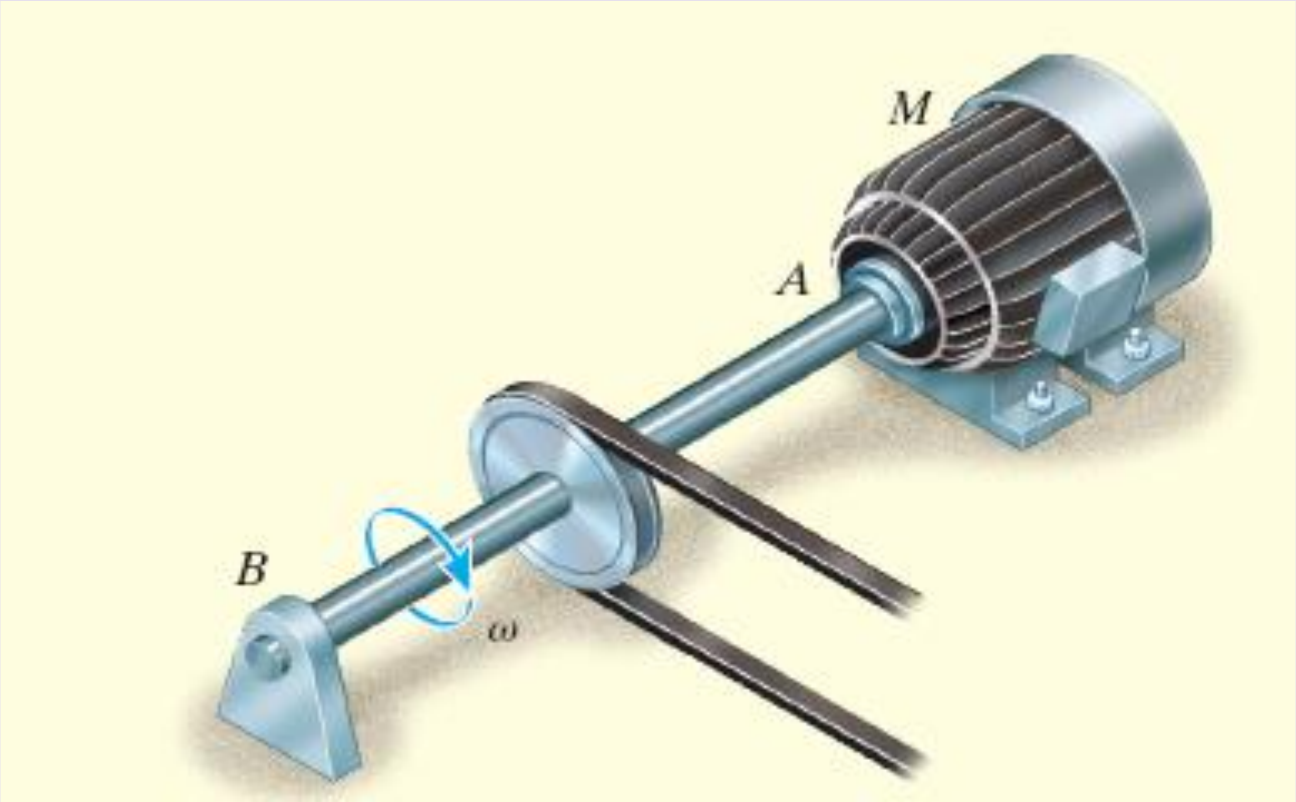
$$\boxed{P = 2\pi f T}$$

- Se conhecemos o torque T e τ_{adm}, para o projeto do eixo, o parâmetro de projeto ou parâmetro geométrico sai de:

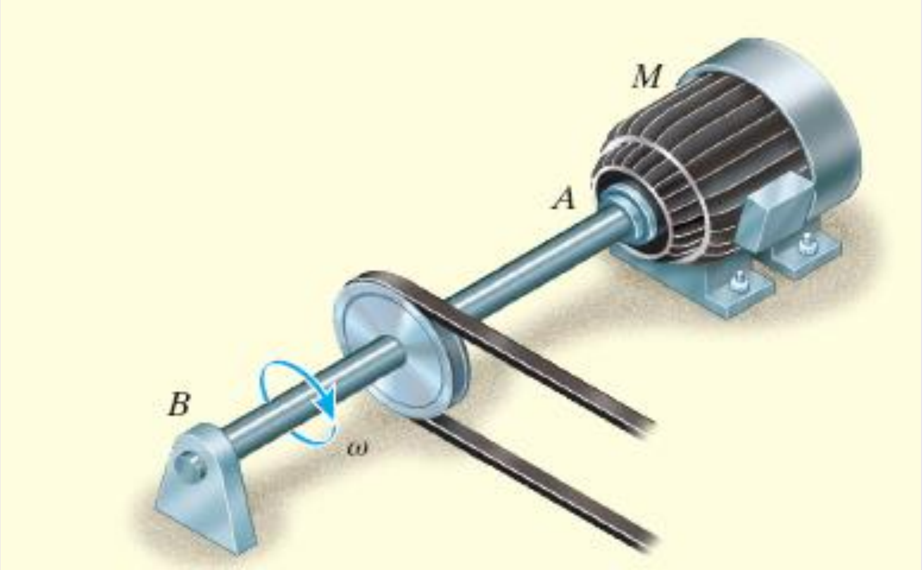
$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{adm}}}$$

Exemplo 3

Um eixo maciço de aço *AB* será usado para transmitir 3.750 W do motor *M* ao qual está acoplado. Se o eixo girar a ω = 175 rpm e o aço tiver uma tensão de cisalhamento admissível τ_{adm} = 100 MPa, determine o diâmetro exigido para o eixo com precisão de 1 mm.



Solução:



O torque no eixo é

$$P = T\omega$$

$$3.750 = T\left(\frac{175\times 2\pi}{60}\right) \Rightarrow T = 204{,}6\ \text{Nm}$$

Assim, o parâmetro geométrico é:

