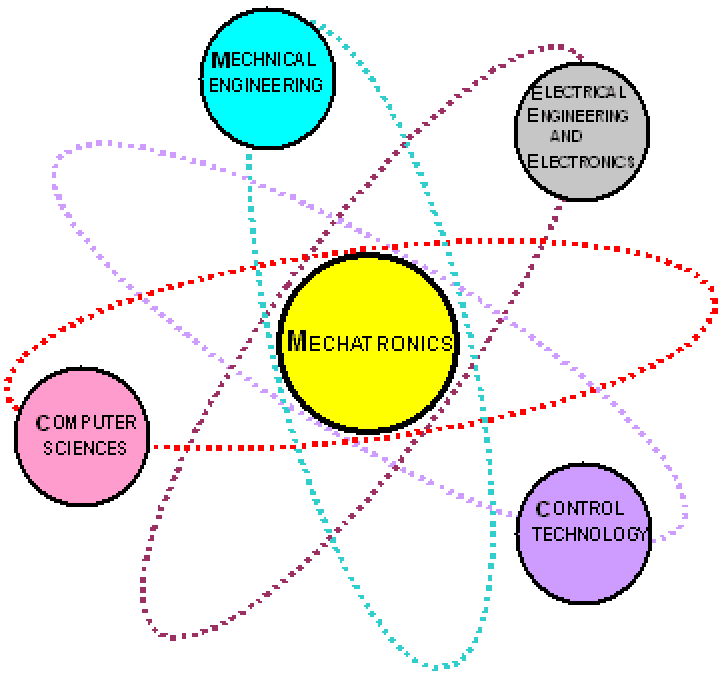
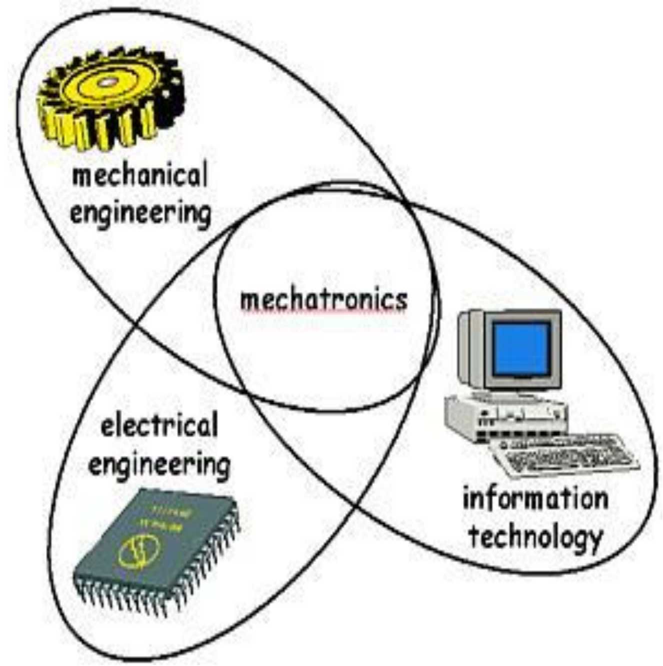
L'OUTIL BOND GRAPH

POUR LA MODELISATION
DES SYSTEMES MECATRONIQUES

A. NAAMANE

La Mécatronique





Les bond graphs

Pourquoi ?

- ♦ Outil de modélisation performant ;
- ♦ Permet de bien comprendre les transferts de puissance ;
- ♦ Peut se tracer sans écrire et résoudre des équations ;
- ♦ Déduction possible des schéma-blocs, des équations d'état, des fonctions de transfert pour les cas linéaires,…
- ♦ Graphisme identique quelque soit le domaine ;
- ♦ Permet les analogies entre les domaines ;
- ♦ Nombreux exemples traités en mécatronique ;
- ♦ Simulations directement possibles…

l’énergie est un (pour ne pas dire « le ») concept essentiel dans la description de l’évolution des systèmes technologiques. On le retrouve dans tous les domaines : il constitue le lien entre ceux-ci. Fort de cette constatation, Henry M. Paynter (1923-2002), a introduit le concept de « bond *graph* » (BG) (*graphe* de liaisons) en 1961.

• Père des bond graphs: Henry Paynter(MIT Boston)
1er ouvrage : 1961

• arrivée en Europe : fin des 70s
  – Pays-Bas (TwenteUniv.)
  – France (Alsthom)

R.Rosenberg H. Paynter D. Karnopp D. Margolis

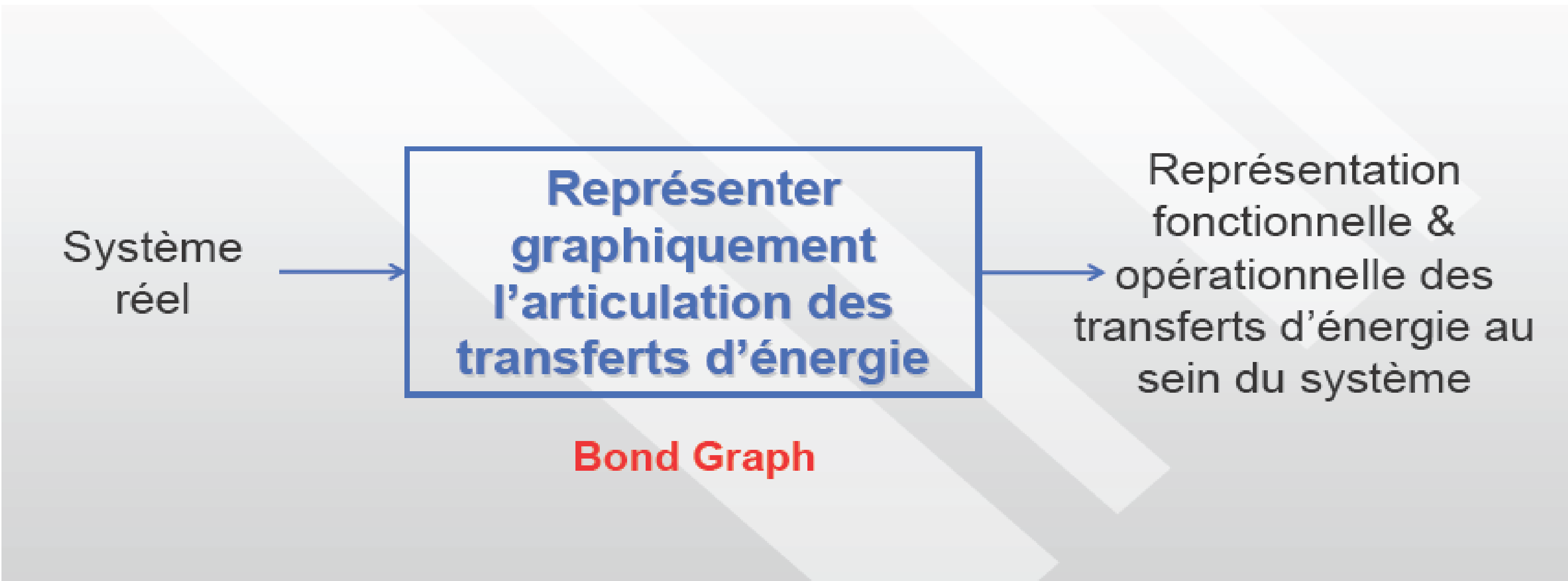
International Conference on Bond Graph Modelling
Phoenix, Arizona, Janvier 2001

la méthode BG concerne tous les systèmes dans tous les domaines (linéaires, non linéaires, continus, échantillonnés, numériques, électroniques, hydrauliques, mécaniques, thermiques, ...).

La méthode BG permet de traiter les chaînes d'énergie et d'information.

Qu'est-ce qu'un bond graph ?

C'est un graphe orienté, faisant apparaître des variables dynamiques,
qui traduisent les transferts d'énergie entre systèmes. Ils sont basés sur les liens de puissance.


Système réel
Représenter graphiquement l'articulation des transferts d'énergie
Bond Graph
Représentation fonctionnelle & opérationnelle des transferts d'énergie au sein du système

Langage graphique

- ♦ **unifié** pour tous les domaines physiques et techniques ;
- ♦ **fondé** sur une étude des transferts de puissance au sein d'un système ;
- ♦ **modélisant** les systèmes à paramètres localisés.

Permettant les approches

- ♦ **fonctionnelle :** bond graphs à mots ;
- ♦ **structurelle :** visualisation des propriétés de causalité ;
- ♦ **comportementale :** déduction des modèles mathématiques.

Objectifs

Le langage des Bond Graphs permet de :

♦ Comprendre les transferts d'énergie (topologie des échanges) ;

♦ S'intéresser plus particulièrement aux propriétés structurelles des systèmes ;

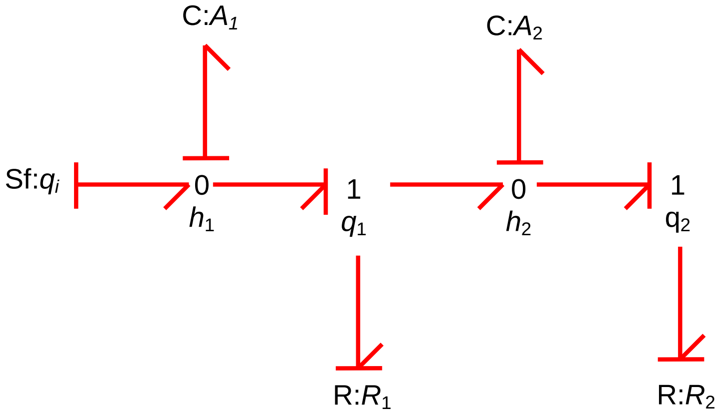
♦ S'affranchir des vicissitudes de la modélisation mathématique & fournir un schéma de calcul associé au graphe ;

♦ Mettre en évidence la causalité dans le modèle obtenu ;

♦ Simuler simplement un système pluritechnique.

Bond Graphs

- ☑ Introduction
- ☑ Exemples pluridisciplinaires
- ☑ Causalité
- ☑ Equations d'état
- ☑ Schémas blocs
- ☑ Applications



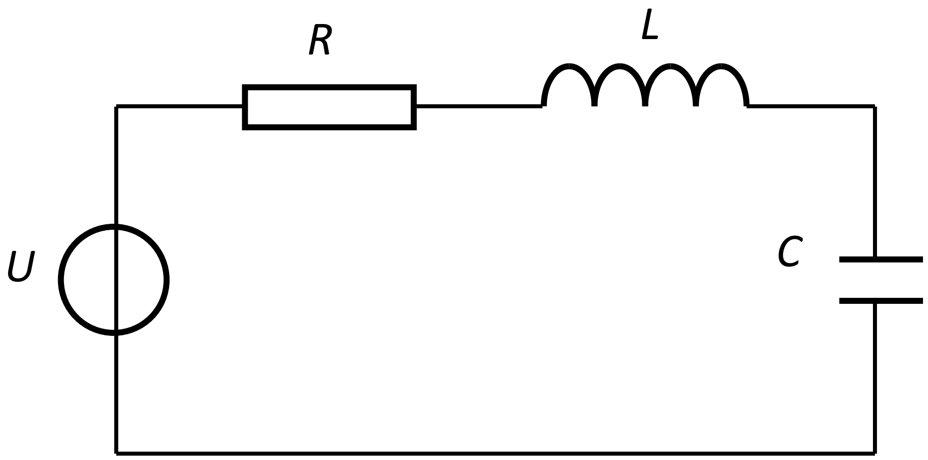
Que sont les bond graphs ?

Les bond graphs sont :

- inventés par Paynter en 1959 et développés par Rosenberg et Karnopp ;
- des graphes de représentation du comportement dynamique des systèmes indépendamment du domaine considéré ;
- des graphes fondés sur les flux d'énergie ;
- une modélisation orientée objet des systèmes ;
- un outil de modélisation puissant pour les ingénieurs.

