TE055

Critério de Nyquist

Profª Juliana L. M. Iamamura

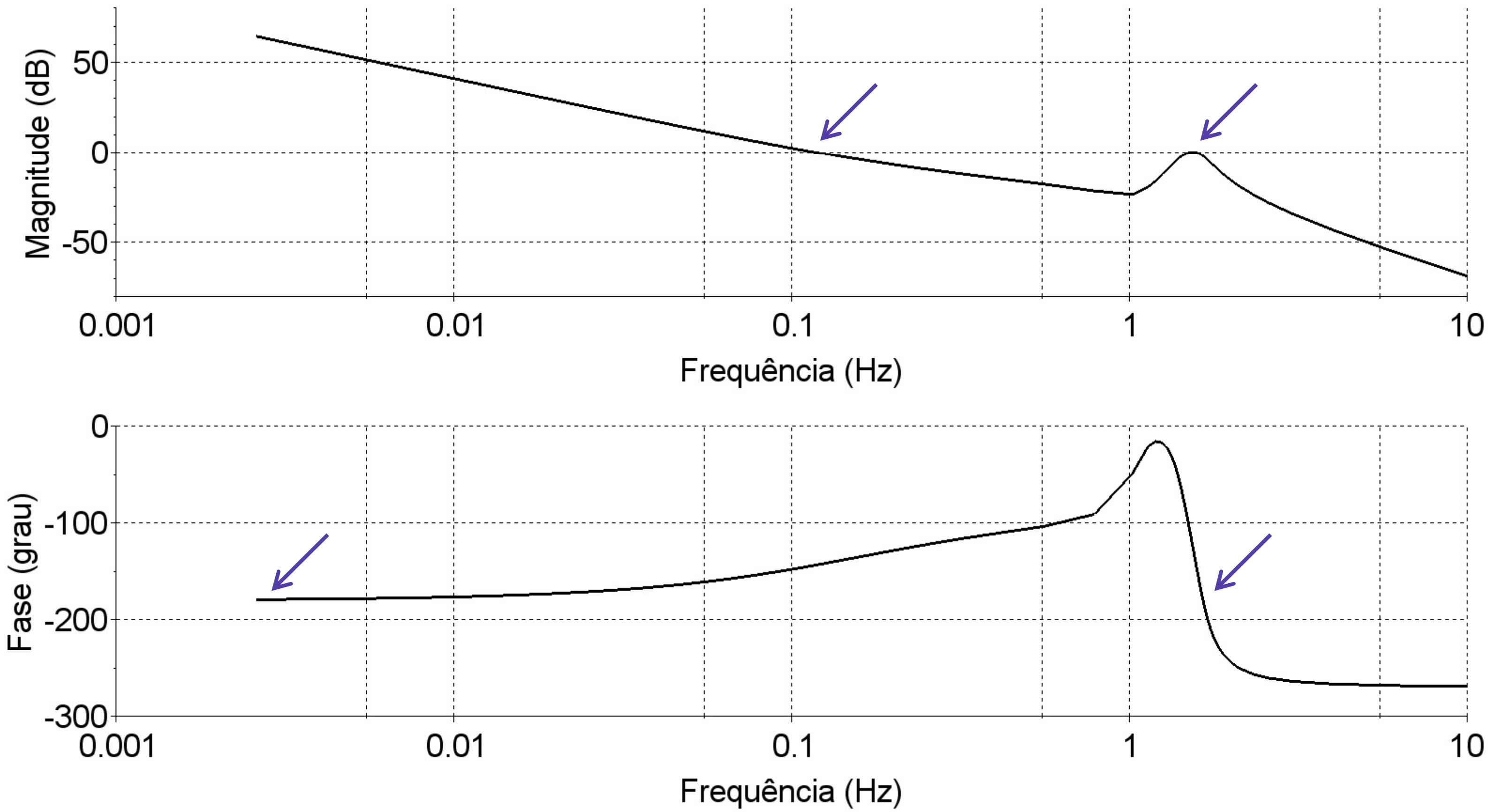
Estabilidade no domínio da frequência

Há alguns sistemas para os quais os critérios de margem de ganho e margem de fase utilizando os diagramas de Bode não são válidos.