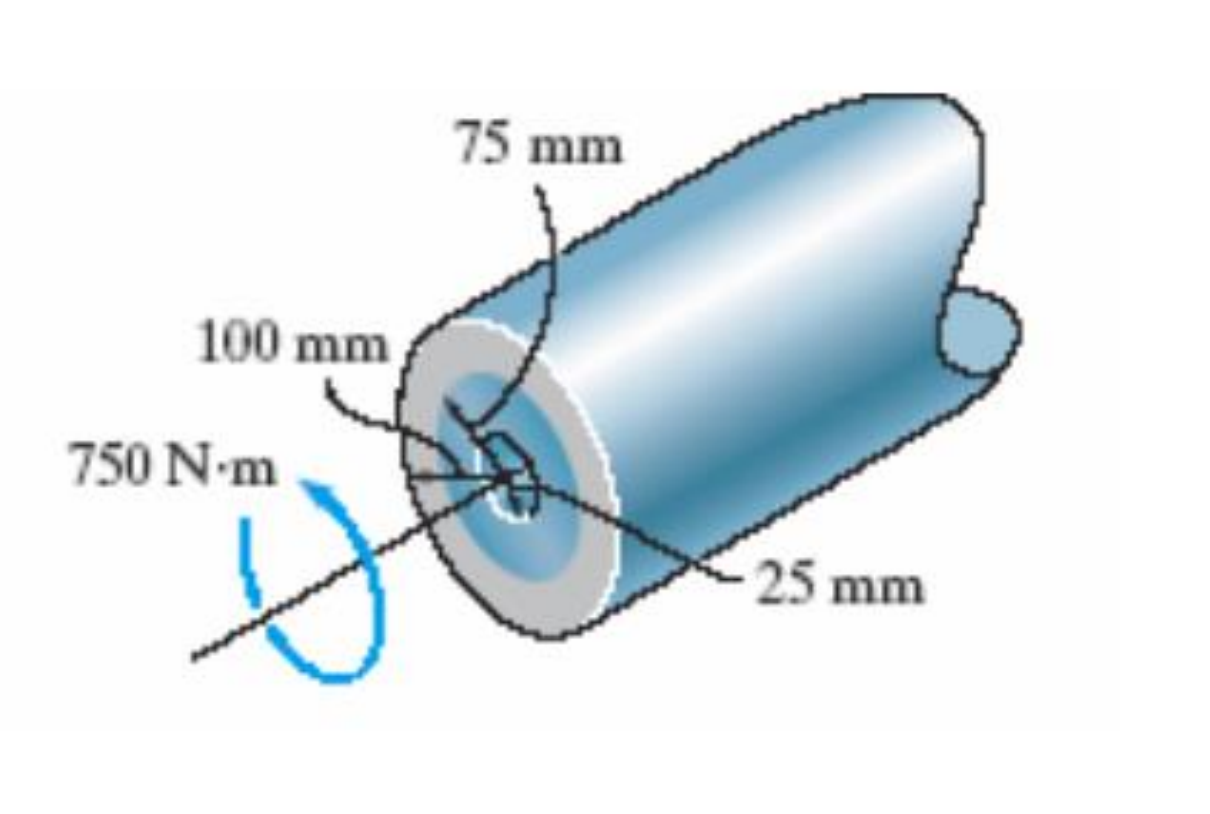
$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2}\frac{c^4}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{adm}}}$$

$$c = \left(\frac{2T}{\pi\tau_{\text{adm}}}\right)^{1/3} = \left(\frac{2(204{,}6)(1.000)}{\pi(100)}\right)^{1/3} = 10{,}92\ \text{mm}$$

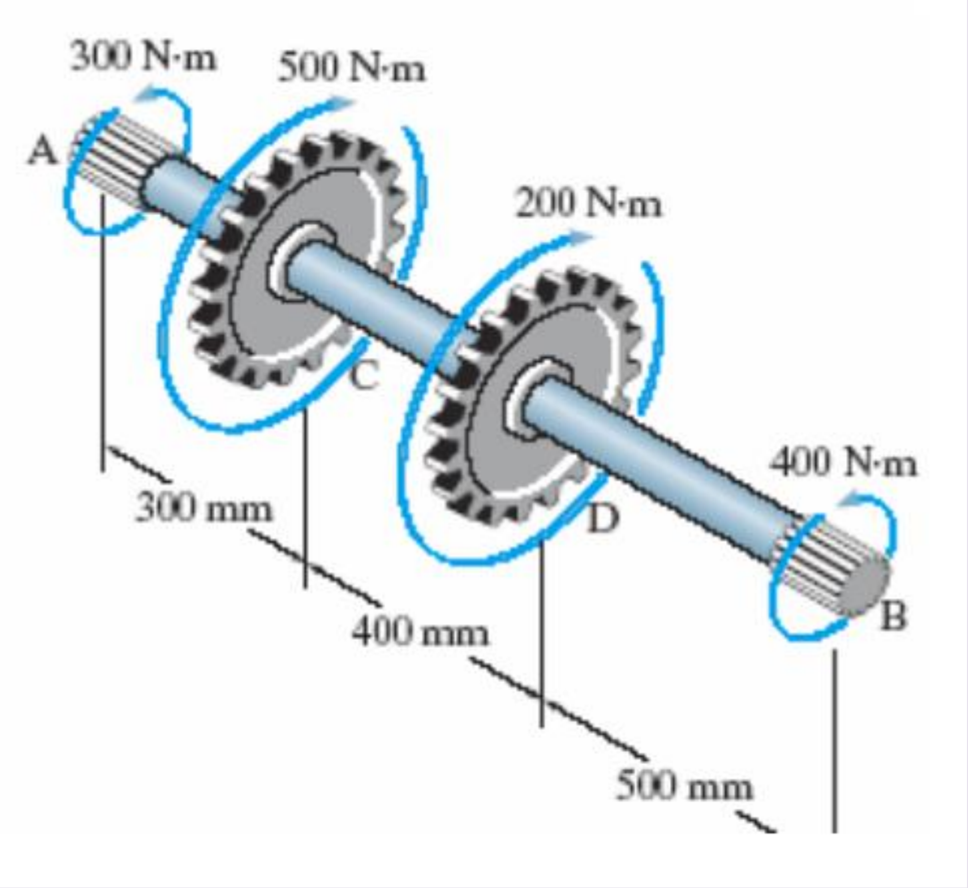
Visto que $2c$ = 21,84 mm, selecione um eixo com diâmetro 22 mm.

Exercícios

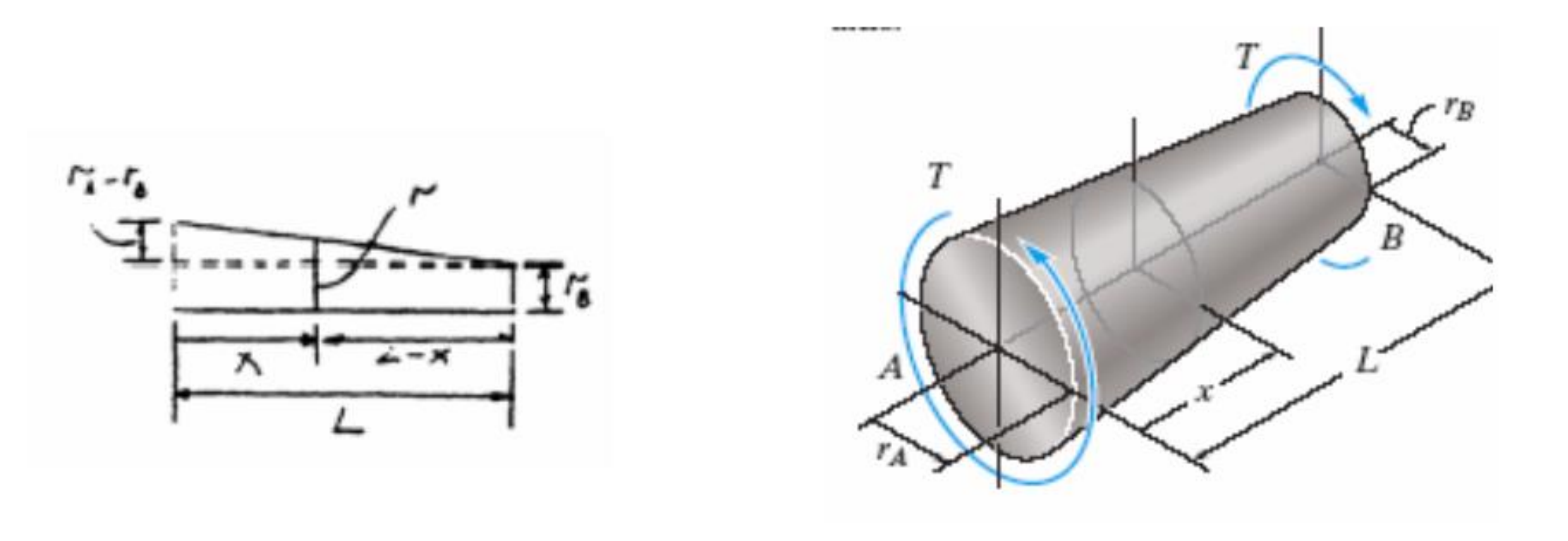
1. O tubo da figura é submetido a um torque de 750 Nm. Determine a parcela desse torque à qual a seção sombreada cinza resiste. Resolva o problema de duas maneiras: (a) usando a fórmula da torção e (b) determinando a resultante da distribuição da tensão de cisalhamento (5.4)