Bond Graphs

Premier exemple : un système électrique



Variables de puissance

↳ Tension électrique *U*
↳ Intensité électrique *I*

⇓

Puissance électrique

P = U I

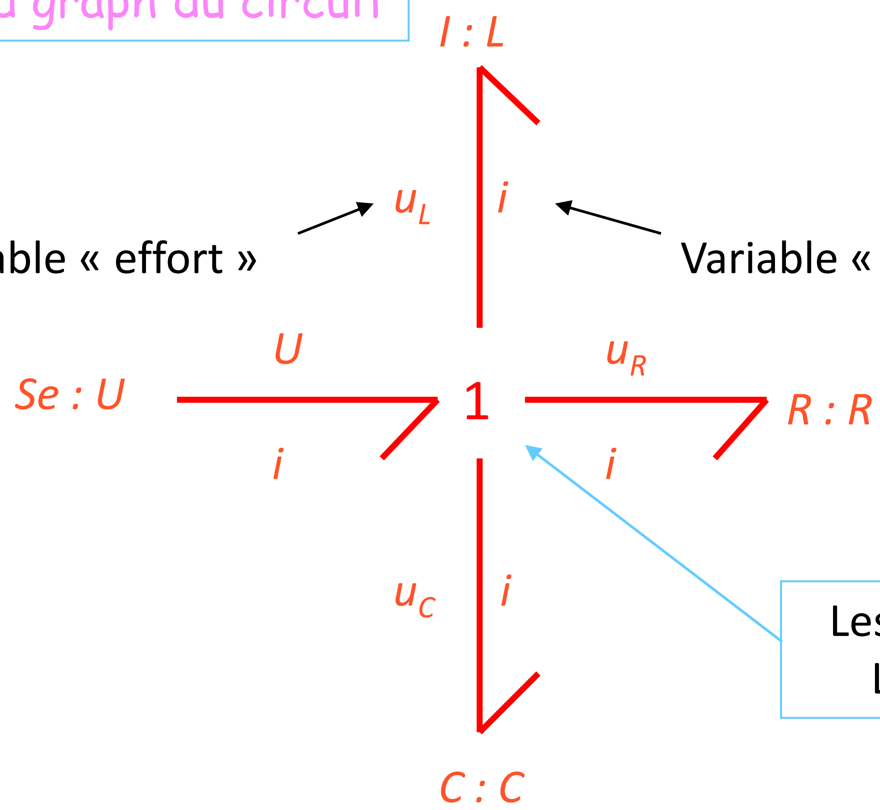
Lois des constituants

$$u_R = RI \qquad u_c = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t \qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Bond Graphs

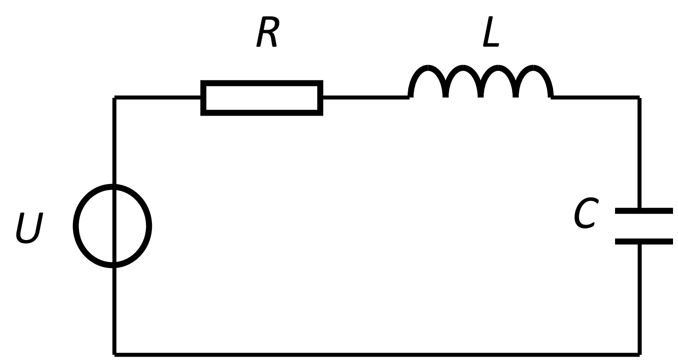
Premier exemple : un système électrique

Bond graph du circuit



Variable « effort »

Variable « flux »

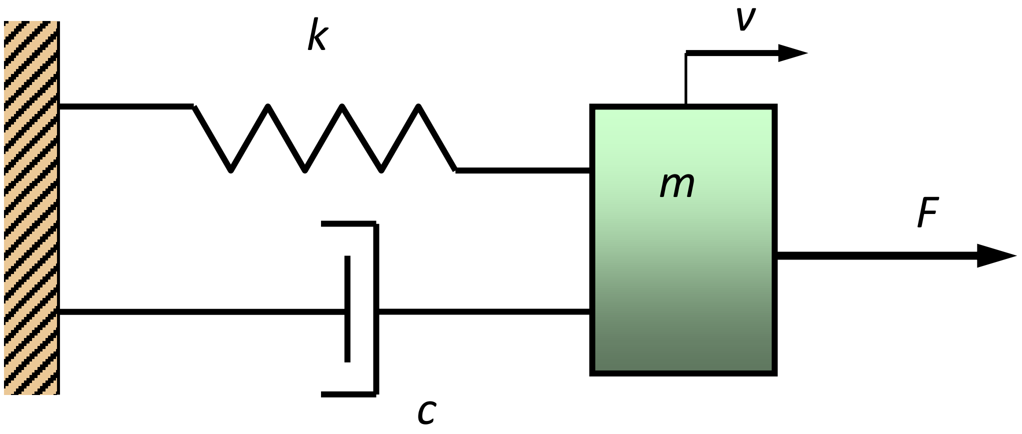


Les tensions sont différentes
Le courant est identique

Jonction 1

Bond Graphs

Deuxième exemple : un système mécanique



Variables de puissance

↳ Force F
↳ Vitesse linéaire v

⇓

Puissance mécanique

$$P = F\,v$$

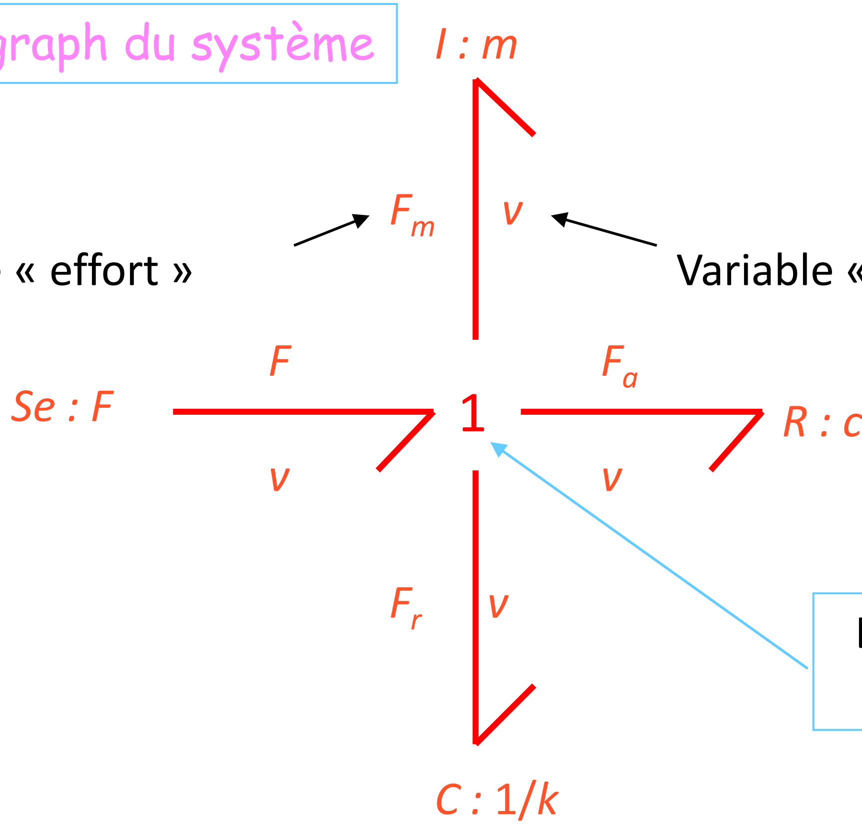
Lois des constituants

$$F_r = k\int v\,\mathrm{d}t \qquad F_a = cv \qquad F_m = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Bond Graphs

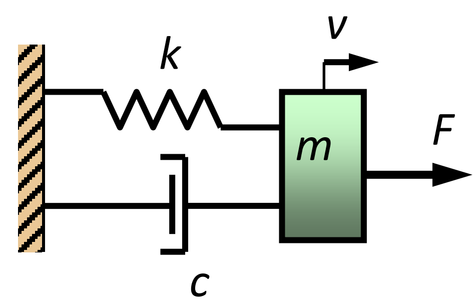
Deuxième exemple : un système mécanique

Bond graph du système



Variable « effort »

Variable « flux »



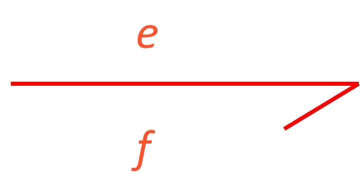
Les efforts sont différents
La vitesse est identique

Jonction 1

Bond Graphs

Variables énergie & puissance

Effort	$e(t)$
Flux	$f(t)$



$$P = e \times f$$

Lien bond graph

Intégration des
Variables puissances

Moment généralisé	$p(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$
Déplacement généralisé	$q(t) = q_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

Domaines physiques & variables

Domaine	Effort *e*	Flux *f*	Moment généralisé *p*	Déplacement généralisé *q*
Electrotechnique	Tension u	Courant i	Flux magnétique λ	Charge q
Mécanique de translation	Force F	Vitesse v	Quantité de mouvement p	Déplacement x
Mécanique de rotation	Couple C	Taux de rotation ω	Moment cinétique σ	Angle θ
Hydraulique & pneumatique	Pression P	Débit volumique q_v	Impulsion p	Volume V
Thermique	Température T	Flux d'entropie q_S		Entropie S
Chimie	Potentiel chimique μ	Flux molaire q_m		Nombre de moles N

Neuf éléments de base du langage

R : élément de modélisation d'un phénomène physique liant la variable effort à la variable flux

I : élément de modélisation d'un phénomène physique liant la variable flux à la variable moment généralisé

C : élément de modélisation d'un phénomène physique liant la variable effort à la variable déplacement généralisé

Se, Sf : source d'effort et source de flux indépendante respectivement de leur variable complémentaire

0, 1 : la jonction 0 sert à coupler des éléments soumis au même effort, la jonction 1 sert à coupler des éléments parcourus par le même flux

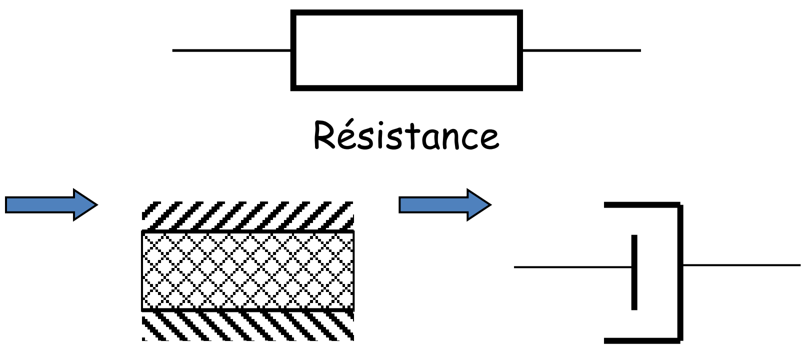
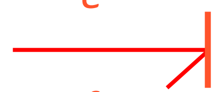
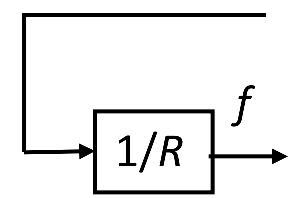
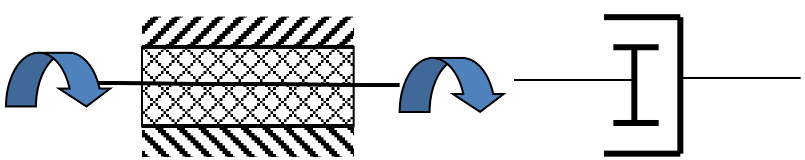
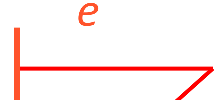
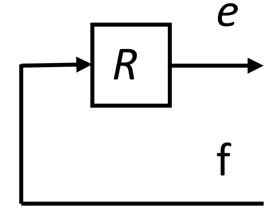
TF : transformateur (exemples : transformateur électrique, train d'engrenages,...)

GY : gyrateur ((exemples : moteur électrique, pompe centrifuge,...)

Bond Graphs

Eléments passifs 1-port

Élément R

symboles	Élément BG	Loi	Schéma-bloc
		$f = \frac{1}{R}e$	
		$e = Rf$	

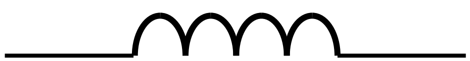
R : élément dissipateur d’énergie

Bond Graphs

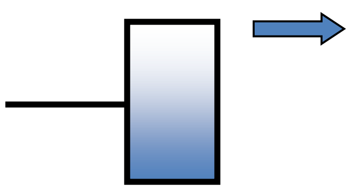
Eléments passifs 1-port

Élément I

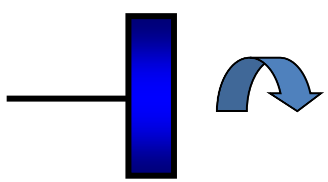
symboles



Inductance

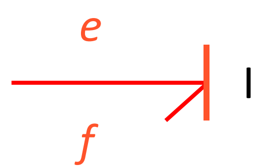


Masse



Inertie

Élément BG

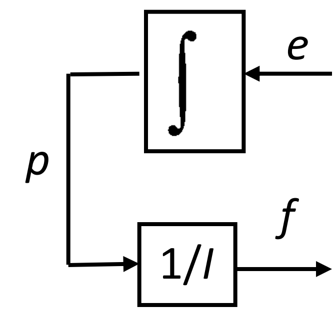


Loi

$$f = \frac{1}{I} p$$

$$p(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} e(\tau)\,d\tau$$

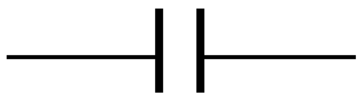
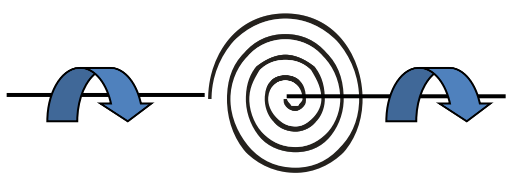
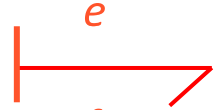
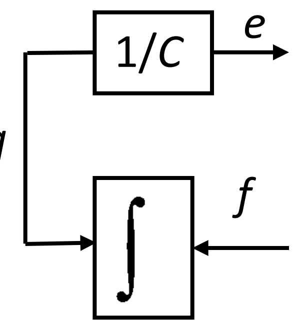
Schéma-bloc