Exemplo 1

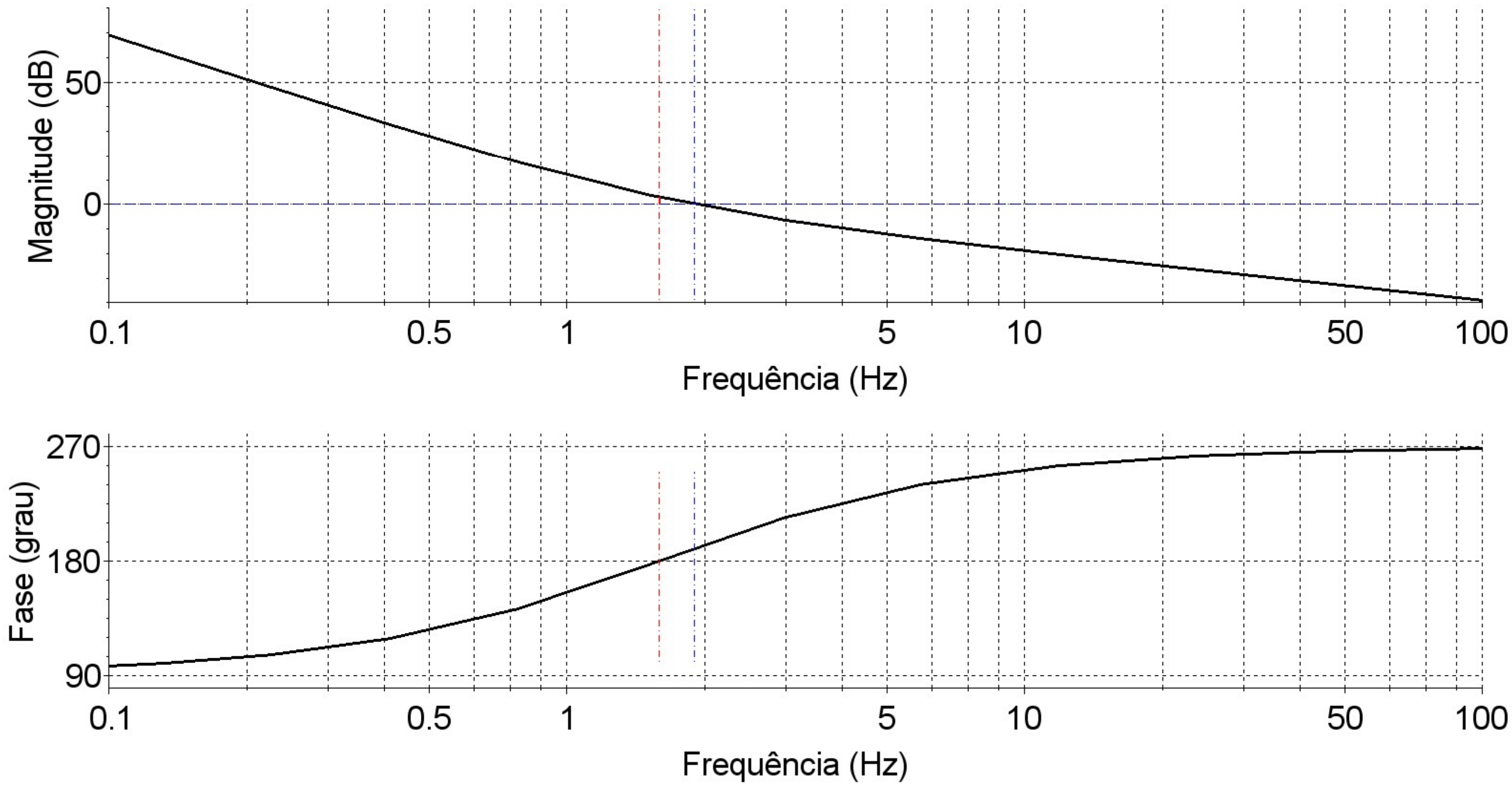
$$G(s) = 7\frac{(s+10)^2}{s^3}$$

Múltiplas frequências de cruzamento



Exemplo 2

$$G(s) = 85\frac{(s+1)\left(s^2+2s+43{,}25\right)}{s^2\left(s^2+2s+82\right)\left(s^2+2s+101\right)}$$

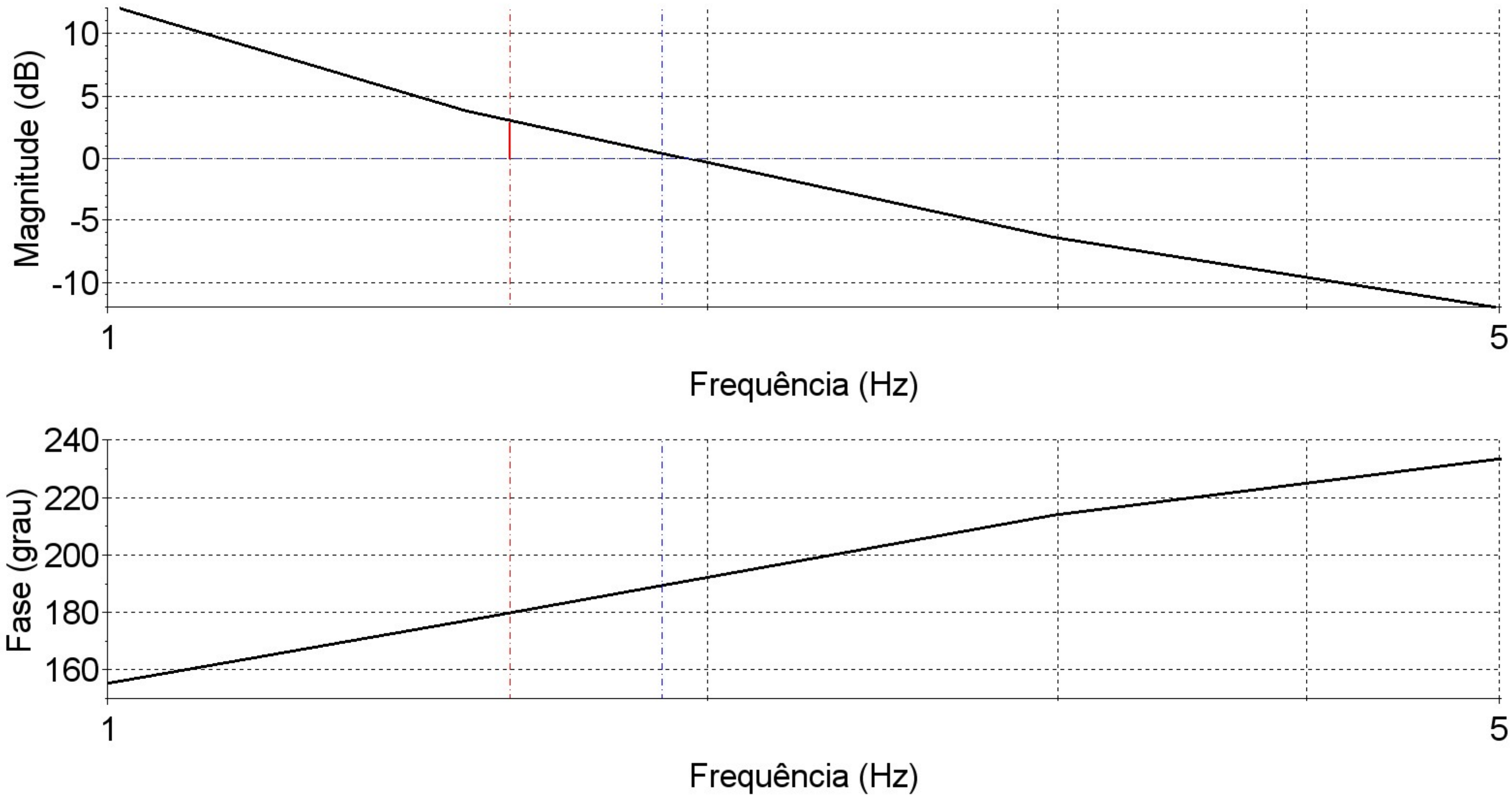


Exemplo 2

$$G(s) = 85\frac{(s+1)(s^2+2s+43{,}25)}{s^2(s^2+2s+82)(s^2+2s+101)}$$

MG = -2,9 dB → MG < 0

MF = 10º → MF > 0



Critério de Nyquist

- Baseado no princípio do argumento de Cauchy.