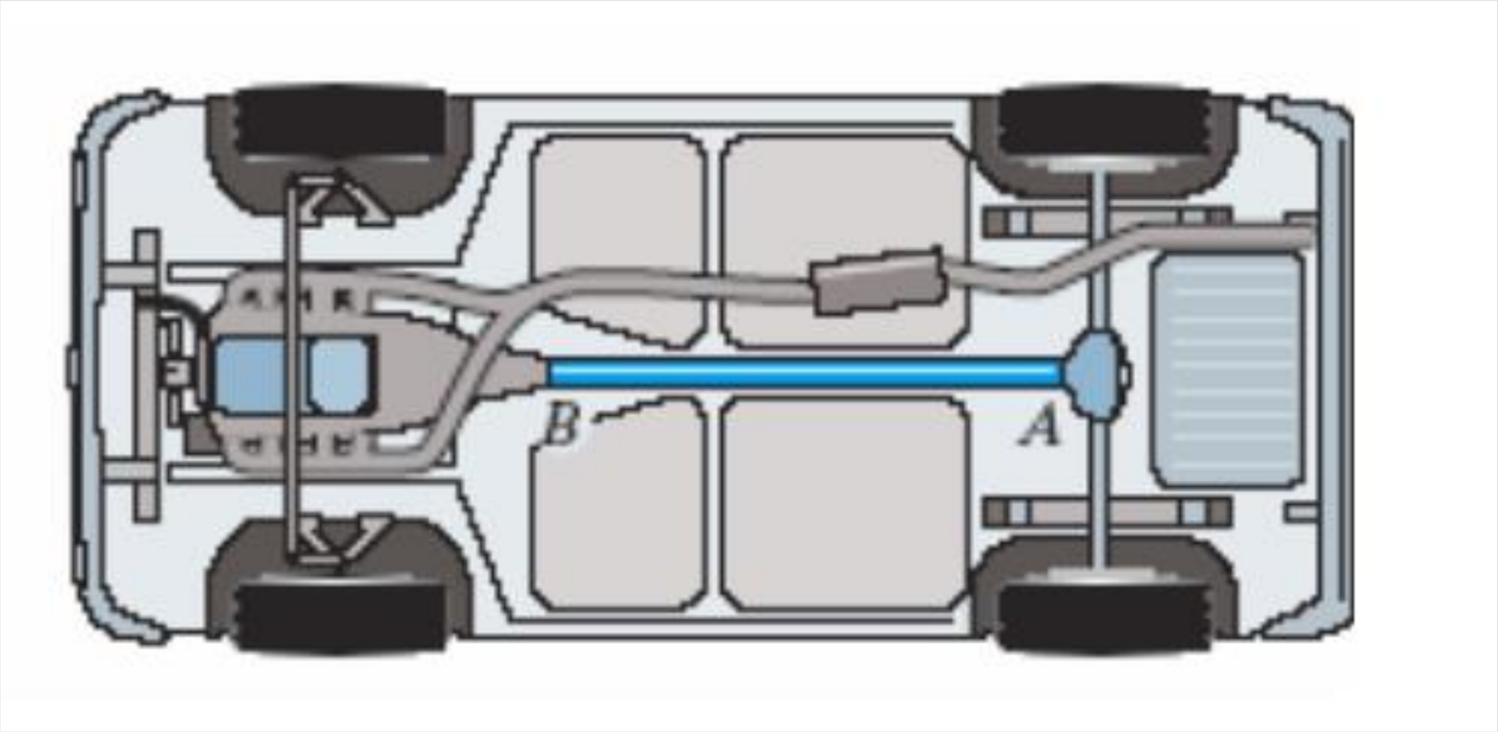
2. O eixo maciço de 30mm de diâmetro é usado para transmitir os torques aplicados às engrenagens. Determine a tensão de cisalhamento máxima (em valores absolutos) no eixo. (5.5)



3. O eixo maciço tem conicidade linear r_A em uma extremidade e r_B na outra extremidade. Deduza uma equação que dê a tensão de cisalhamento máxima no eixo em uma localização x ao longo da linha central do eixo. (5.30)

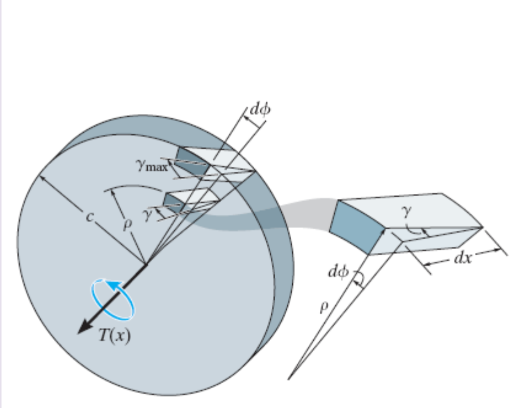


4. O projeto de um automóvel prevê que o eixo de transmissão AB será um tubo com parede fina. O motor transmite 125 kW quando o eixo está girando a 1500 rev/min. Determine a espessura mínima da parede do eixo se o diâmetro externo for 62,5 mm. A tensão de cisalhamento admissível do material é τ_{adm} = 50 Mpa. (5.33)



Ângulo de torção - ϕ

Para o disco diferencial de espessura dx localizado em x o torque em geral será T(x). Sendo dϕ o deslocamento relativo de uma face em relação à outra já sabemos que a uma distância ρ do eixo teremos $\gamma = \rho\, d\phi/dx$. Como $\tau = G\gamma$ e como $\tau = T\rho/J$ teremos:



$\gamma = T(x)\, \rho/J(x)G$ substituindo teremos: $$d\phi = \frac{T(x)}{J(x)G}dx$$