I : élément de stockage pour l'effort généralisé

Eléments passifs 1-port

Élément C

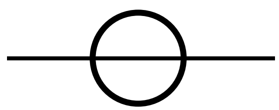
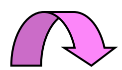
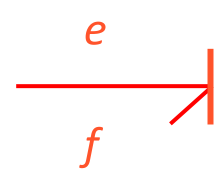
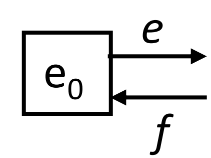
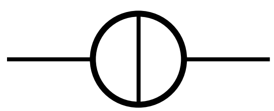
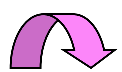
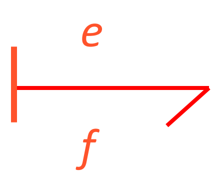
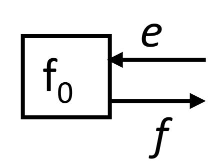
symboles	Élément BG	Loi	Schéma-bloc
 Capacité  Ressort linéaire  Ressort de torsion		$e = \frac{1}{C} q$ $q(t) = q_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau$	

C : élément de stockage pour le déplacement généralisé

Bond Graphs

Eléments actifs 1-port

Éléments Se & Sf

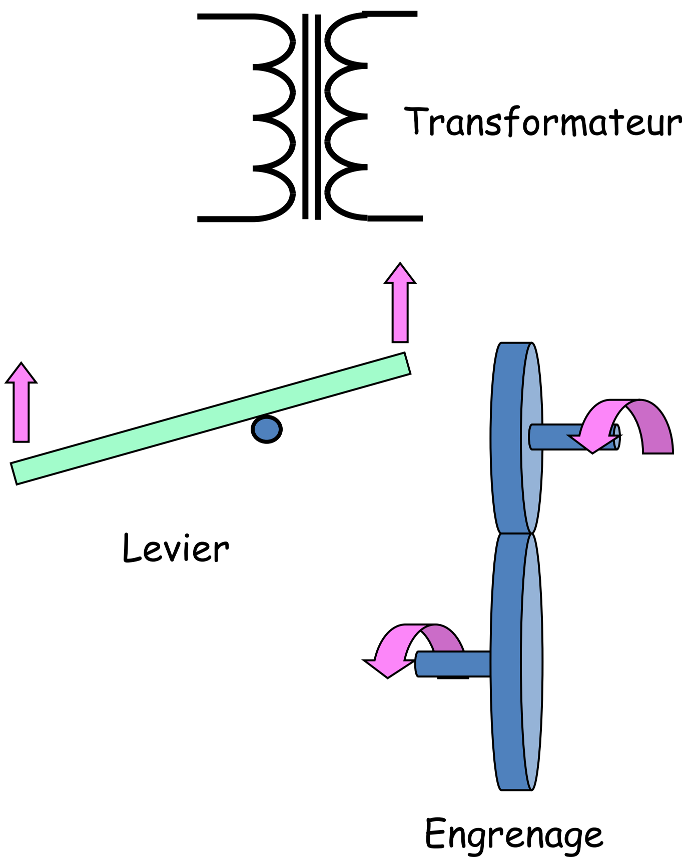
symboles	Élément BG	Loi	Schéma-bloc
 Source de tension  Force  Moment	Se 	$e = e_0$	
 Source de courant  Vitesse  Vitesse angulaire	Sf 	$f = f_0$	

Bond Graphs

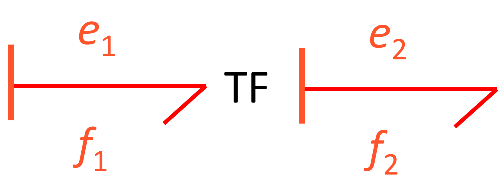
Eléments de jonction

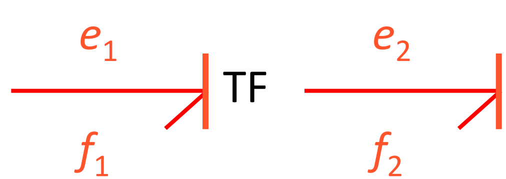
Élément TF

symboles



Élément BG



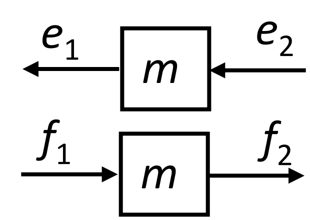


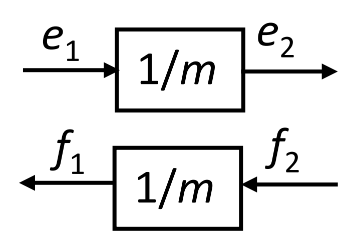
Loi

$$e_1 = m e_2$$
$$f_2 = m f_1$$

$$e_2 = \frac{e_1}{m}$$
$$f_1 = \frac{f_1}{m}$$

Schéma-bloc

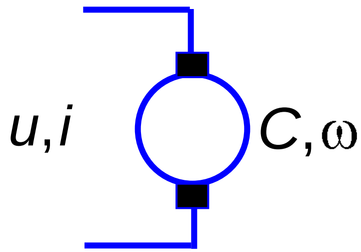
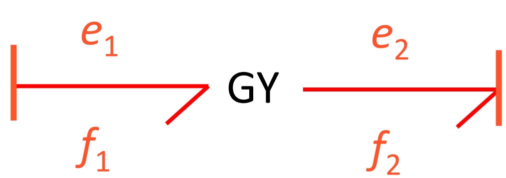
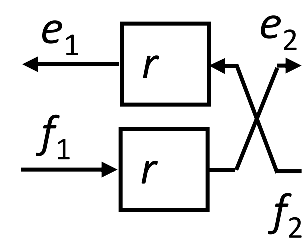
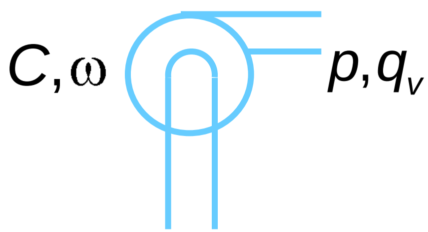
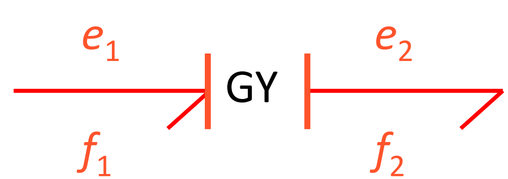
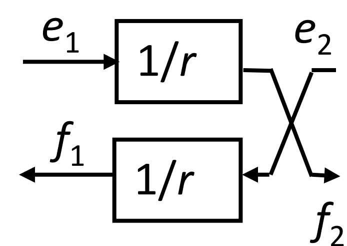




Bond Graphs

Eléments de jonction

Élément GY

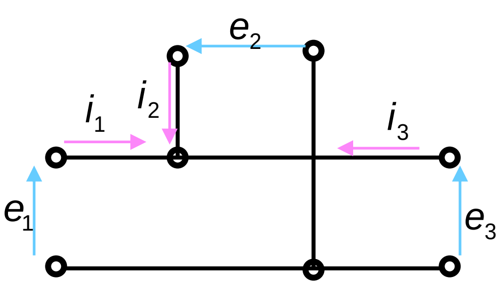
symboles		Élément BG	Loi	Schéma-bloc
	Moteur générateur		$e_2 = rf_1$ $e_1 = rf_2$	
	Pompe Turbine		$f_2 = \frac{e_1}{r}$ $f_1 = \frac{e_2}{r}$	

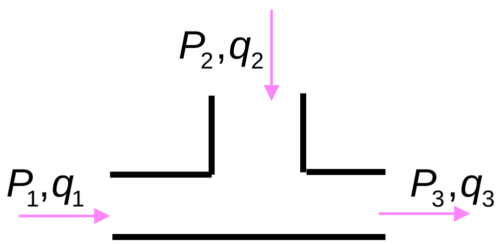
Bond Graphs

Eléments de jonction

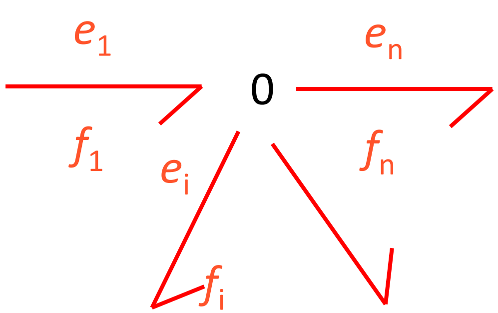
Jonction 0

symboles





Élément BG



Lois

$$e_1 f_1 - e_i f_i - \ldots - e_n f_n = 0$$

Conservation de la puissance

$$e_1 = e_i = \ldots = e_n$$

$$f_1 - f_i - \ldots - f_n = 0$$

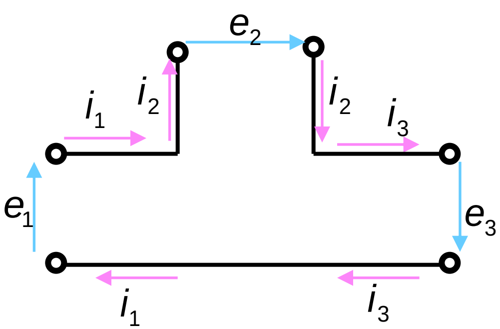
Le sens des flèches donne le signe du flux

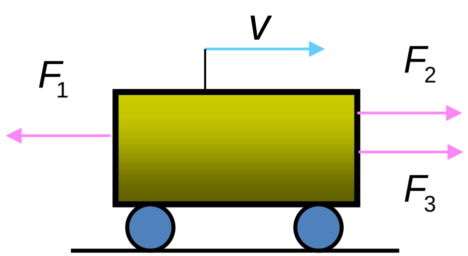
Bond Graphs

Eléments de jonction

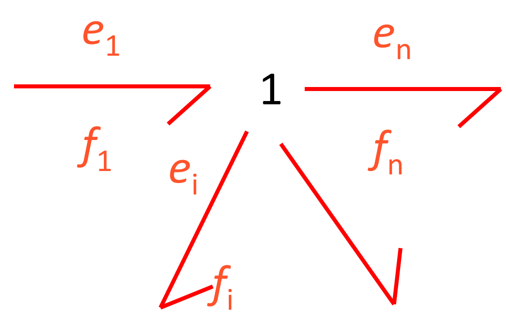
Jonction 1

symboles





Élément BG



Lois

$$e_1 f_1 - e_i f_i - \ldots - e_n f_n = 0$$

Conservation de la puissance

$$f_1 = f_i = \ldots = f_n$$

$$e_1 - e_i - \ldots - e_n = 0$$

Le sens des flèches donne le signe de l'effort

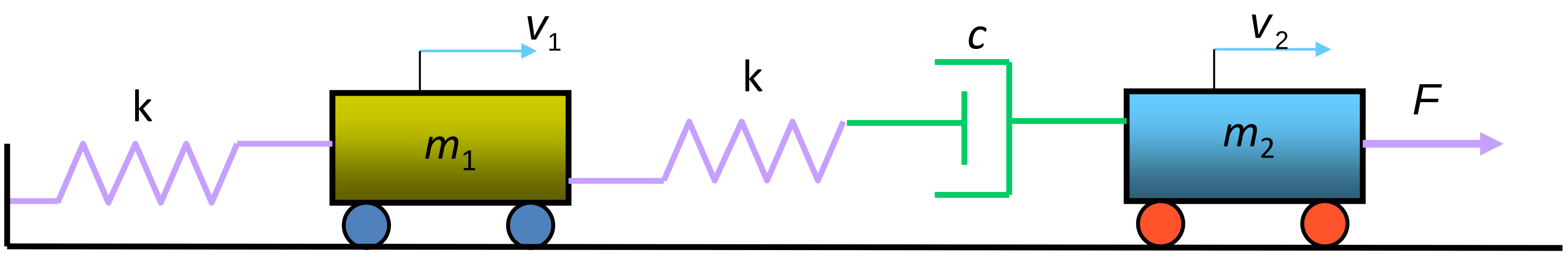
Bond Graphs

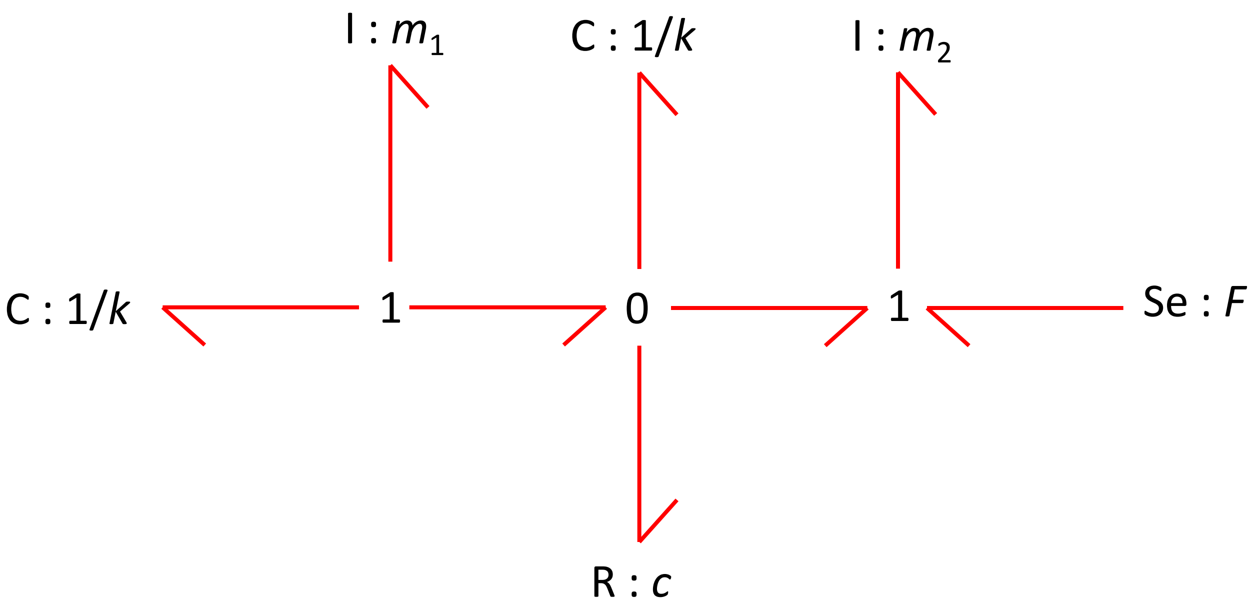
Mécanique de translation

variable	notation	translation
Effort	$e \;\; t$	force $\quad F$
Flux	$f \;\; t$	vitesse $\quad v$
Moment	$p \;\; t \;\; = \int e \;\; t \; \mathrm{d}t$	impulsion $\quad p$
Déplacement	$q \;\; t \;\; = \int f \;\; t \; \mathrm{d}t$	distance $\quad x$
Puissance	$P \;\; t \;\; = e \;\; t \;\; \times f \;\; t$	$F \;\; t \;\; \times v \;\; t$
Energie	$E \;\; p \;\; = \int \mathrm{f}\mathrm{d}p$; $E \;\; q \;\; = \int \mathrm{e}\mathrm{d}q$	$E_c = \int v\mathrm{d}p \qquad E_p = \int F\mathrm{d}x$