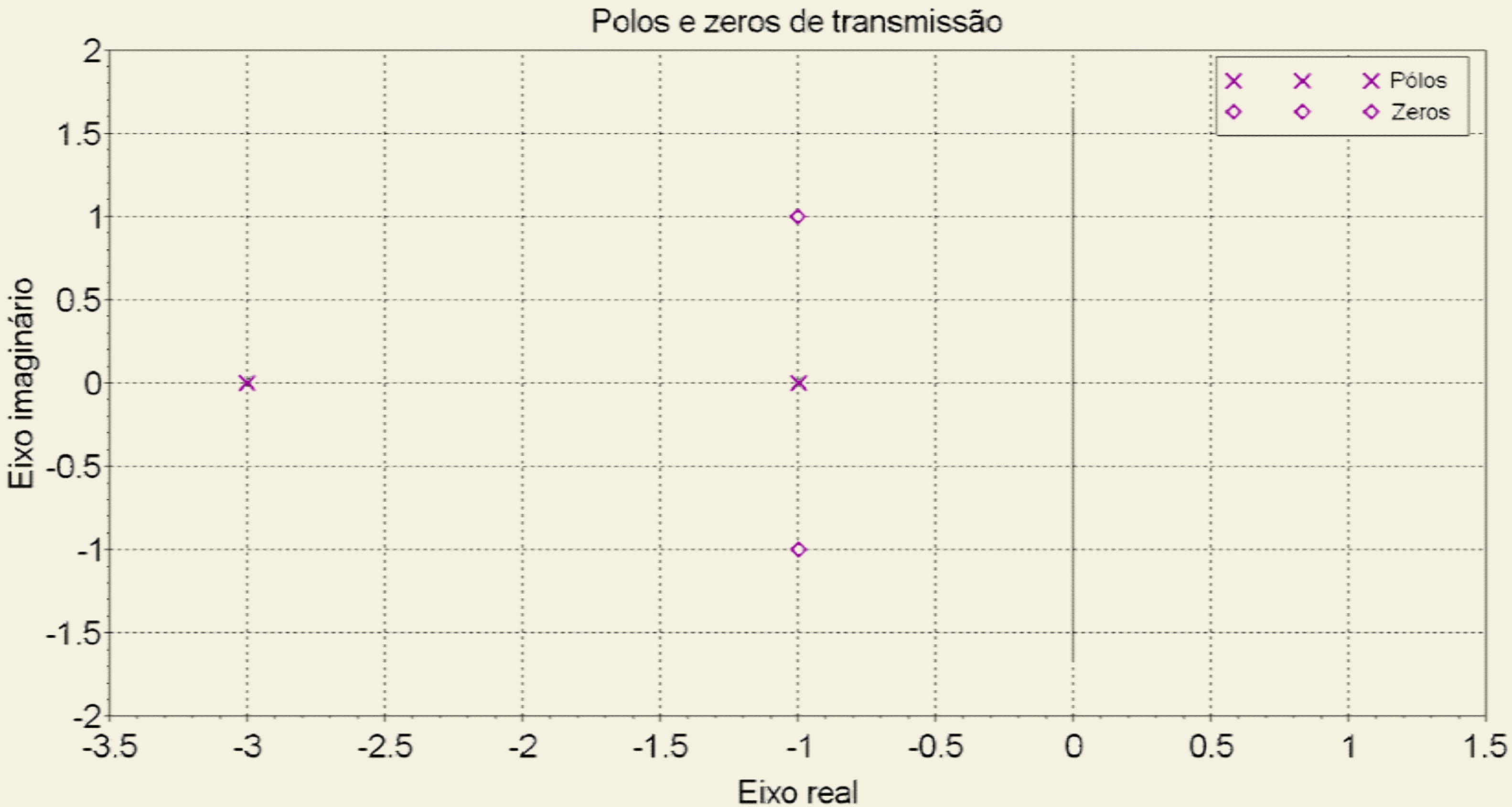
- Relaciona a resposta frequencial em malha aberta ao número de polos em malha fechada no semiplano direito do plano complexo s.

- Exemplo 3: $$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+3)}$$

Critério de Nyquist

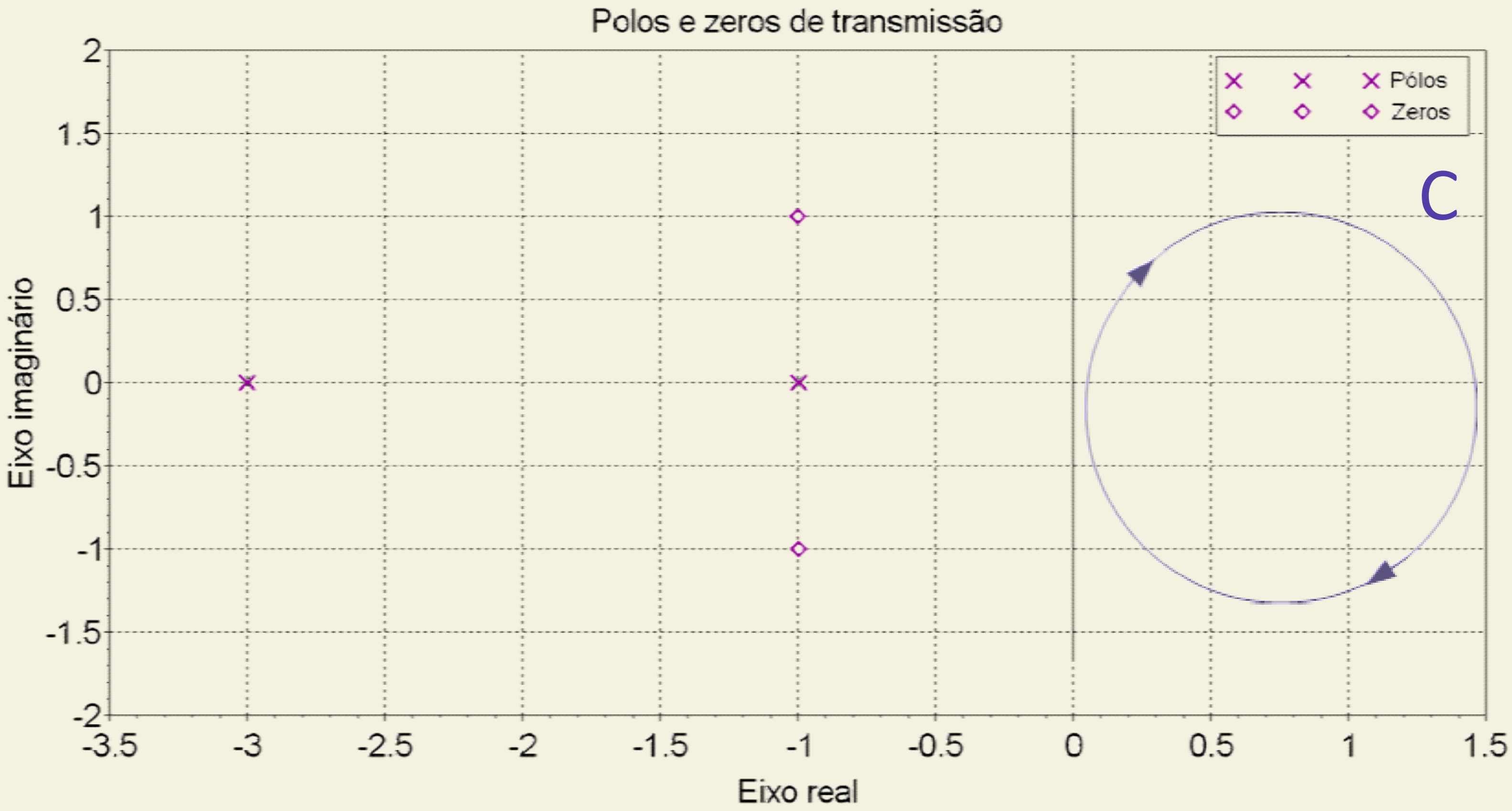
- Teste da função de transferência G(s) abaixo:

$$G(s) = \frac{(s+1+j)(s+1-j)}{(s+1)(s+3)}$$



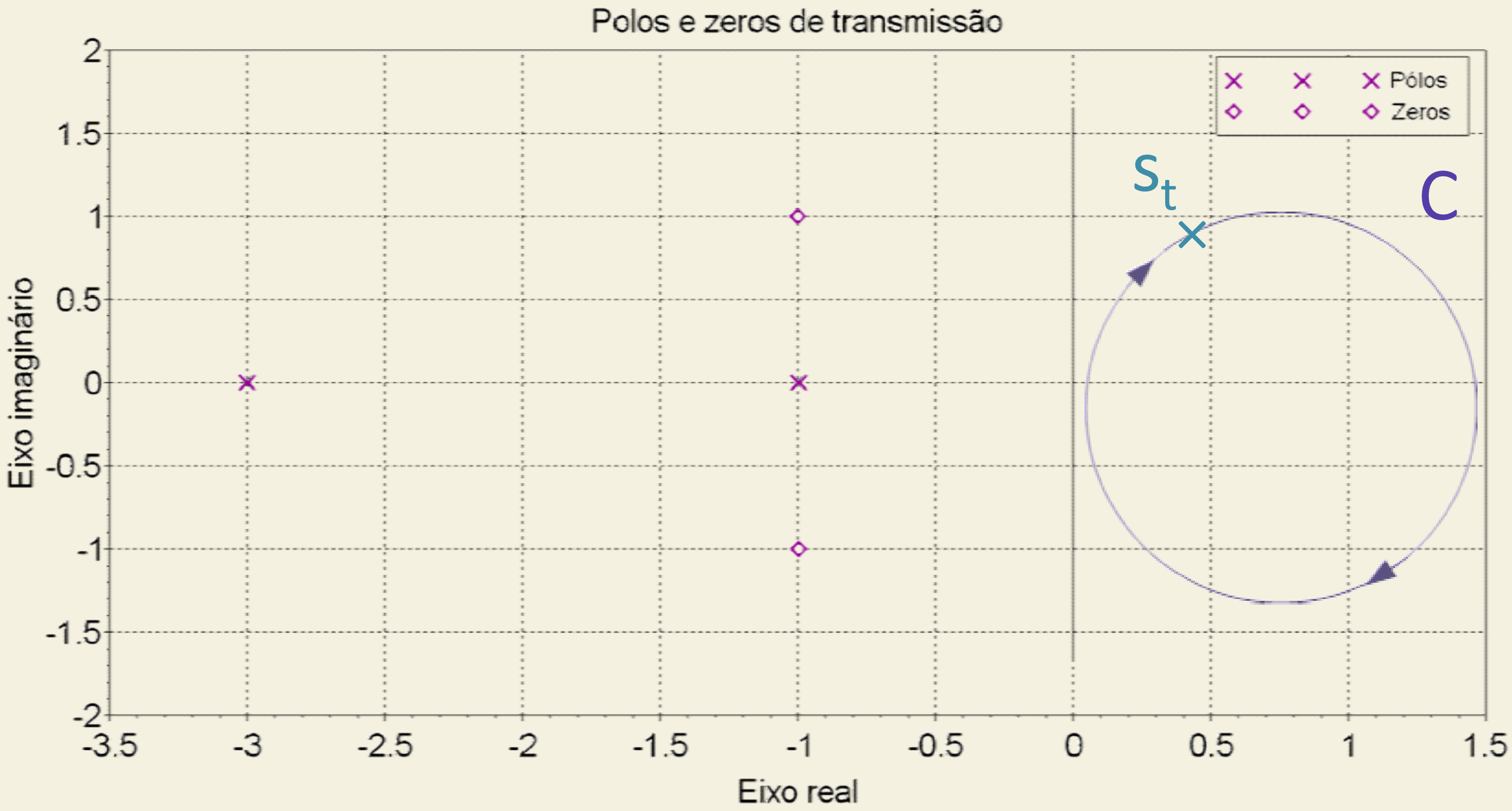
Critério de Nyquist

Desejamos avaliar G(s) para os valores de s que pertencem ao contorno C, no sentido horário, e pertencente ao semiplano direito de s.



Critério de Nyquist

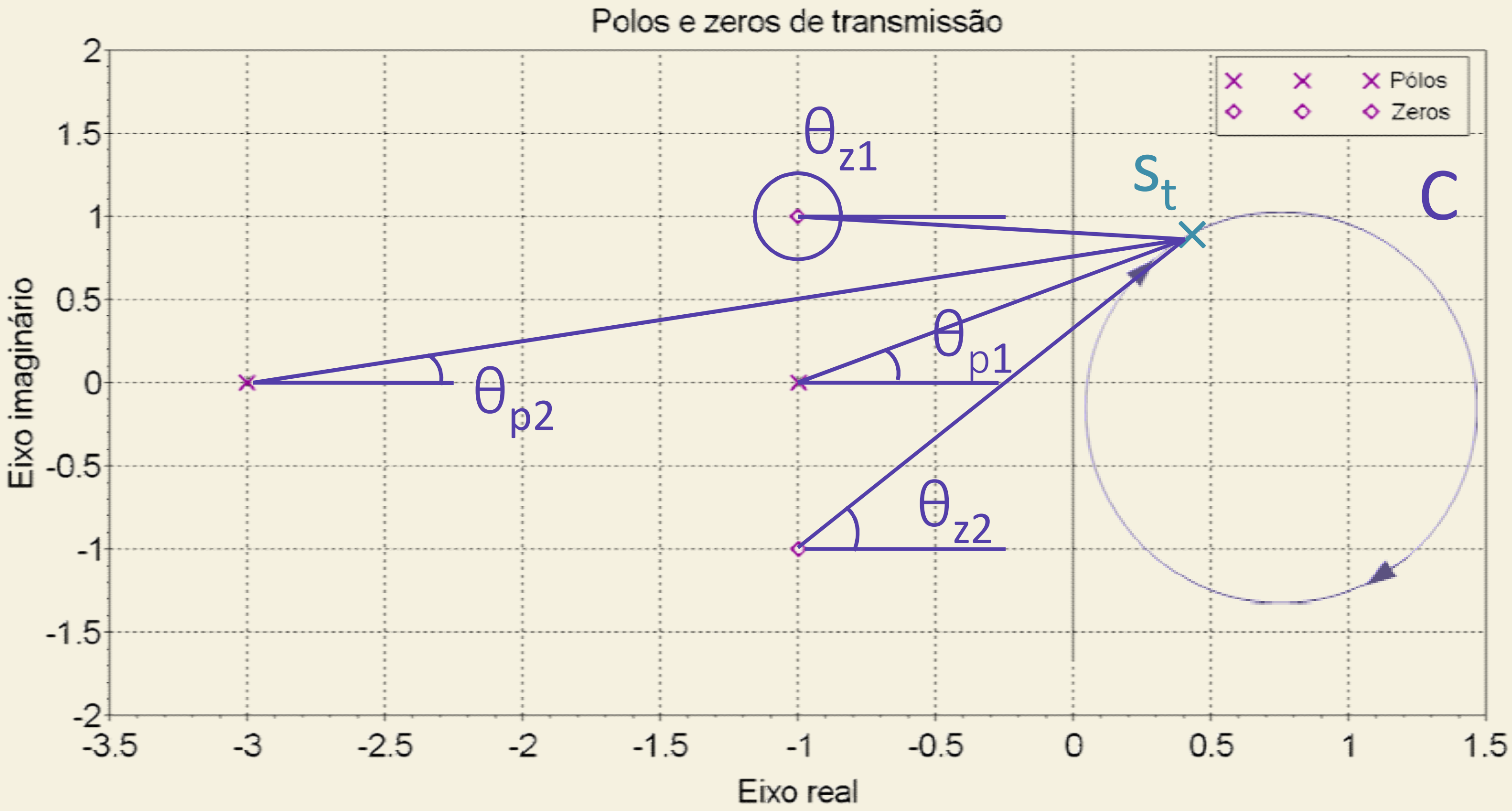
Seja o ponto s_t, sobre o contorno C.