- Integrando em todo o comprimento *L* do eixo, temos

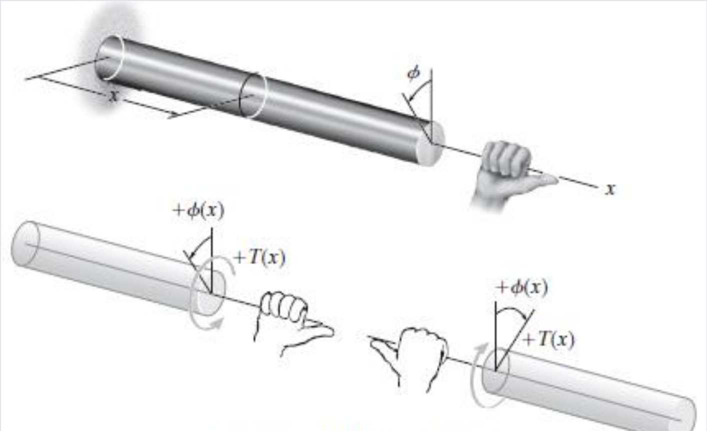
$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{J(x)G}$$

Φ = ângulo de torção
$T(x)$ = torque interno
$J(x)$ = momento polar de inércia do eixo
G = módulo de elasticidade ao cisalhamento

- Por exemplo, se o material é homogêneo, com seção, T e *G* constantes....

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

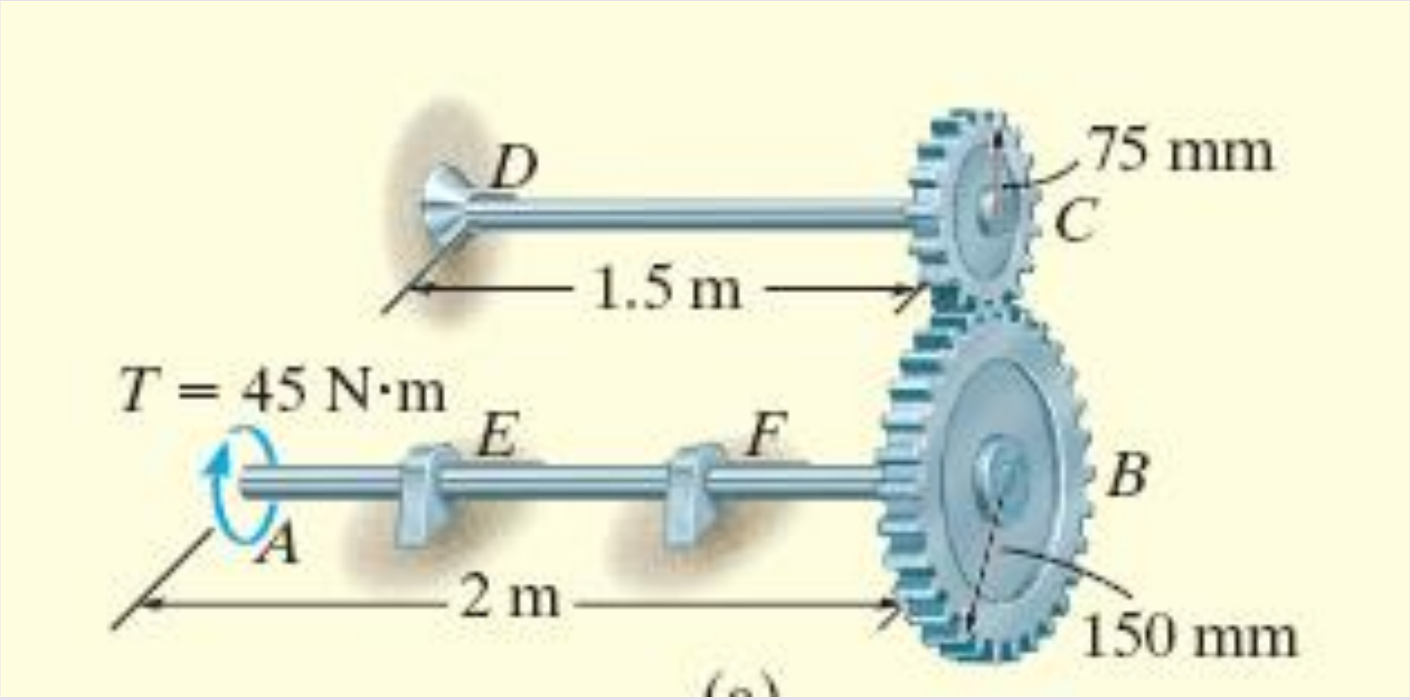
- A convenção de sinal é determinada pela regra da mão direita.



Convenção de sinal positivo para T e ϕ.

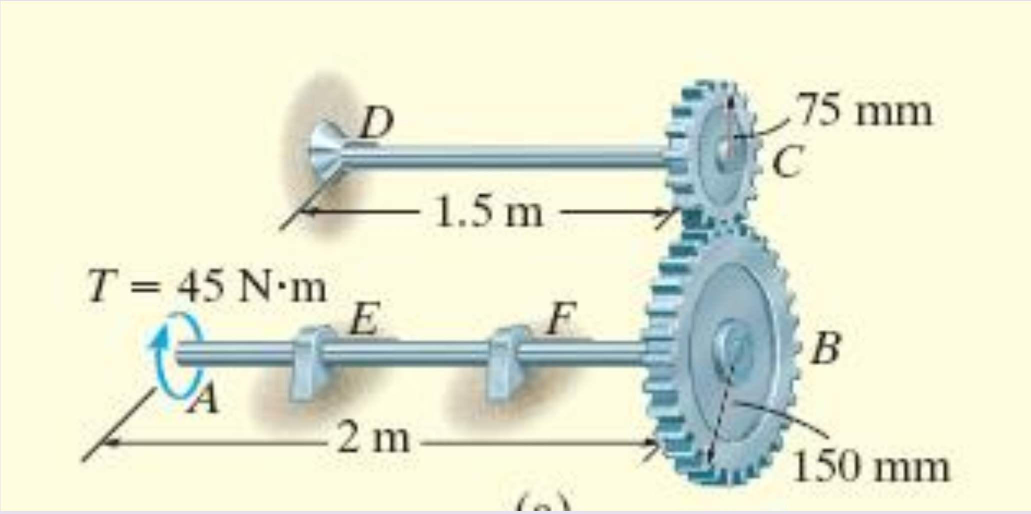
Exemplo 4

Os dois eixos maciços de aço estão interligados por meio das engrenagens. Determine o ângulo de torção da extremidade *A* do eixo *AB* quando é aplicado o torque 45 Nm. Considere *G* = 80 GPa. O eixo *AB* é livre para girar dentro dos mancais *E* e *F*, enquanto o eixo *DC* é fixo em *D*. Cada eixo tem diâmetro de 20 mm.