Bond Graphs

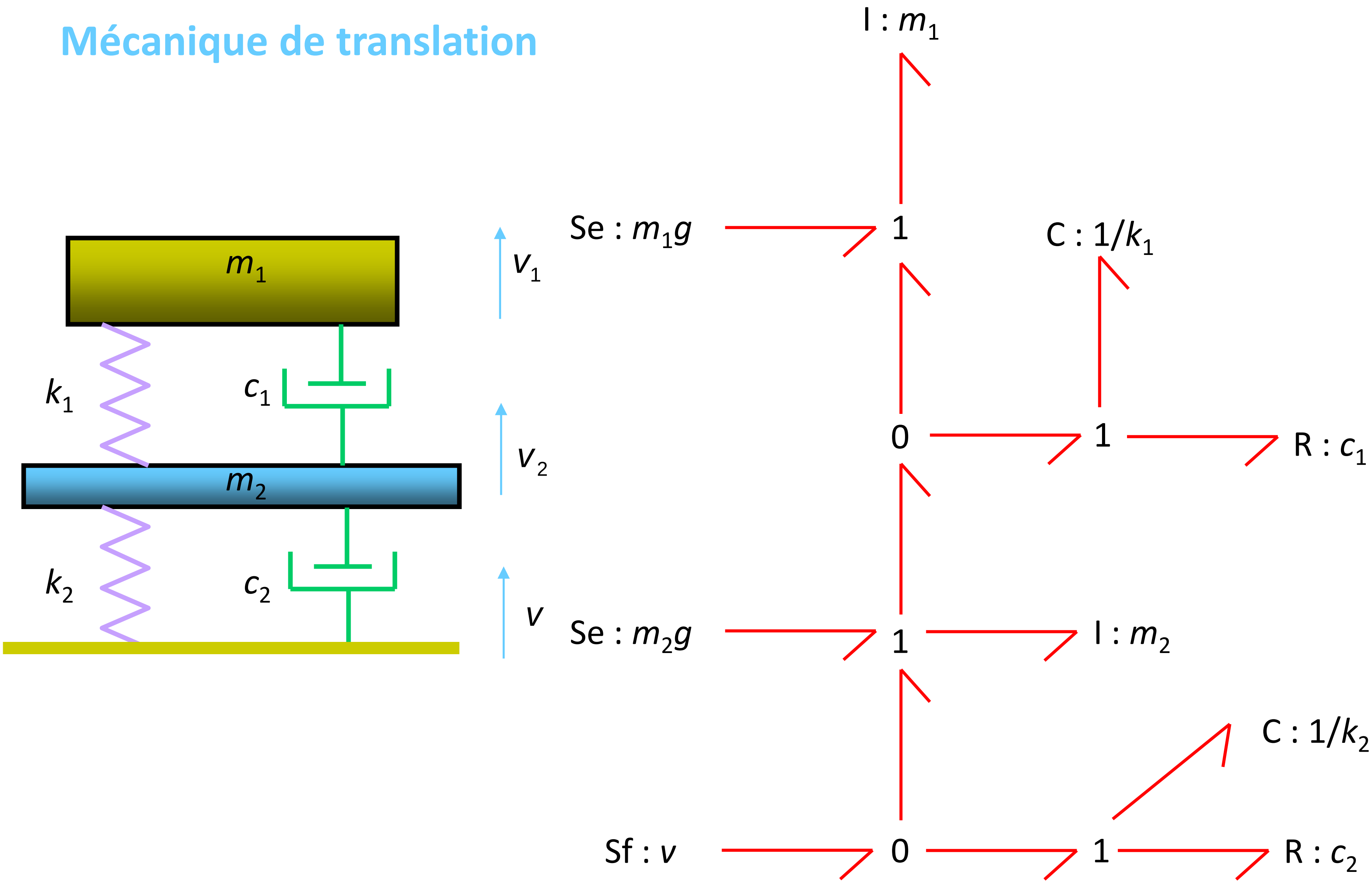
Mécanique de translation





Bond Graphs

Mécanique de translation



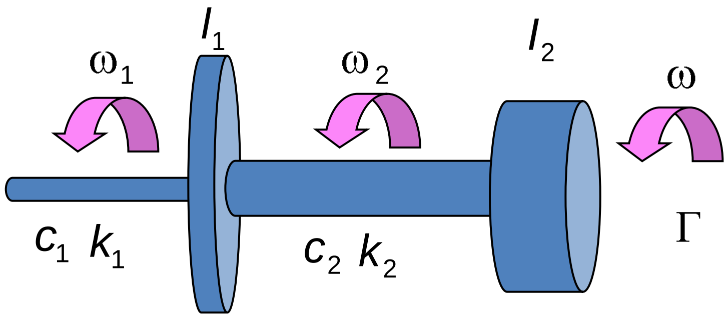
Bond Graphs

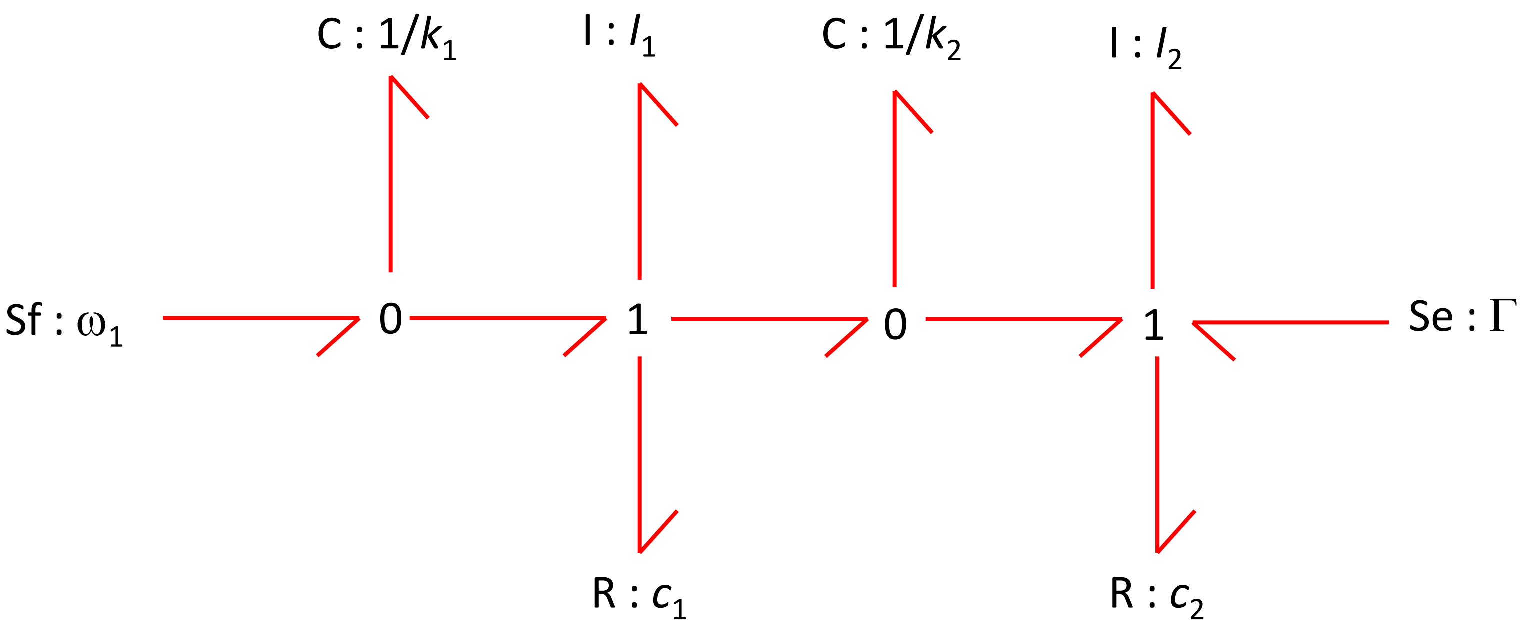
Mécanique de translation

variable	notation	rotation
Effort	$e\ \ t$	couple Γ
Flux	$f\ \ t$	vitesse angulaire ω
Moment	$p\ \ t\ \ = \int e\ \ t\ \mathrm{d}t$	moment cinétique σ
Déplacement	$q\ \ t\ \ = \int f\ \ t\ \mathrm{d}t$	angle θ
Puissance	$P\ \ t\ \ = e\ \ t\ \ \times f\ \ t$	$\Gamma\ \ t\ \ \times \omega\ \ t$
Energie	$E\ \ p\ \ = \int f\mathrm{d}p\ ;\ E\ \ q\ \ = \int e\mathrm{d}q$	$E_c = \int \omega \mathrm{d}\sigma \quad E_p = \int \Gamma \mathrm{d}\theta$