Critério de Nyquist

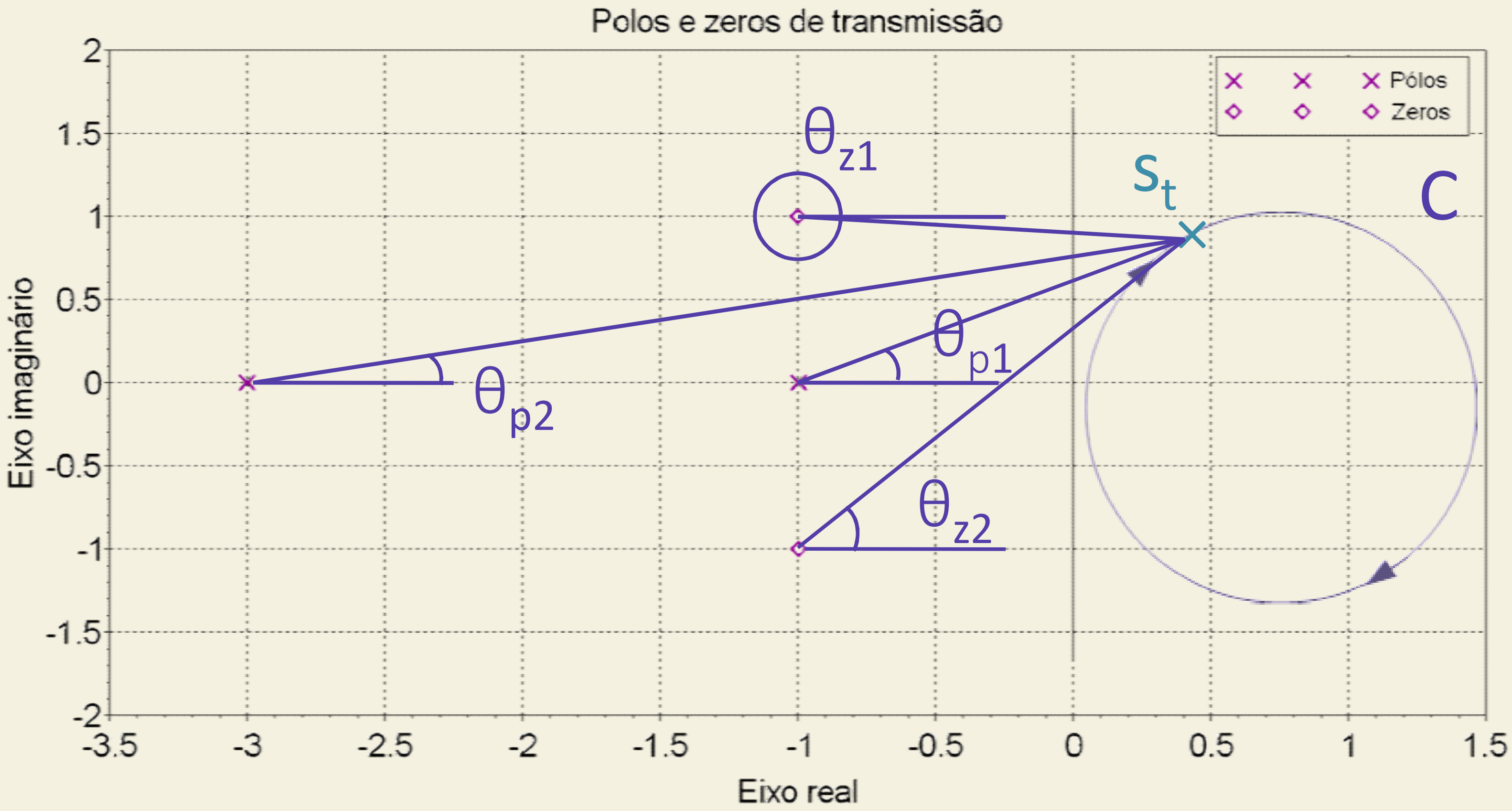
O argumento de $G(s_t)$ vale:

$$\alpha = \sum \theta_z - \sum \theta_p$$



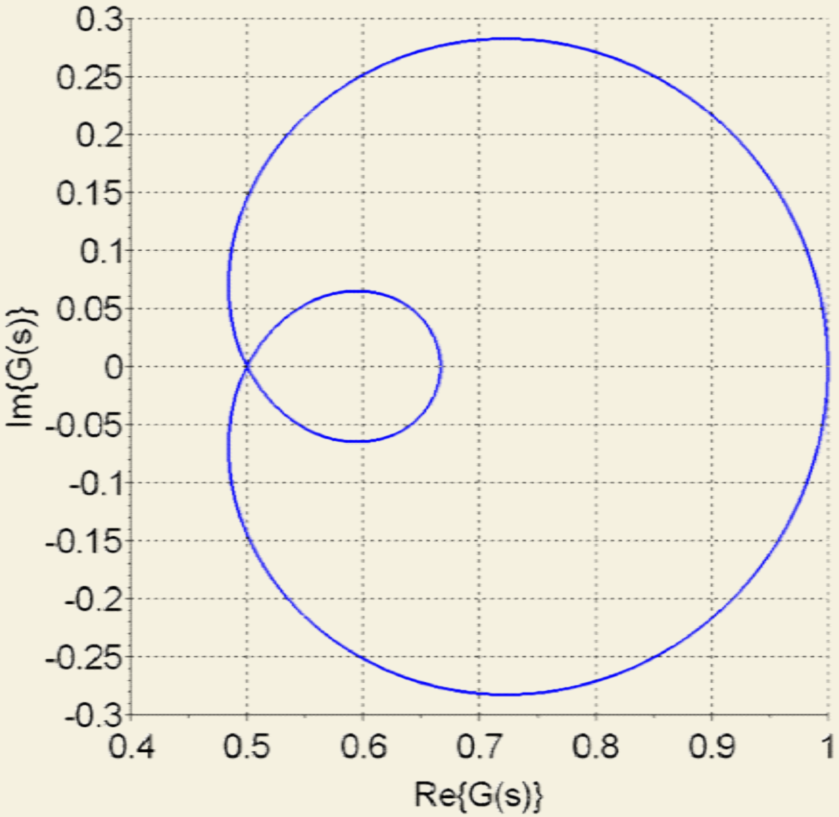
Critério de Nyquist

O argumento de $G(s_t)$ aumenta ou diminui com a variação de st ao longo de C, mas não sofre uma variação de 360º.



Critério de Nyquist

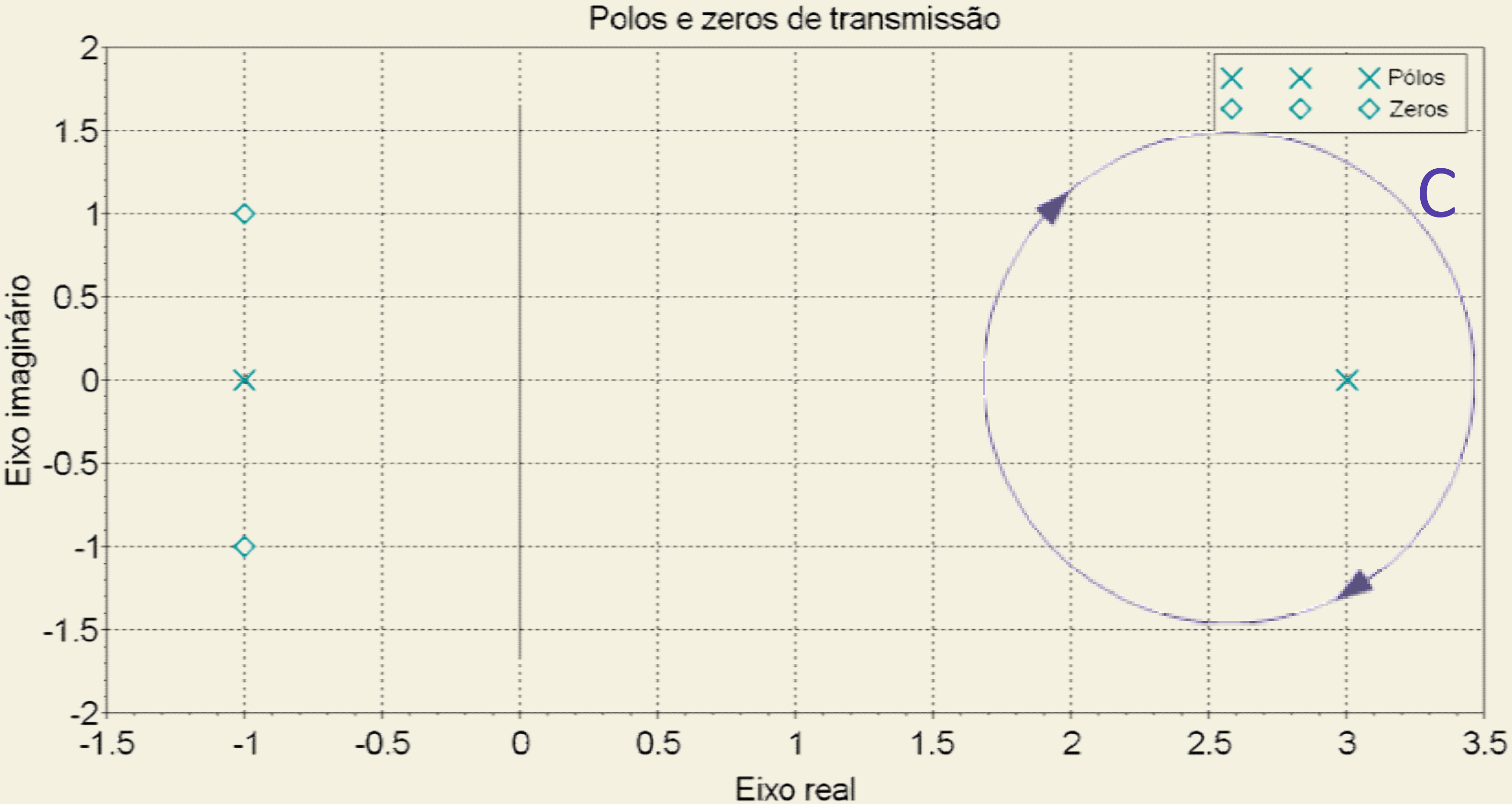
Logo, o mapeamento de G(s) não envolverá a origem.