Solução:

Do diagrama de corpo livre, entre as engrenagens teremos uma F e um T será transmitido a D:



$$F = 45/0{,}15 = 300\ \text{N}$$

$$(T_D)_x = 300(0{,}075) = 22{,}5\ \text{Nm}$$

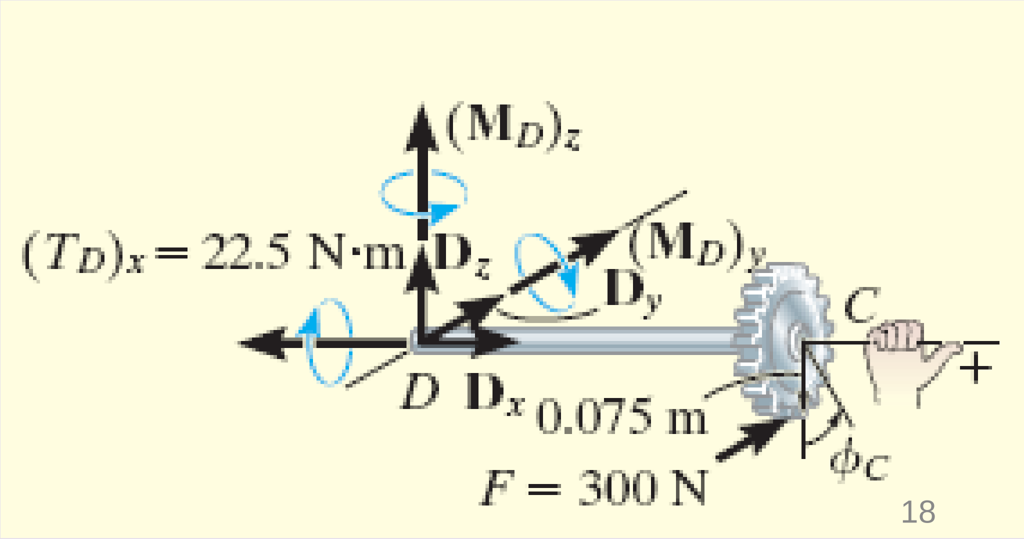
1. O ângulo de torção da engrenagem *C* é

$$\phi_C = \frac{T\ L_{DC}}{JG} = \frac{(+22{,}5)(1{,}5)}{(\pi/2)(0{,}001)^4\left[80(10)^9\right]} = +0{,}0269\ \text{rad}$$

Visto que as engrenagens na extremidade estão relacionadas ($r\cdot\theta$ = cte) teremos que em B,

$$\phi_B(0{,}15) = (0{,}0269)(0{,}075) \Rightarrow 0{,}0134\,\text{rad}$$

Agora determinaremos o ângulo de torção da extremidade A em relação à extremidade B.

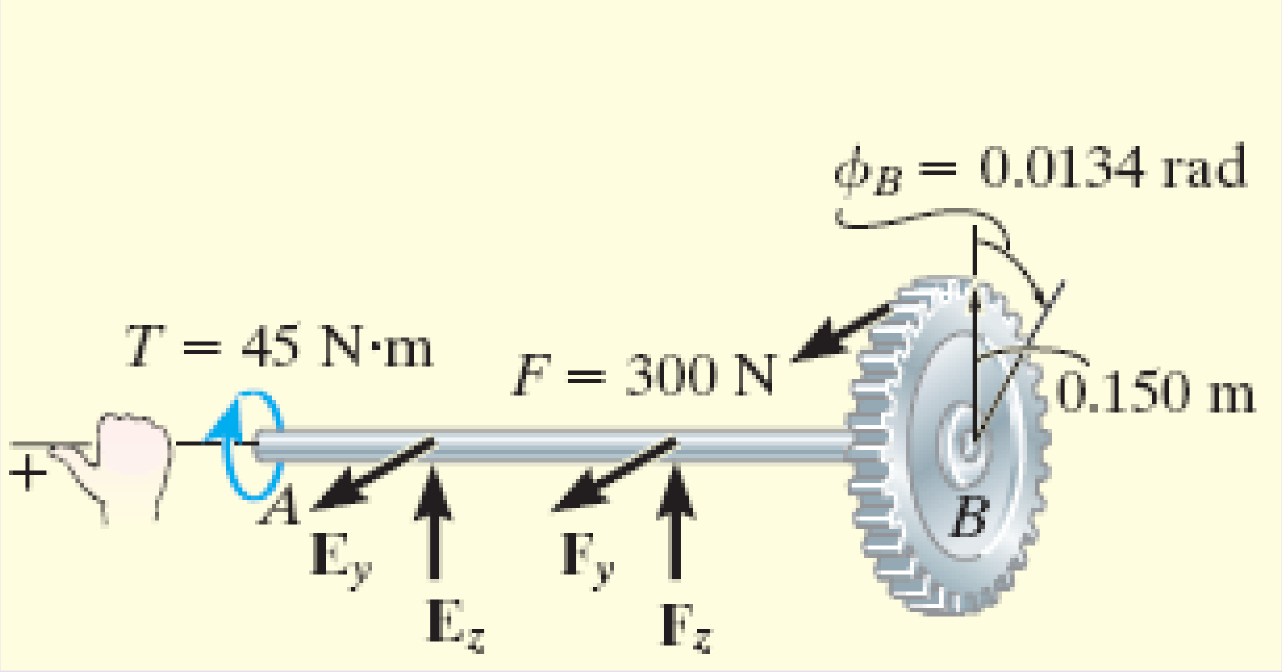


O ângulo na extremidade *A* em relação ao extremo *B* do eixo *AB* causada pelo torque de 45 Nm,

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{JG} = \frac{(+45)(2)}{(\pi/2)(0{,}010)^4\left[80(10^9)\right]} = +0{,}0716\,\text{rad}$$

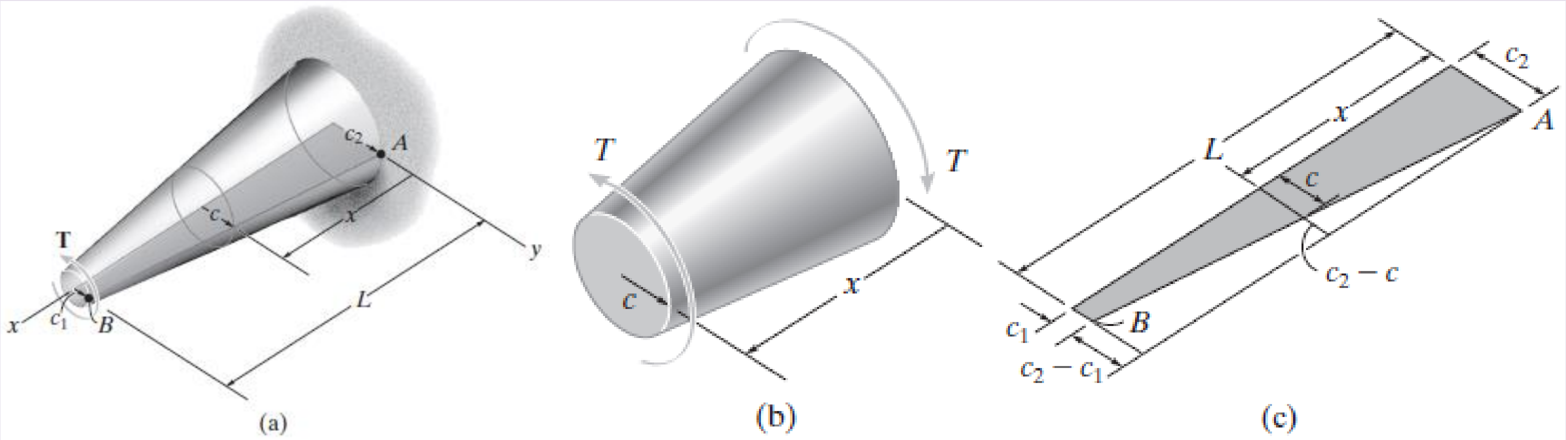
A rotação total da extremidade *A* é portanto

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 0{,}0134 + 0{,}0716 = +0{,}0850\,\text{rad} \quad \text{(Resposta)}$$



Exemplo 5

O eixo cônico mostrado abaixo é feito de um material com módulo de cisalhamento *G*. Determine o ângulo de torção de sua extremidade *B* quando submetido ao torque T.