Bond Graphs

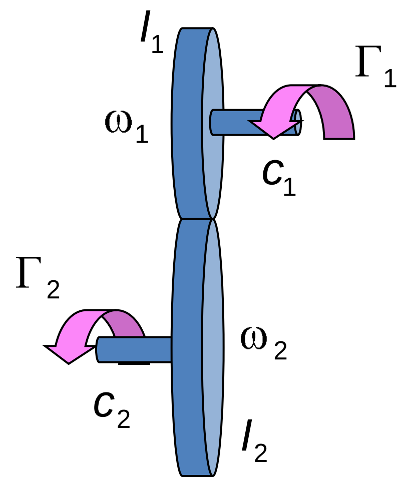
Mécanique de rotation

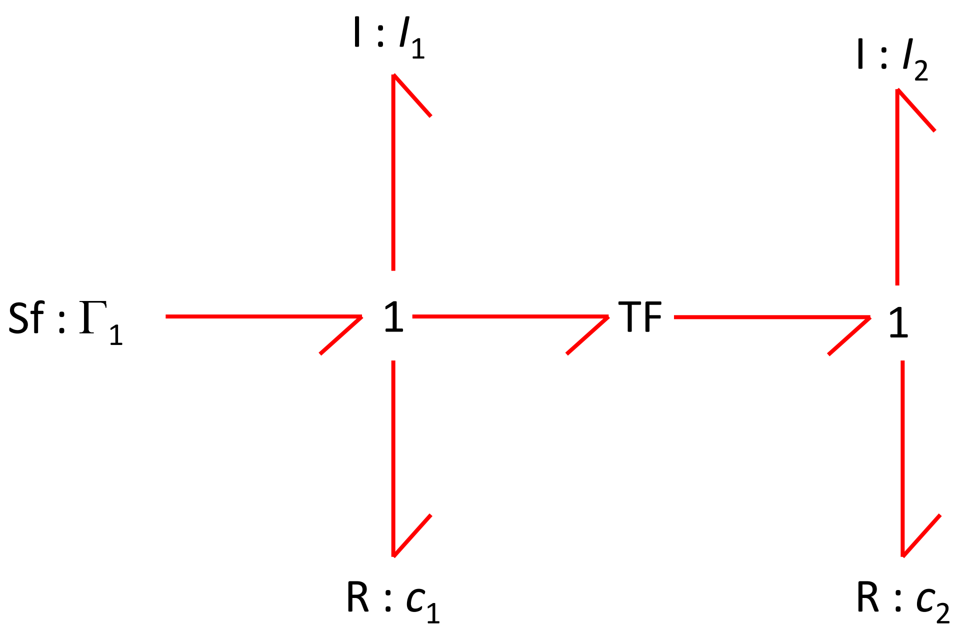




Bond Graphs

Mécanique de rotation





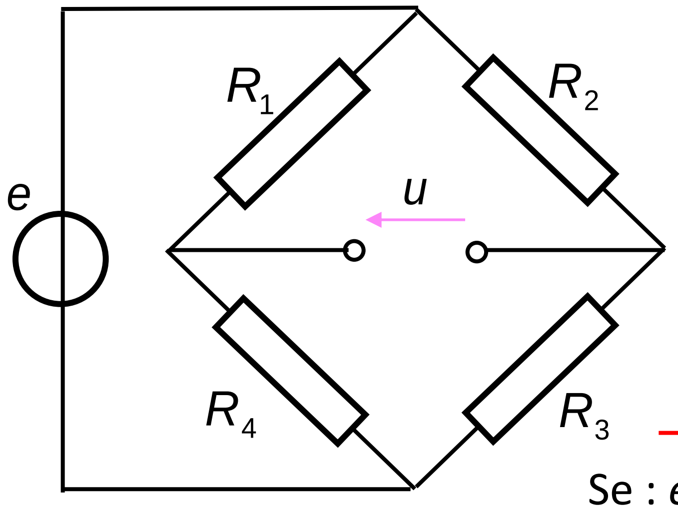
Bond Graphs

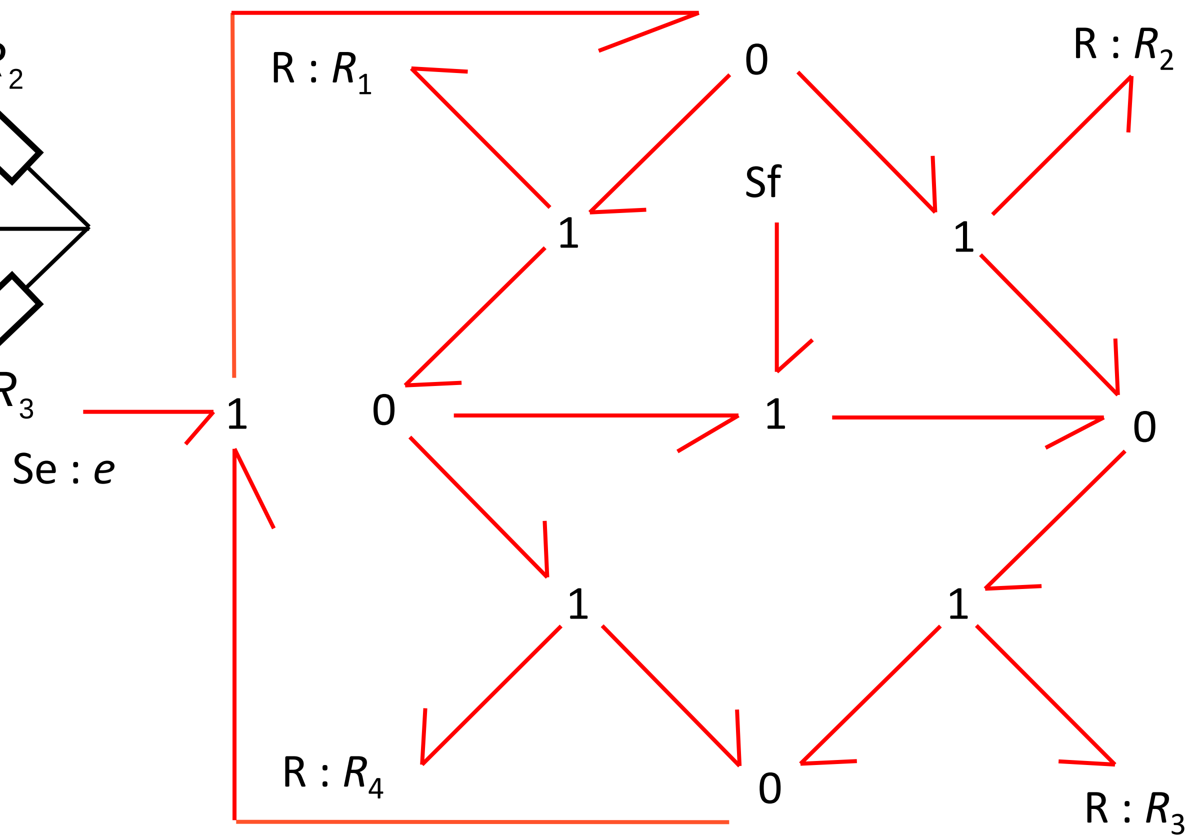
Electricité

variable	notation	électricité
Effort	$e\ \ t$	tension U
Flux	$f\ \ t$	intensité i
Moment	$p\ \ t\ = \int e\ \ t\ \mathrm{d}t$	flux magnétique λ
Déplacement	$q\ \ t\ = \int f\ \ t\ \mathrm{d}t$	charge q
Puissance	$P\ \ t\ = e\ \ t\ \times f\ \ t$	$U\ \ t\ \times i\ \ t$
Energie	$E\ \ p\ = \int f\mathrm{d}p\ ;\ E\ \ q\ = \int e\mathrm{d}q$	$E_m = \int i\mathrm{d}\lambda \quad E_{el} = \int U\mathrm{d}q$

Bond Graphs

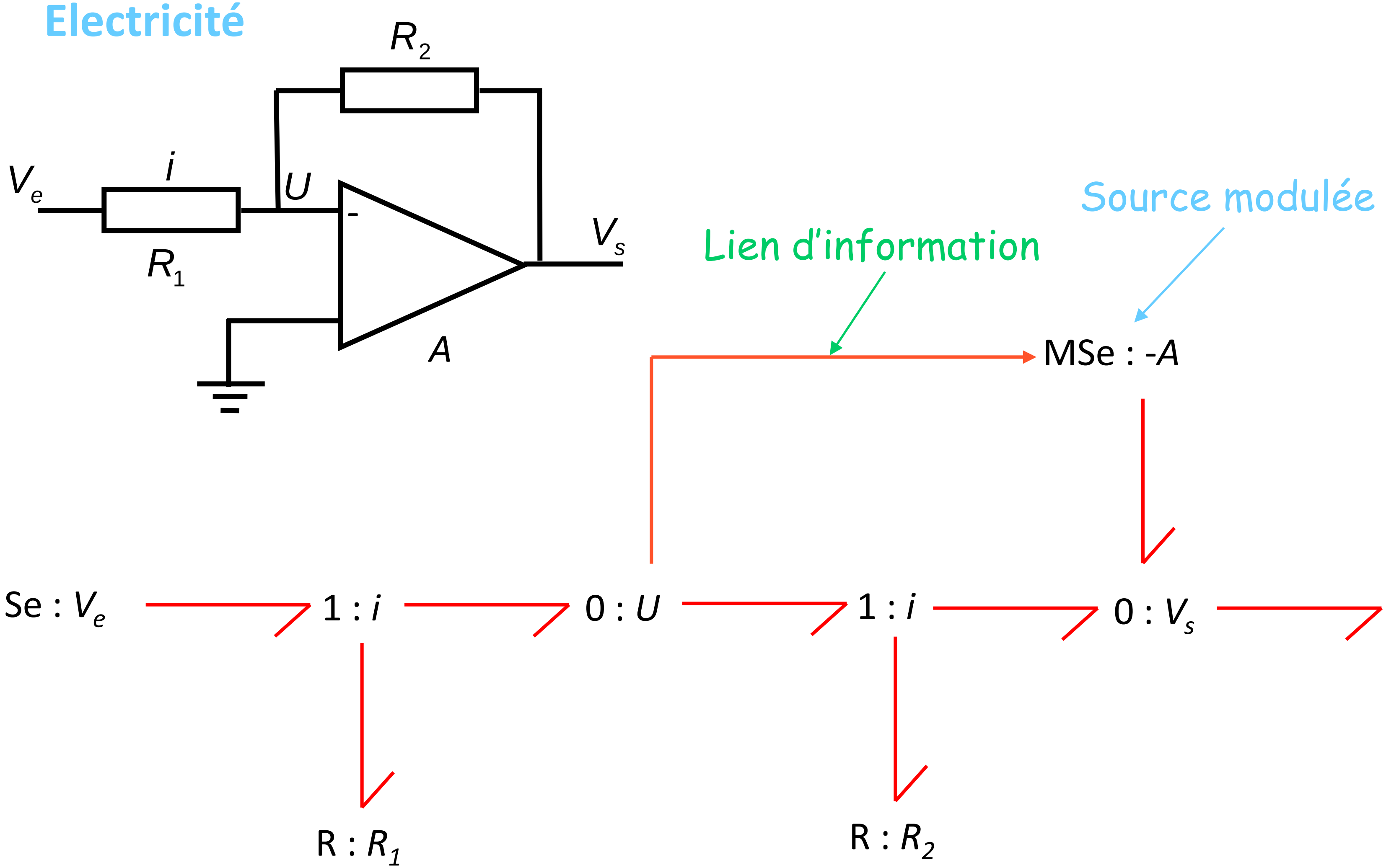
Electricité





Bond Graphs

Electricité



Bond Graphs

Hydraulique

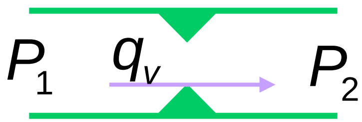
variable	notation	électricité
Effort	$e \; t$	pression P
Flux	$f \; t$	débit volumique q_v
Moment	$p \; t \; = \int e \; t \, \mathrm{d}t$	impulsion p
Déplacement	$q \; t \; = \int f \; t \, \mathrm{d}t$	volume V
Puissance	$P \; t \; = e \; t \; \times f \; t$	$P \; t \; \times q_v \; t$
Energie	$E \; p \; = \int f \mathrm{d}p$; $E \; q \; = \int e \mathrm{d}q$	$E_c = \int \mathrm{q_v} \mathrm{d}p$ $E_p = \int P \mathrm{d}V$

Bond Graphs

Hydraulique

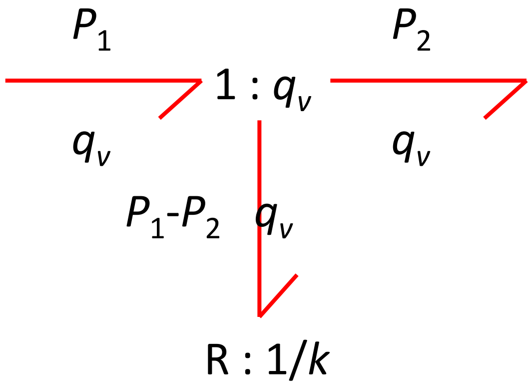
Élément R

Dissipation de l'énergie dans une restriction



Pour un écoulement laminaire, Re<2000

$$q_v = k \;\; P_1 - P_2$$



Pour un écoulement turbulent, Re>3000

$$q_v = f \;\; P_1 - P_2$$

La fonction f étant à déterminer pour chaque cas

Bond Graphs

Hydraulique

Relation entre pression et dérivée du débit

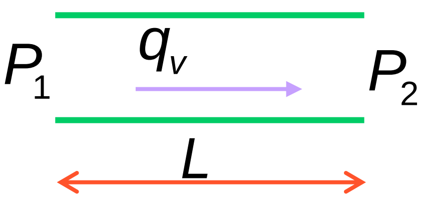
$$q_v = Av \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}q_v}{\mathrm{d}t} = A\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

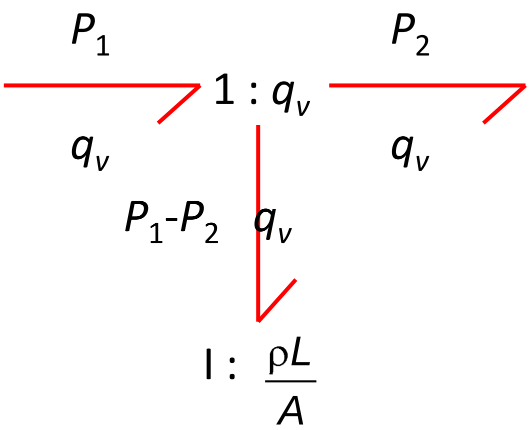
$$F = P_1 - P_2 \; A = \rho AL\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho L}{A}\frac{\mathrm{d}q_v}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{I = \frac{\rho L}{A}}$$

Élément I





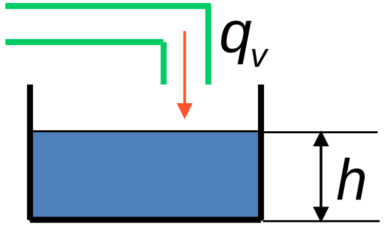
Bond Graphs

Hydraulique

Élément C

Relation entre pression et volume

réservoir



$$P = \rho g h = \frac{\rho g V}{A}$$

$$\Rightarrow C = \frac{A}{\rho g}$$

$C : \frac{A}{\rho g}$

fluide compressible

$$B = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} \Rightarrow P = \frac{V}{SLB} \Rightarrow C = SLB$$

Module de compressibilité

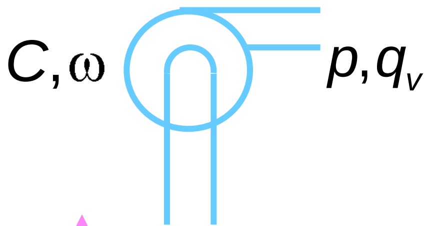
Bond Graphs

Hydraulique

Jonction TF

transformateur

pompe



$$\xrightarrow[\omega]{\Gamma}\ \underset{V_0}{\mathrm{TF}}\ \xrightarrow[q_v]{P}$$