Critério de Nyquist

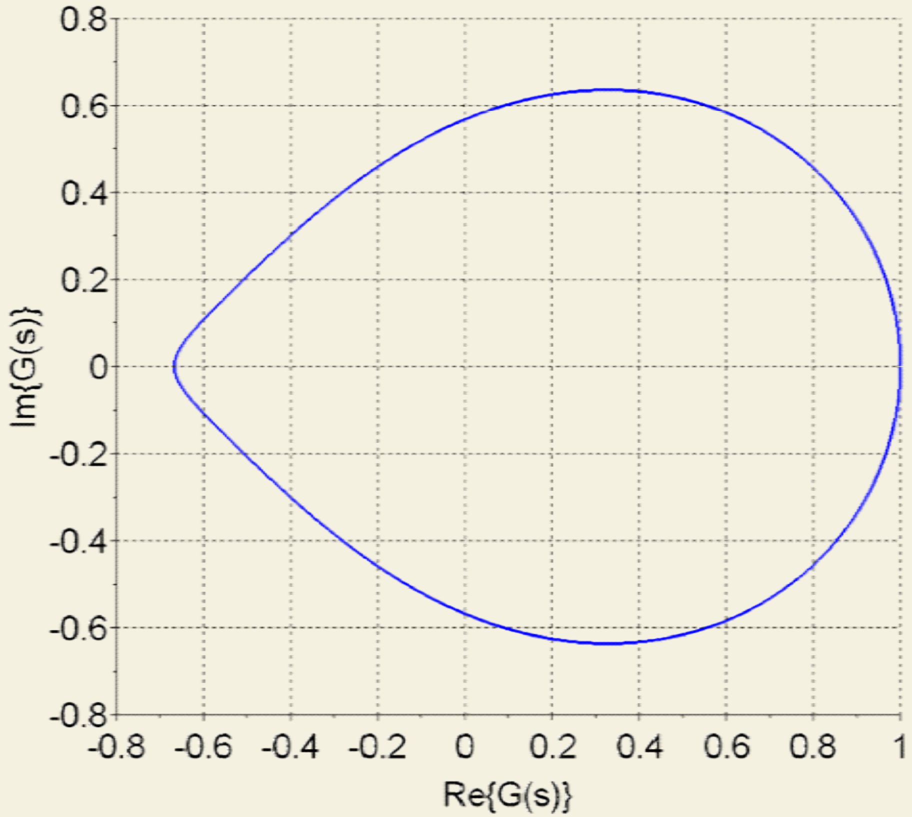
Agora, consideremos:

$$G(s)=\frac{(s+1+j)(s+1-j)}{(s+1)(s-3)}$$



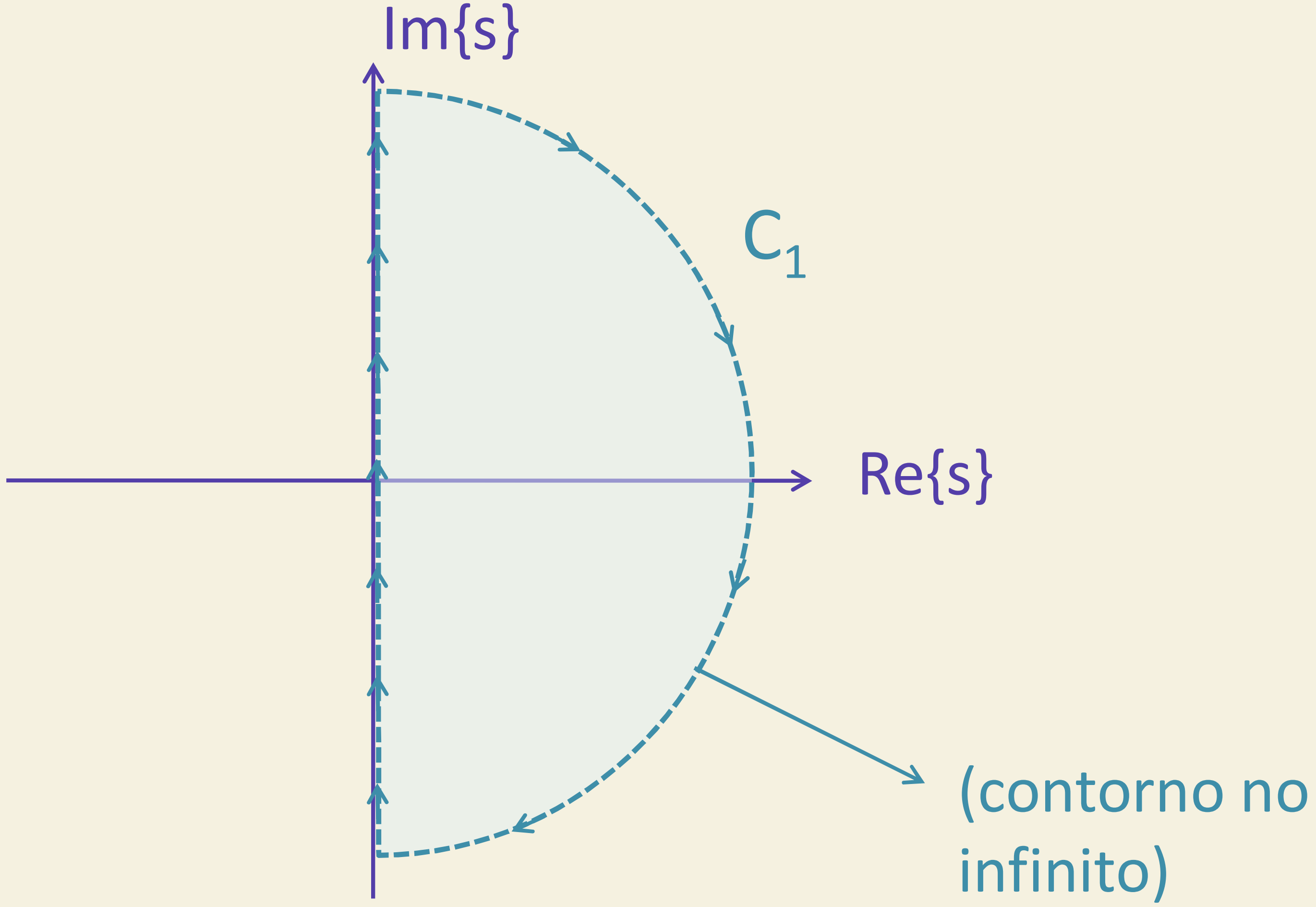
Critério de Nyquist

Como um dos polos é envolvido por C, o mapeamento de G(s) envolve a origem.



Critério de Nyquist

Consideremos agora o contorno C_1, no sentido horário, que envolve todo o semiplano direito:



Critério de Nyquist

O contorno resultante do mapeamento de G(s) em C_1 envolverá a origem somente se G(s) possuir uma raiz no semiplano direito.

Isso significa que é possível determinar a estabilidade em malha fechada de um sistema através da análise em malha aberta.

Como?

Critério de Nyquist

Observemos a função de transferência de malha fechada:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

Os polos de malha fechada são as soluções da equação característica:

$$1 + KG(s) = 0$$

Critério de Nyquist

Mapearemos a função $1 + KG(s)$ em C_1.

Observamos que, se o SPD contiver uma raiz da equação característica, então o seu contorno envolverá a origem.

Logo, o contorno de $KG(s)$ envolverá o ponto $(-1,0)$.

Critério de Nyquist

O ponto (-1,0) é chamado de ponto crítico, e o mapeamento de KG(s) é chamado de diagrama de Nyquist, ou diagrama polar.