Solução:

Do diagrama de corpo livre, numa seção transversal qualquer, o torque interno é *T e o raio c(x) portanto:*

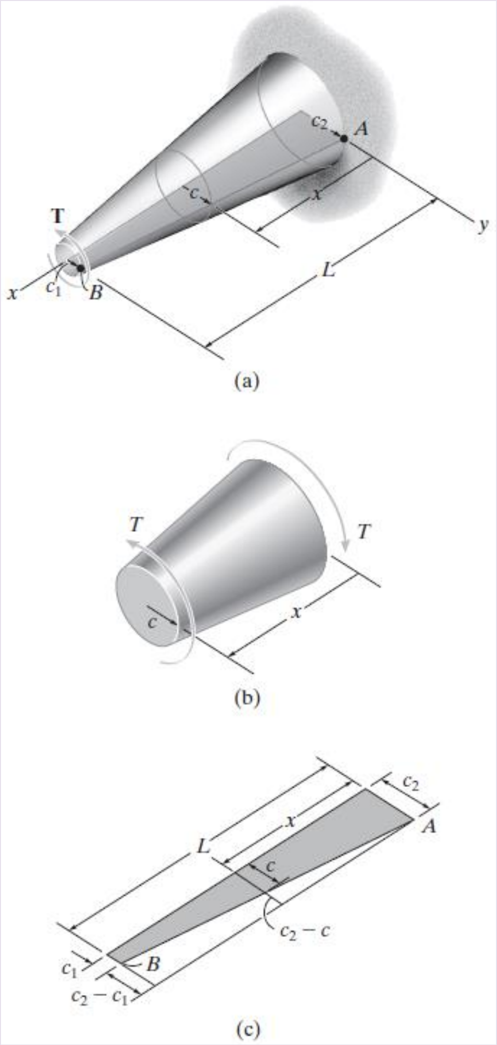
$$\frac{c_2 - c_1}{L} = \frac{c_2 - c}{x} \Rightarrow c = c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)$$

Assim, em *x teremos um J(x):*

$$J(x) = \frac{\pi}{2}\left[c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)\right]^4$$

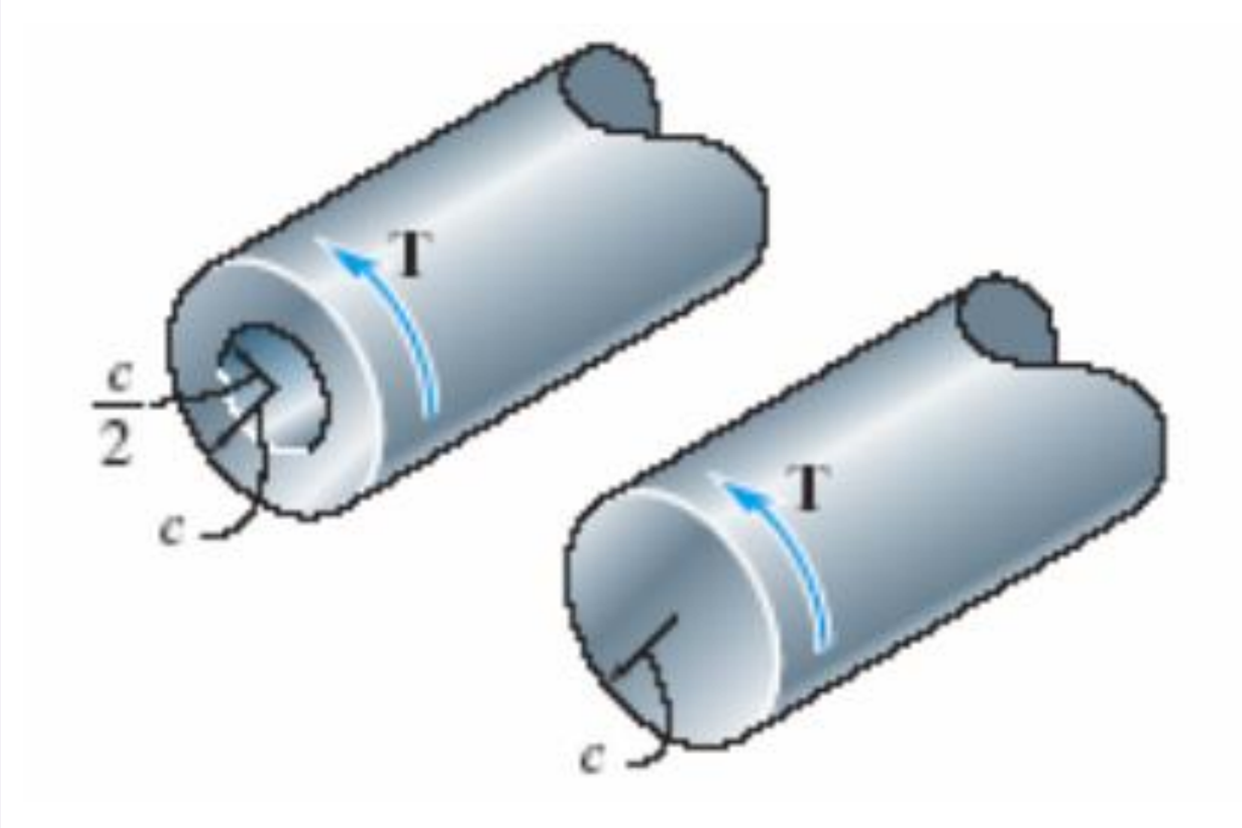
O ângulo de torção será: $\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{J(x)G}$

$$\phi = \frac{2T}{\pi G}\int_0^L \frac{dx}{\left[c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)\right]^4} = \frac{2TL}{3\pi G}\left(\frac{c_2^2 + c_1c_2 + c_1^2}{c_1^3c_2^3}\right) \text{ (Resposta)}$$