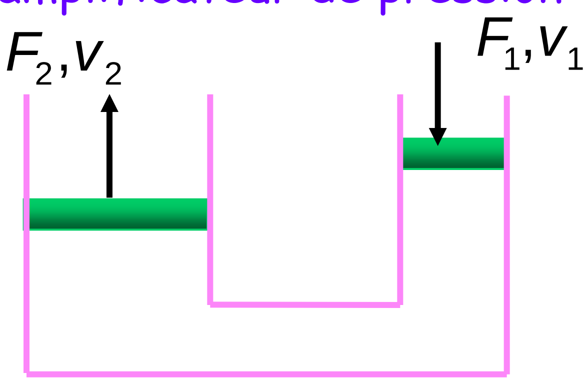
Cylindrée V_0

vérin

$$\xrightarrow[v]{F}\ \underset{A}{\mathrm{TF}}\ \xrightarrow[q_v]{P}$$

Section A

amplificateur de pression



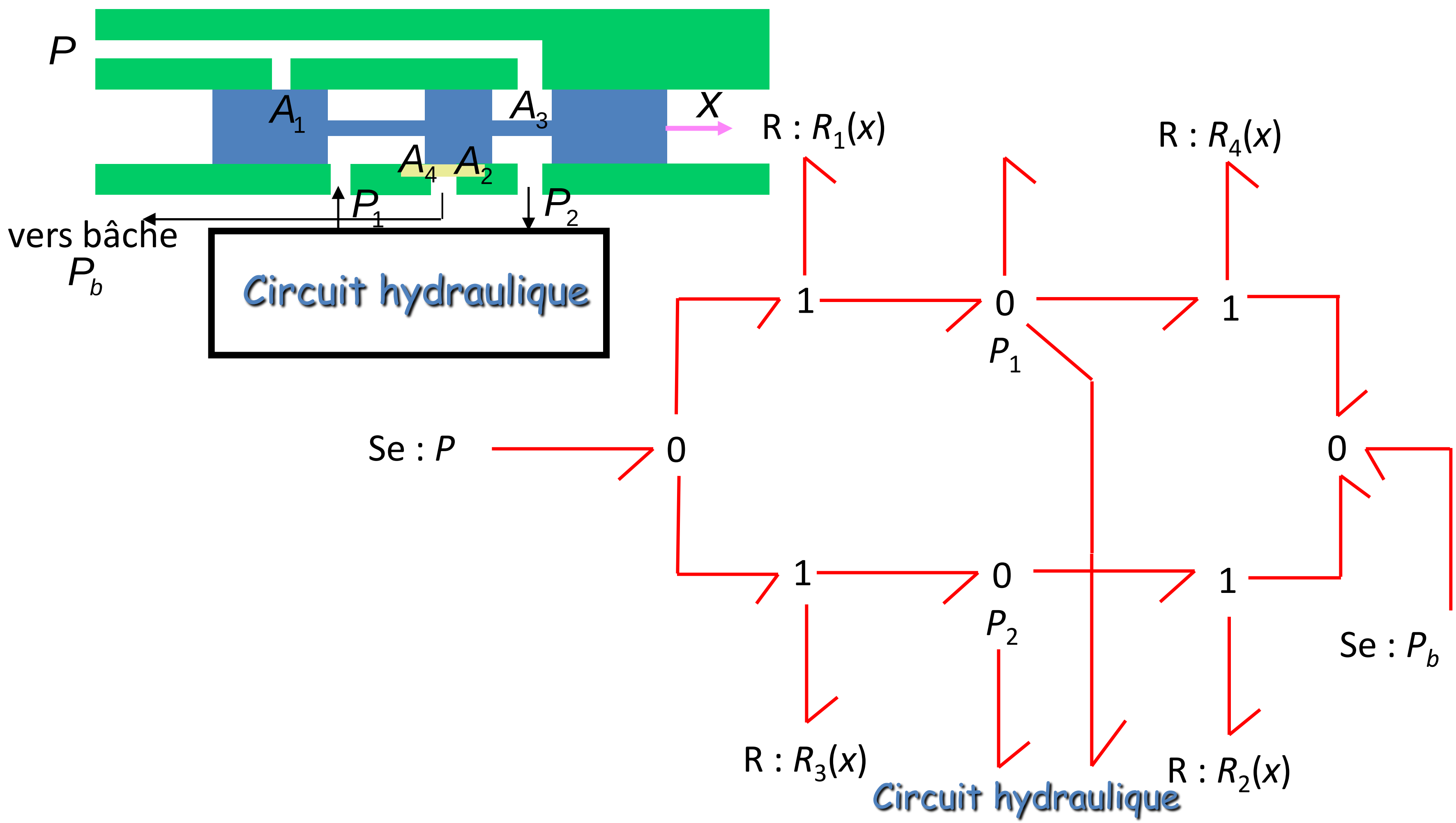
$$\xrightarrow[v_1]{F_1}\ \underset{v_1}{1}\ \xrightarrow{\quad}\ \underset{m}{\mathrm{TF}}\ \xrightarrow{\quad}\ \underset{v_2}{1}\ \xrightarrow[v_2]{F_2}$$

$$m = \frac{A_1}{A_2}$$

Bond Graphs

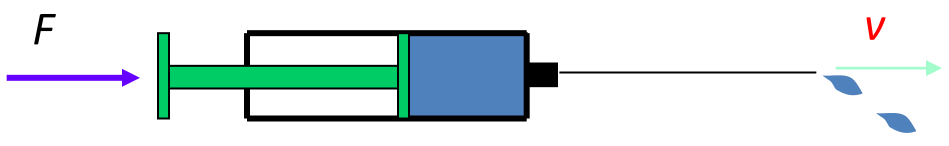
Hydraulique

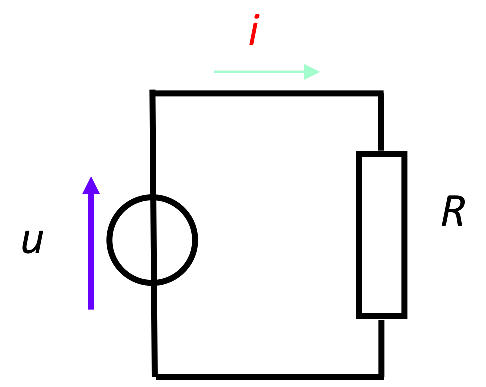
Distributeur hydraulique



Bond Graphs

Causalité





Dans les deux cas, il y a une cause et un effet

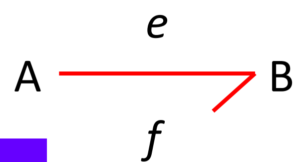
L’effort appliqué sur le piston de la seringue génère une vitesse de sortie du liquide de la seringue et non l’inverse.

La source de tension impose le courant dans le circuit électrique et non l’inverse.

Bond Graphs

Causalité

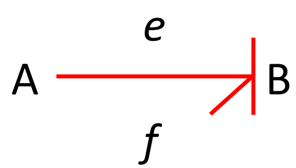
Soient deux systèmes A & B couplés et échangeant une puissance *P*(*t*)

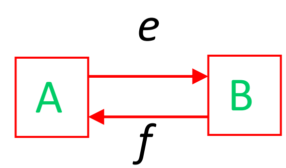


$$P(t) = e(t) \times f(t)$$

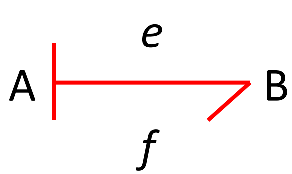
Deux cas possibles

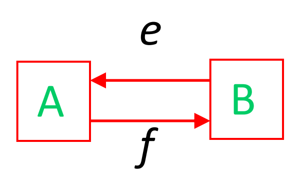
- A applique un effort *e*(*t*) à B qui réagit en retournant à A un flux $f(t) = \Psi_B(e(t))$





- A applique un flux *f*(*t*) à B qui réagit en retournant à A un effort $e(t) = \Phi_B(f(t))$



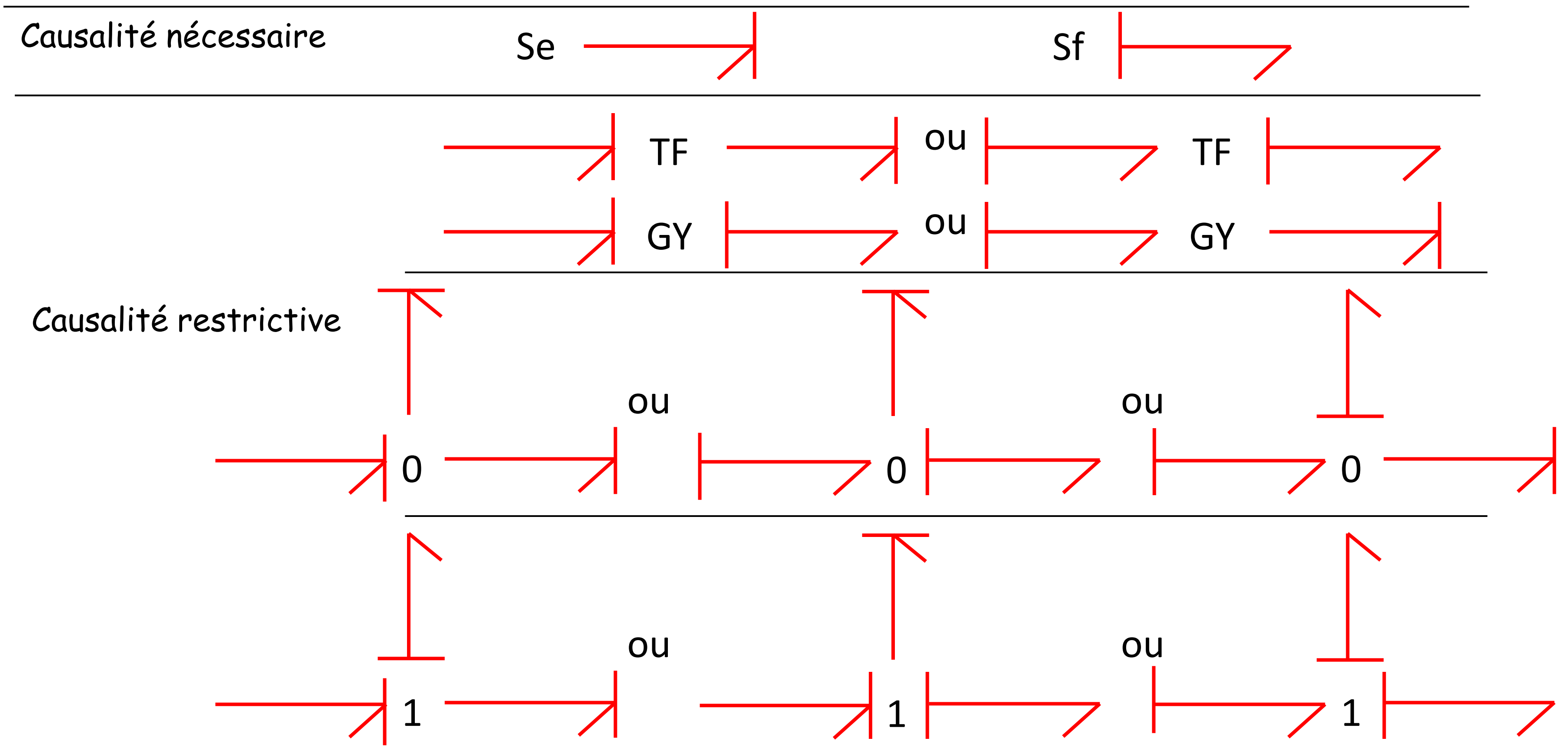


Convention : le trait causal est placé du coté de l'élément sur lequel l'effort est imposé.

Bond Graphs

Causalité

Affectation de la causalité



Bond Graphs

Causalité

Affectation de la causalité

Causalité intégrale	I		C
Causalité dérivée	I		C
Causalité arbitraire (cas linéaire)	R	ou	R

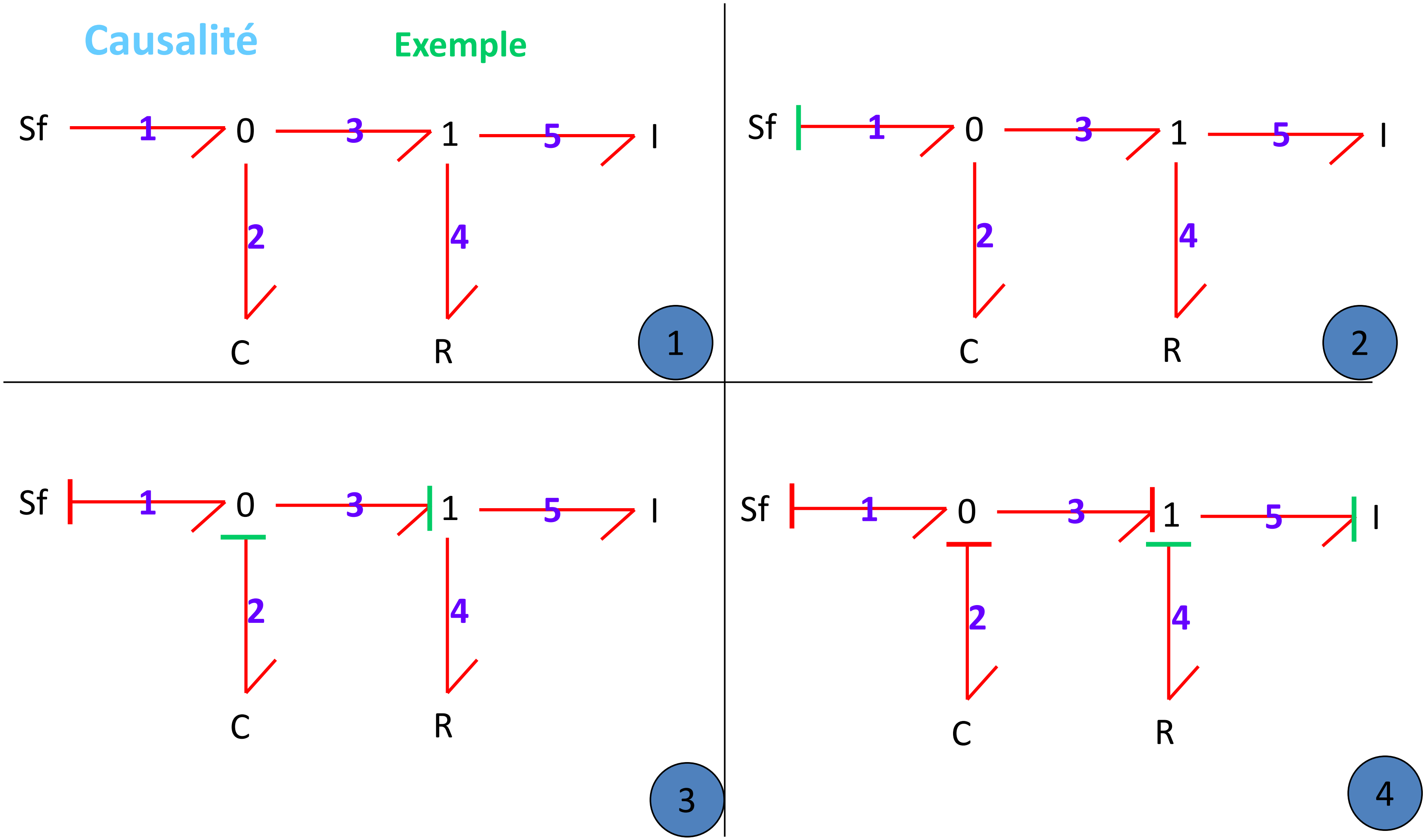
Procédure d’affectation de la causalité

1 – Affecter les causalités nécessaires aux sources et répercuter ;
2 – Mettre les I et les C en causalité intégrale préférentielle et répercuter ;
3 – Affecter la causalité aux éléments R en respectant les restrictions aux jonctions ;
4 – En cas de conflit à une jonction rechercher l’élément I ou C qui en est la cause et le mettre en causalité dérivée ; reprendre en 3.

Bond Graphs

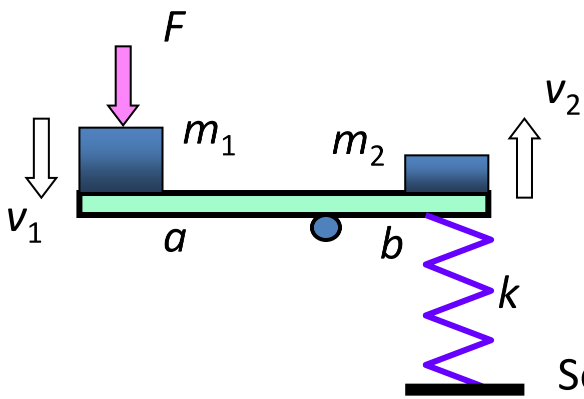
Causalité

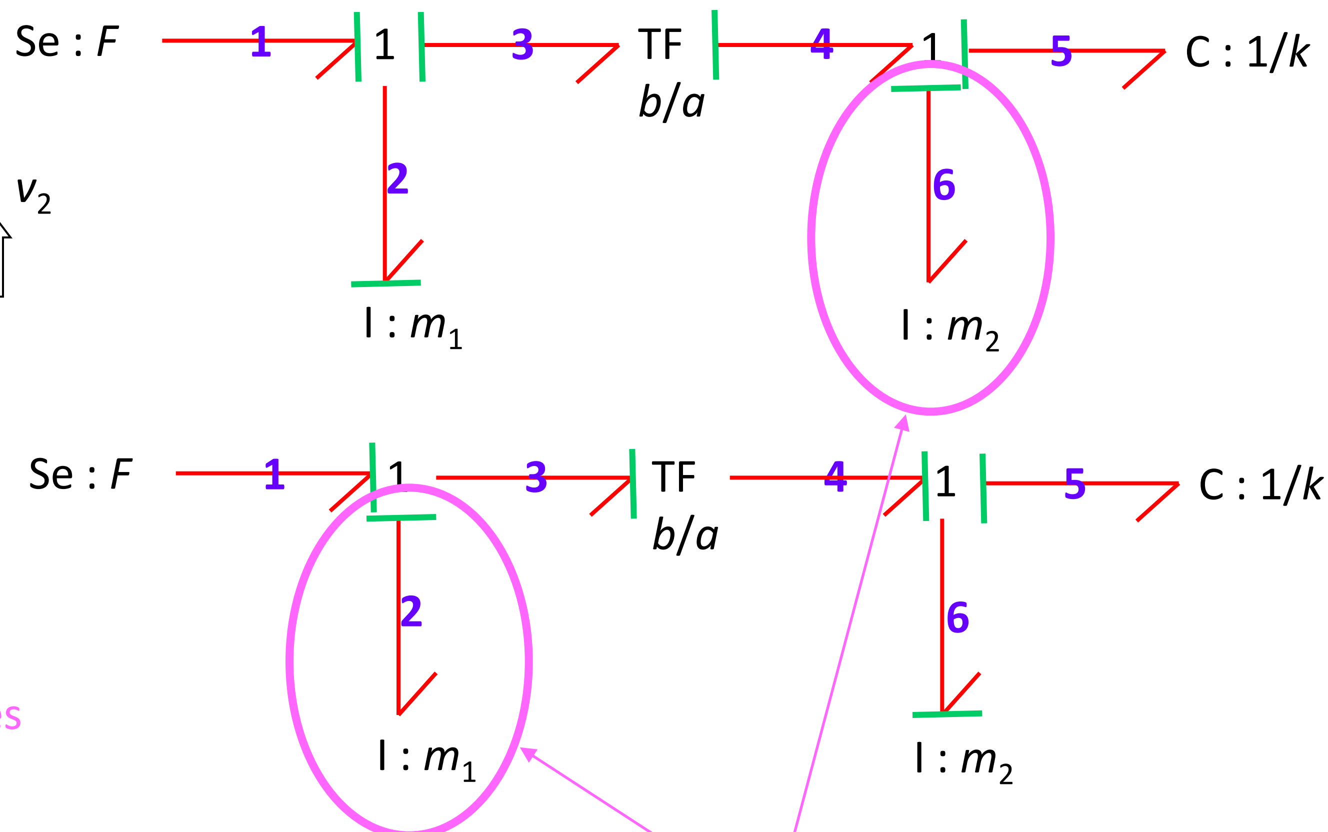
Exemple



Bond Graphs

Causalité mixte





2 affectations possibles

Causalités dérivées

Pour supprimer la causalité dérivée, on pourrait introduire la flexibilité du bras de levier.

Bond Graphs

Équations d'état

A partir d'un modèle BG, il est possible de déduire les équations d'état du système

Les variables d'état sont les variables d'énergie associées aux éléments I et C

Vecteur d'état $X = \begin{bmatrix} p_I \\ q_C \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{X} = \begin{bmatrix} e_I \\ f_C \end{bmatrix}$

Si tous les éléments sont en causalité intégrale, la dimension du vecteur d'état vaut le nombre d'éléments I et C.

Si parmi les n éléments I et C, il existe n_d en causalité dérivée, alors la dimension du vecteur d'état est n-n_d

Bond Graphs

Équations d'état

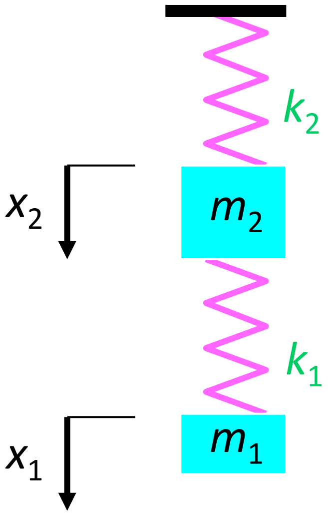
Cas où tous les éléments I et C sont en causalité intégrale

$$\dot{X} = AX + BU$$
$$Y = CX + DU$$

U vecteur d'entrée et Y vecteur de sortie

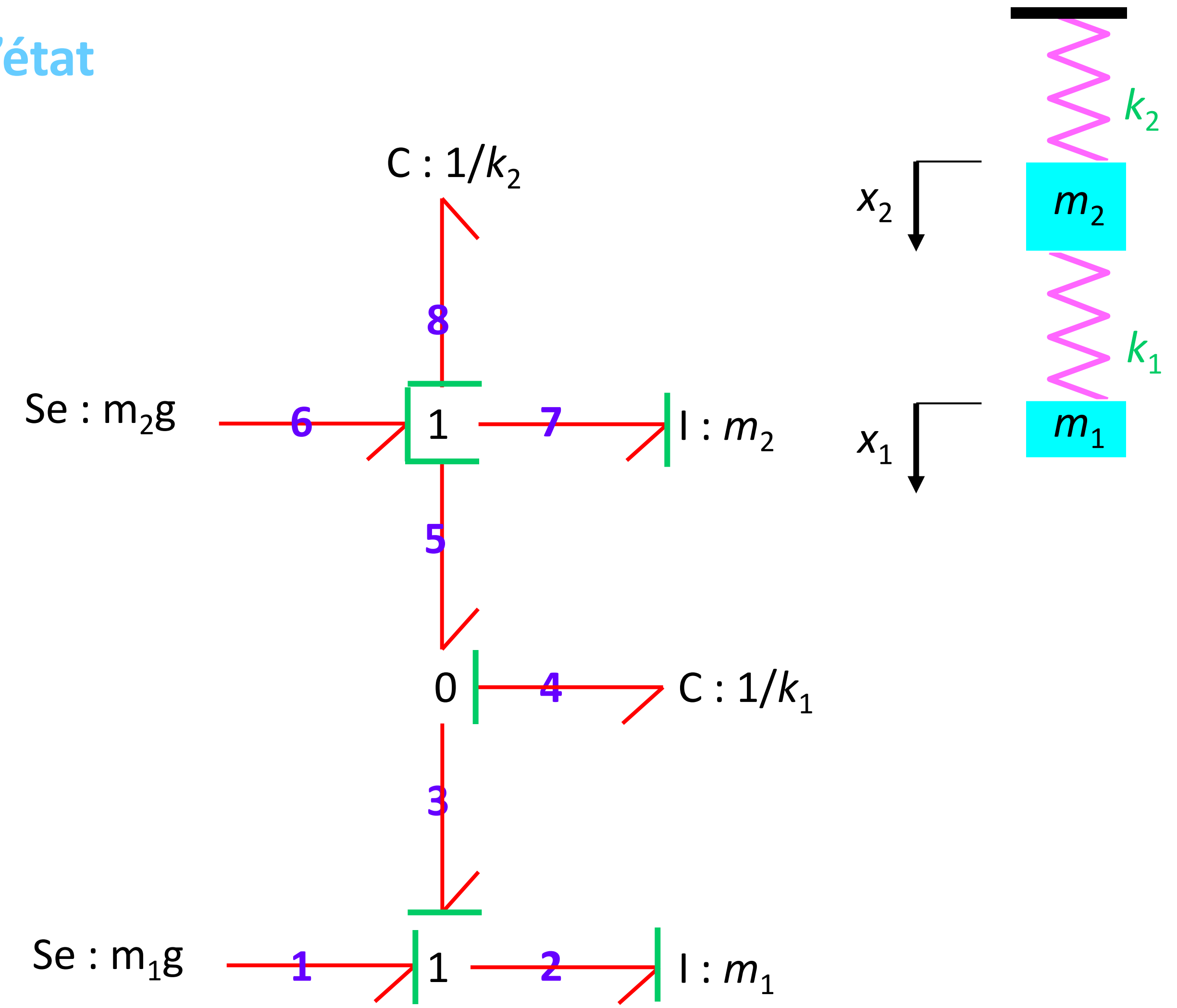
Procédure

↳ Écrire les lois de structure aux jonctions en tenant compte de la causalité ;
↳ Écrire les lois associées aux éléments en prenant en compte leur causalité ;
↳ Expliciter les dérivés des variables d'état en fonction des variables d'état et des entrées.