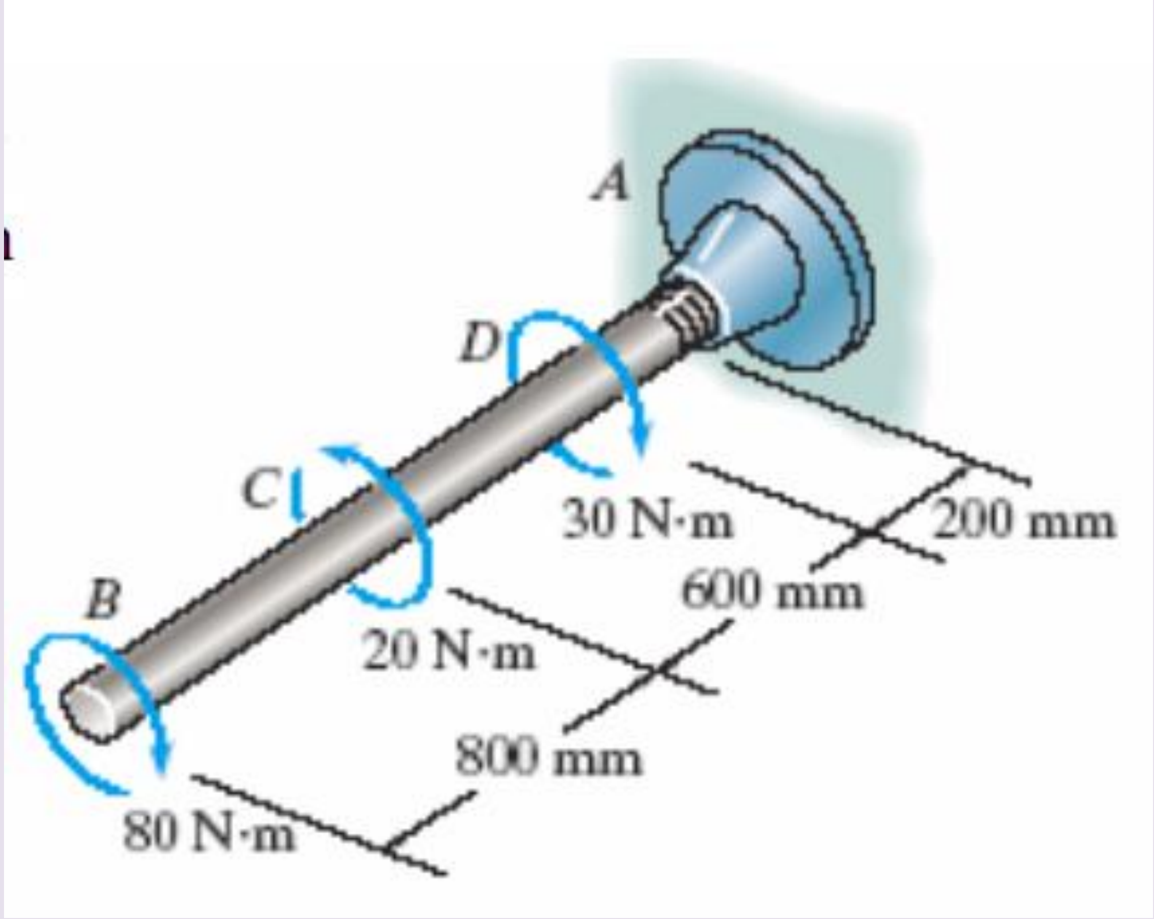
Exercícios

5. Um eixo é submetido a um torque T. Compare a efetividade da utilização do tubo mostrado na figura com a de uma seção maciça de raio c. Para isso calcule o aumento percentual na tensão de torção e no ângulo de torção por unidade de comprimento para o tubo em comparação com o da seção maciça (5.45)



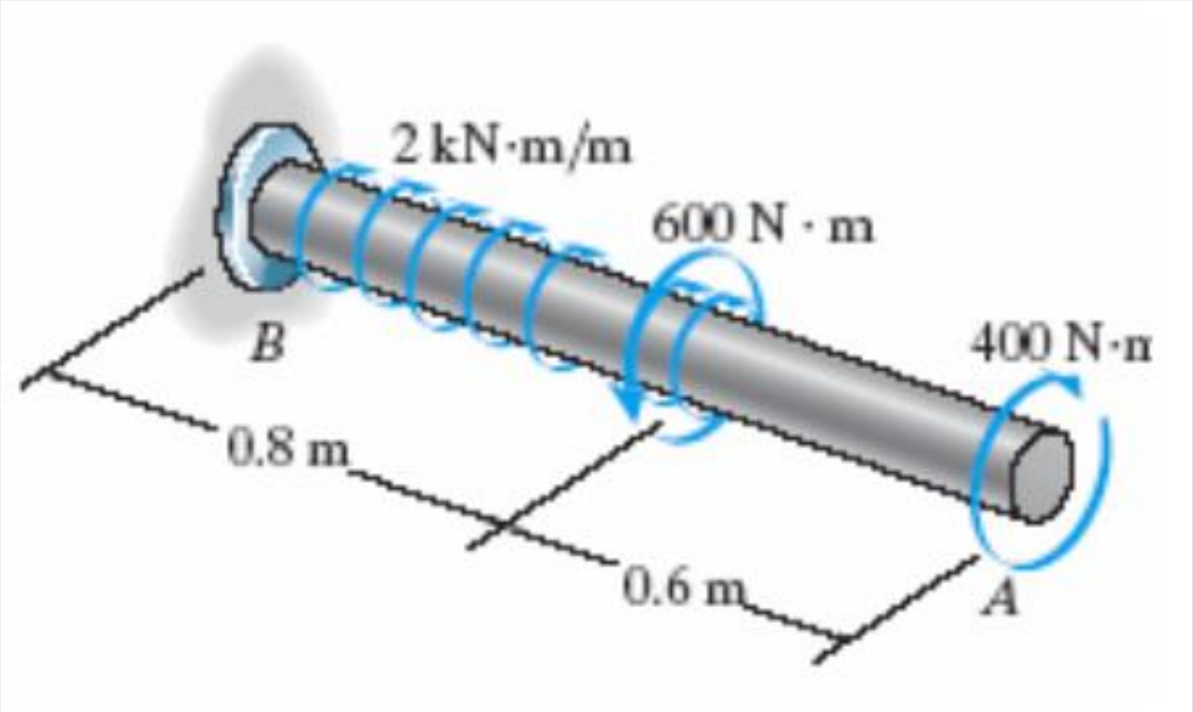
Exercícios

6. O eixo de aço A-36 de 20 mm de diâmetro é submetido aos torques mostrados. Determine o ângulo de torção da extremidade B (5.51)



Exercícios

7. O eixo maciço de 60 mm de diâmetro de aço A-36 é submetido aos carregamentos de torção distribuídos e concentrados mostrados na figura. Determine o ângulo de torção na extremidade livre A devido a esses carregamentos (5.62)



Elementos estaticamente indeterminados carregados com torque

$$\sum M_x = 0 \qquad T - T_A - T_B = 0$$

Condição de compatibilidade (igual que antes)

O ângulo de torção da extremidade A em relação à outra (B) deve ser = 0

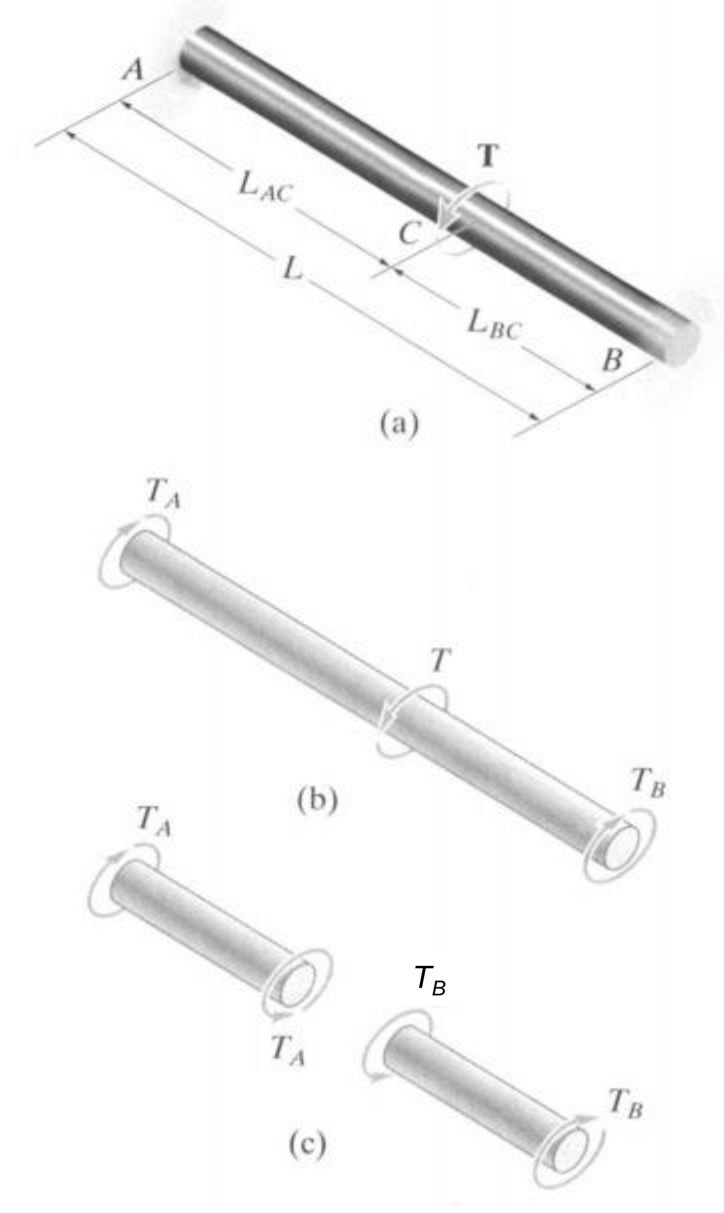
$$\phi_{AB} = 0$$

Portanto: $$\frac{T_A L_{AC}}{JG} - \frac{T_B L_{BC}}{JG} = 0$$

Como $L = L_{AC} + L_{BC}$ obtemos:

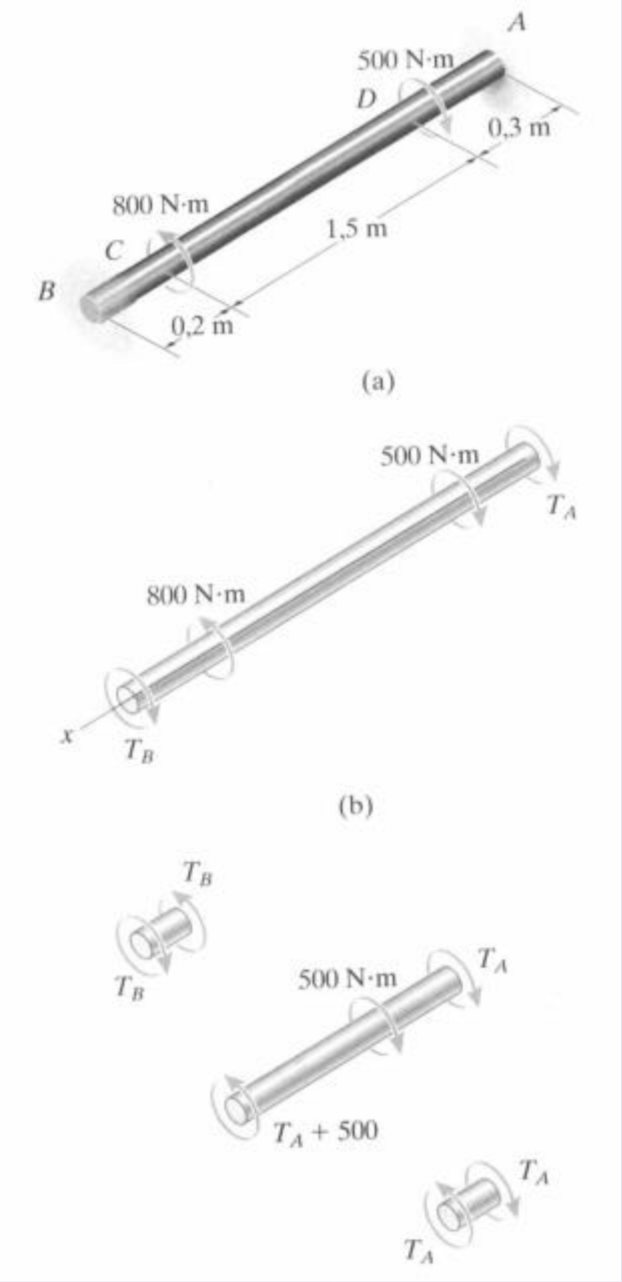
$$T_A = T\frac{L_{BC}}{L}$$

$$T_B = T\frac{L_{AC}}{L}$$



Exemplo 6

O eixo maciço de aço mostrado na figura abaixo tem diâmetro de 20 mm. Se for submetido aos dois torques, determine as reações nos apoios fixos *A* e *B*.



Solução:

Examinando o diagrama de corpo livre,

$$\sum M_x = 0; \quad -T_b + 800 - 500 - T_A = 0 \quad (1)$$

Visto que as extremidades do eixo são fixas, $\phi_{A/B} = 0$.

Utilizando a relação $\phi = \dfrac{TL}{JG}$ para as 3 regiões:

Para as três regiões (método das seções), usando a convenção de sinal (para fora + ver figura ao lado):

$$\frac{-T_B(0{,}2)}{JG} + \frac{(T_A + 500)(1{,}5)}{JG} + \frac{T_A(0{,}3)}{JG} = 0$$

$$1{,}8T_A - 0{,}2T_B = -750 \quad (2)$$

Resolvendo as equações 1 e 2, obtemos T_A = –345 Nm e T_B = 645 Nm.

Exercícios

8. O eixo de aço é composto por dois segmentos: AC, com diâmetro de 12 mm e CB, com diâmetro de 25 mm. Se estiver preso em suas extremidades A e B e for submetido a um torque de 750 Nm, determine a tensão de cisalhamento máxima no eixo. $G_{aço}$ = 75 Gpa (5.76)