Bond Graphs

Équations d'état



Bond Graphs

Lois aux jonctions

$$e_1 + e_3 - e_2 = 0 \qquad f_1 = f_2 = f_3$$
$$f_5 - f_3 - f_4 = 0 \qquad e_3 = e_4 = e_5$$
$$e_6 - e_5 - e_7 - e_8 = 0 \qquad f_5 = f_6 = f_7 = f_8$$

Lois aux éléments

$$\dot{p}_2 = e_2 \qquad \dot{p}_7 = e_7$$
$$f_2 = \frac{1}{m_1} p_2 \qquad f_7 = \frac{1}{m_2} p_7$$

Éléments I

$$\dot{q}_4 = f_4 \qquad \dot{q}_8 = f_8$$
$$e_4 = k_1 q_4 \qquad e_8 = k_2 q_8$$

Éléments C

Vecteur d'état

$$X = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_7 \\ q_4 \\ q_8 \end{bmatrix}$$

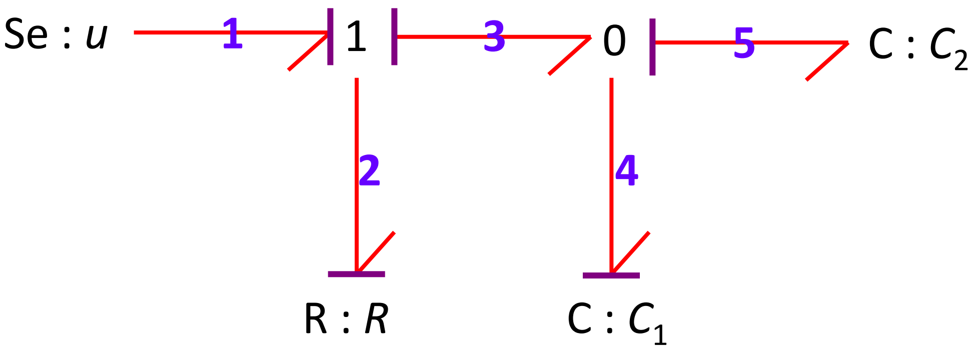
Équations d'état

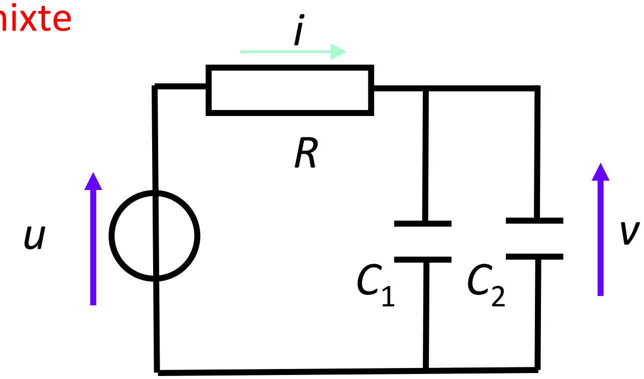
$$\dot{p}_2 = k_1 x_4 + m_1 g$$
$$\dot{p}_7 = -k_1 x_4 - k_2 x_8 + m_2 g$$
$$\dot{q}_4 = -\frac{1}{m_1} p_2 + \frac{1}{m_2} p_7$$
$$\dot{q}_8 = \frac{1}{m_2} p_7$$

Bond Graphs

Équations d'état

Cas de la causalité mixte





Jonction 0 $\quad \dot{q}_5 = f_3 - f_4$

Jonction 1 $\quad \dot{q}_5 = \dfrac{e_2}{R} - f_4$

$$\dot{q}_5 \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) = \frac{1}{R}\left(U - \frac{q_5}{C_2}\right)$$

$$\frac{1}{C_1} q_4 = \frac{1}{C_2} q_5$$

Système d'équations algébro-différentiel

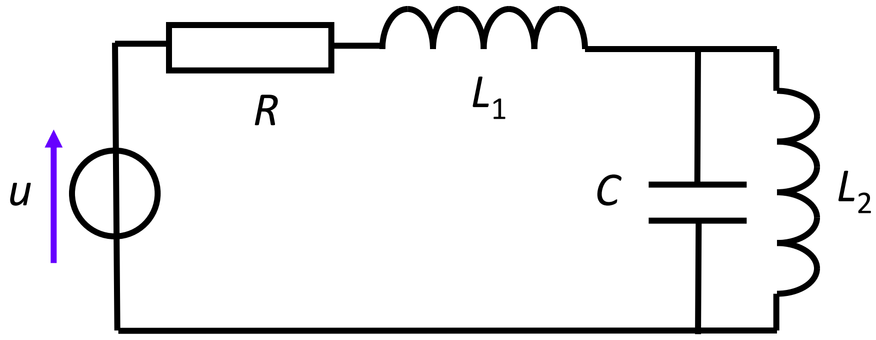
↳ Utilisation d'un logiciel adapté

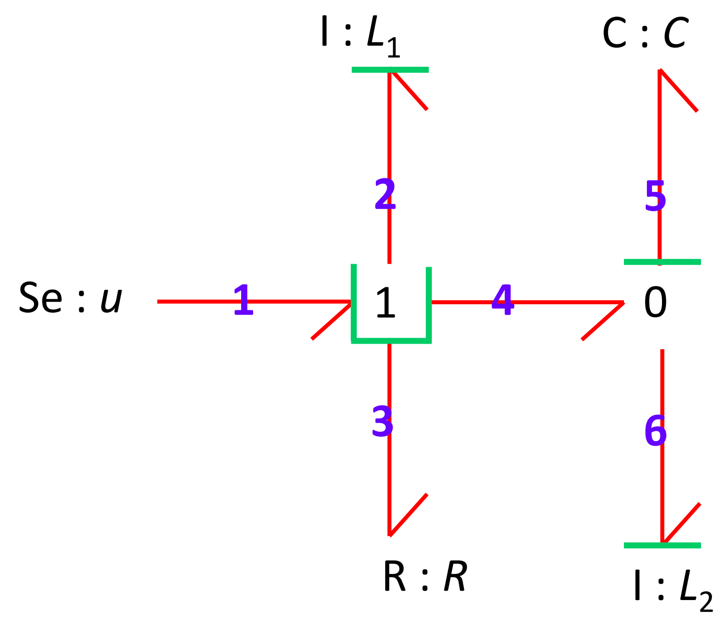
Bond Graphs

Schémas-blocs

Le passage du BG au schéma-bloc est direct en écrivant les lois aux jonctions

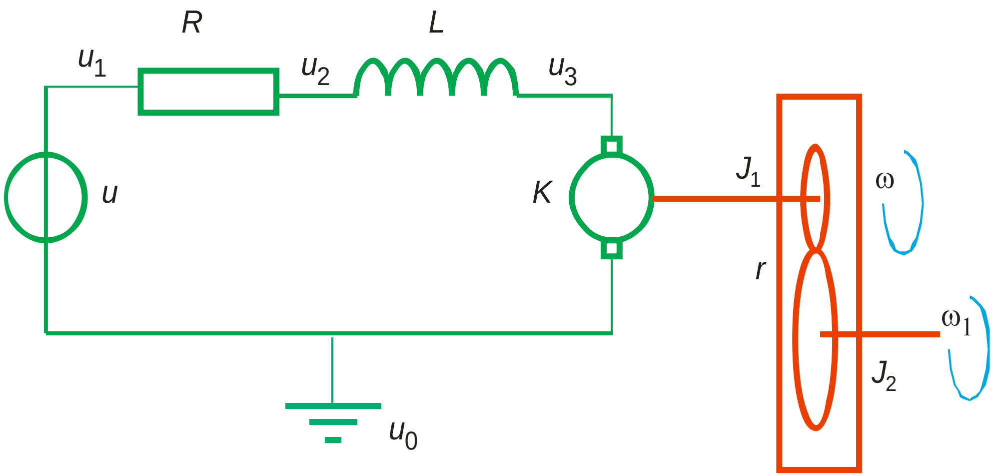
Démarche sur un exemple

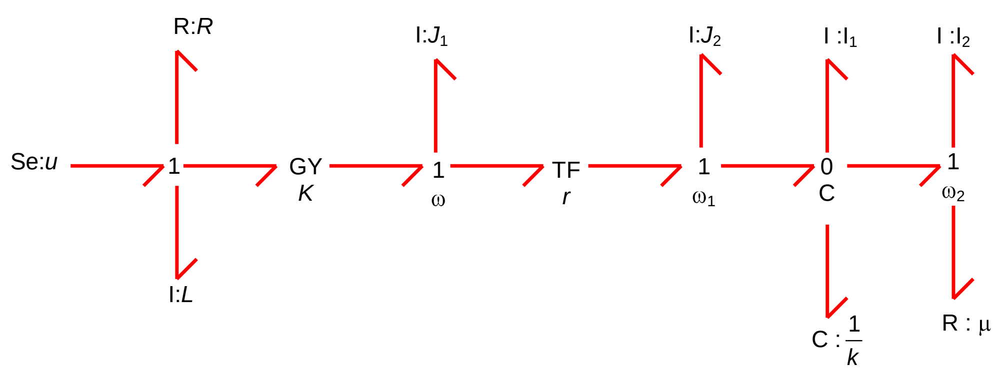




Bond Graphs

Applications



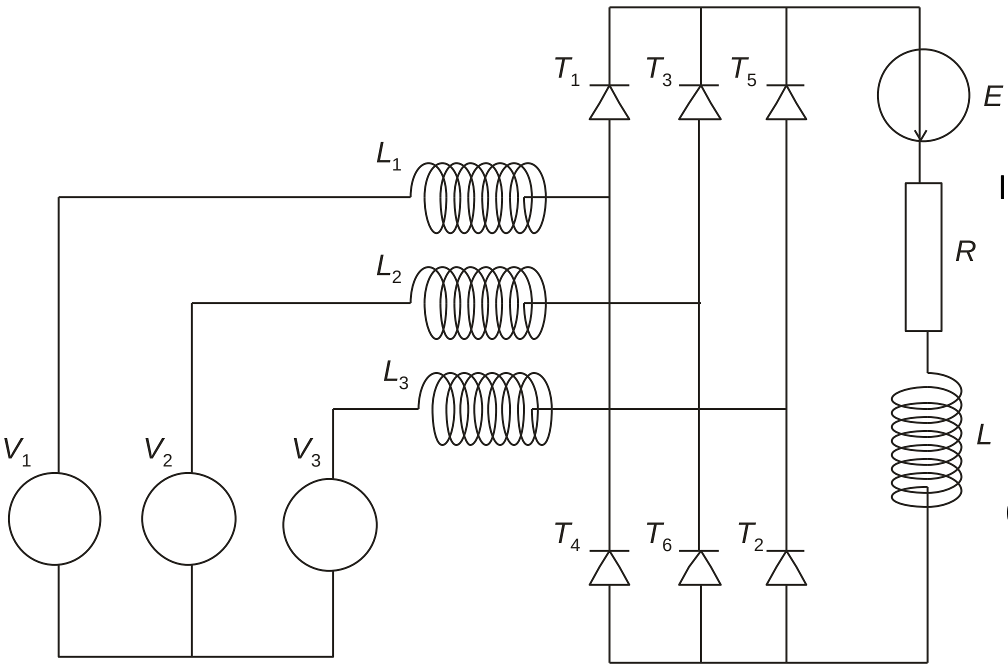


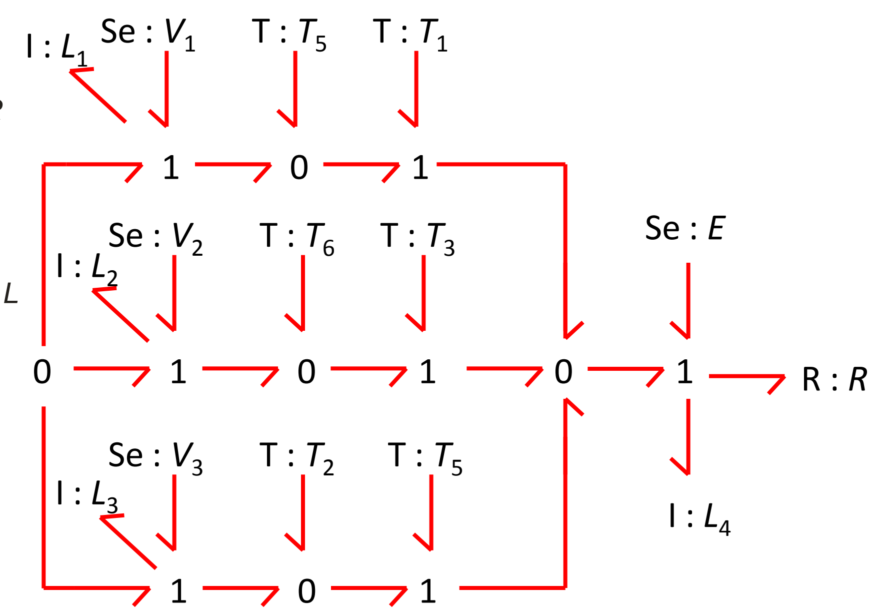
Bond Graphs

Applications

Nouvel élément BG : interrupteur idéal T

- Lorsque T est fermé, il est équivalent à une source d'effort nul ;
- Lorsque T est ouvert, il est équivalent à une source de flux nul.





D'après Jean Buisson & Hervé Cormerais : *Systèmes électroniques et électrotechniques* in *Les bonds graphs*, hermès

Redresseur triphasé double alternance