Critério de Nyquist

Desejamos determinar se as raízes no SPD são um polo ou um zero. Para isso, escrevemos a função

$$G(s) = \frac{\boxed{b(s)}}{\boxed{a(s)}}$$

zeros de MA

polos de MA

$$1 + KG(s) = 1 + K\frac{b(s)}{a(s)}$$

$$1 + KG(s) = \frac{a(s) + Kb(s)}{\boxed{a(s)}}$$

polos de MF

Critério de Nyquist

Observamos que os polos de MF também são os polos de MA.

Consideramos, então, que a eventual presença de polos de malha fechada no SPD é conhecida.

Se não houver nenhum polo de MF no SPD, o envolvimento do ponto crítico por KG(s) indica a presença de um zero de malha fechada no SPD.

Critério de Nyquist

Princípio do argumento:

O mapa de contorno de uma função complexa envolve a origem $Z - P$ vezes, em que Z é o número de zeros e P, o número de polos dentro do contorno.

Critério de Nyquist

Um contorno C_1 no sentido horário que envolva um zero de 1 + KG(s) resulta em KG(s) envolvendo o ponto crítico no sentido horário.

Da mesma forma, se C_1 envolve um polo de 1 + KG(s) , KG(s) envolverá o ponto (-1,0) no sentido anti-horário.

Critério de Nyquist

O número N de envolvimentos é igual ao número Z de zeros de 1 + KG(s) (ou de polos de malha fechada) no semiplano direito, menos o número P de polos de 1 + KG(s) (ou de polos de malha aberta) no semiplano direito.

$$\boxed{N = Z - P}$$

Aplicação do critério de Nyquist

1. Traçar o diagrama polar de $KG(j\omega)$ para
   $0 \leq \omega < \infty$.
   Refletir o diagrama em relação ao eixo real, o que resultará na parte do diagrama relativa a
   $-\infty < \omega \leq 0$.

2. Determinar P, que é o número de polos instáveis de malha aberta.

Aplicação do critério de Nyquist

3. Determinar N, que é o número de envolvimentos do ponto -1 pelo mapeamento de KG(jω).

   Para isso, traçar um vetor que parte de -1 e chega no infinito.

   Levar em conta o sentido dos envolvimentos:

   - Sentido horário: N positivo

   - Sentido anti-horário: N negativo

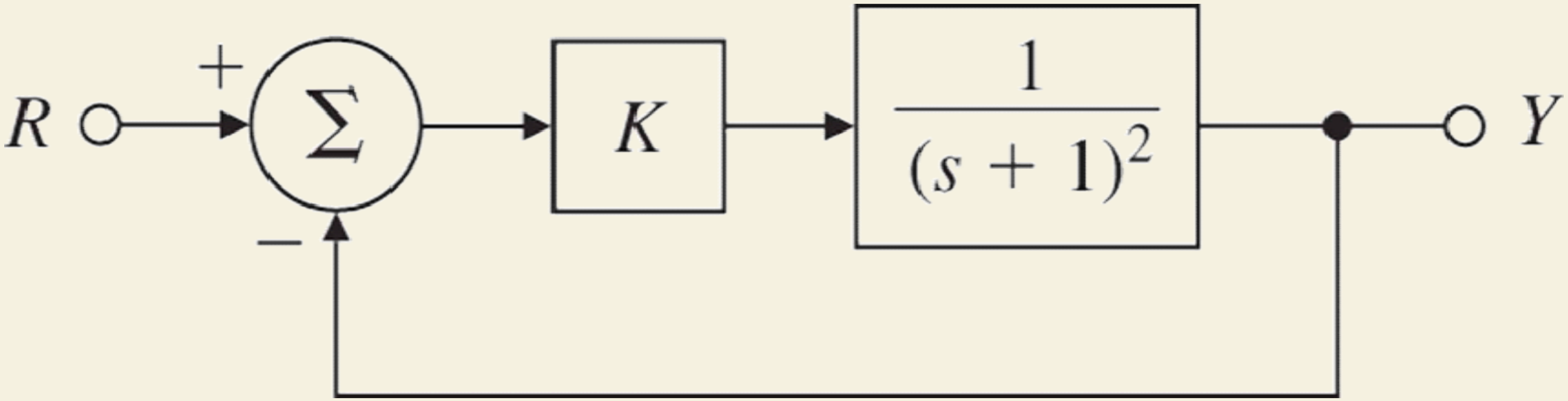
Aplicação do critério de Nyquist

4. Calcular o número de polos instáveis de malha fechada Z:

$$Z = N + P$$

Exemplo 4

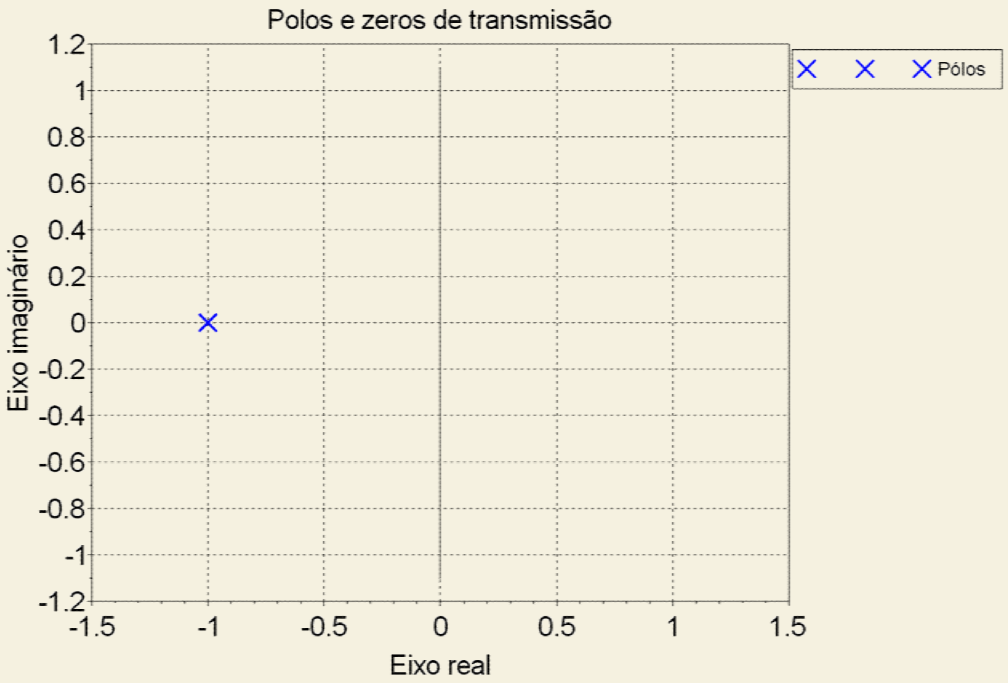
Avalie a estabilidade do sistema abaixo utilizando o critério de Nyquist:



Exemplo 4

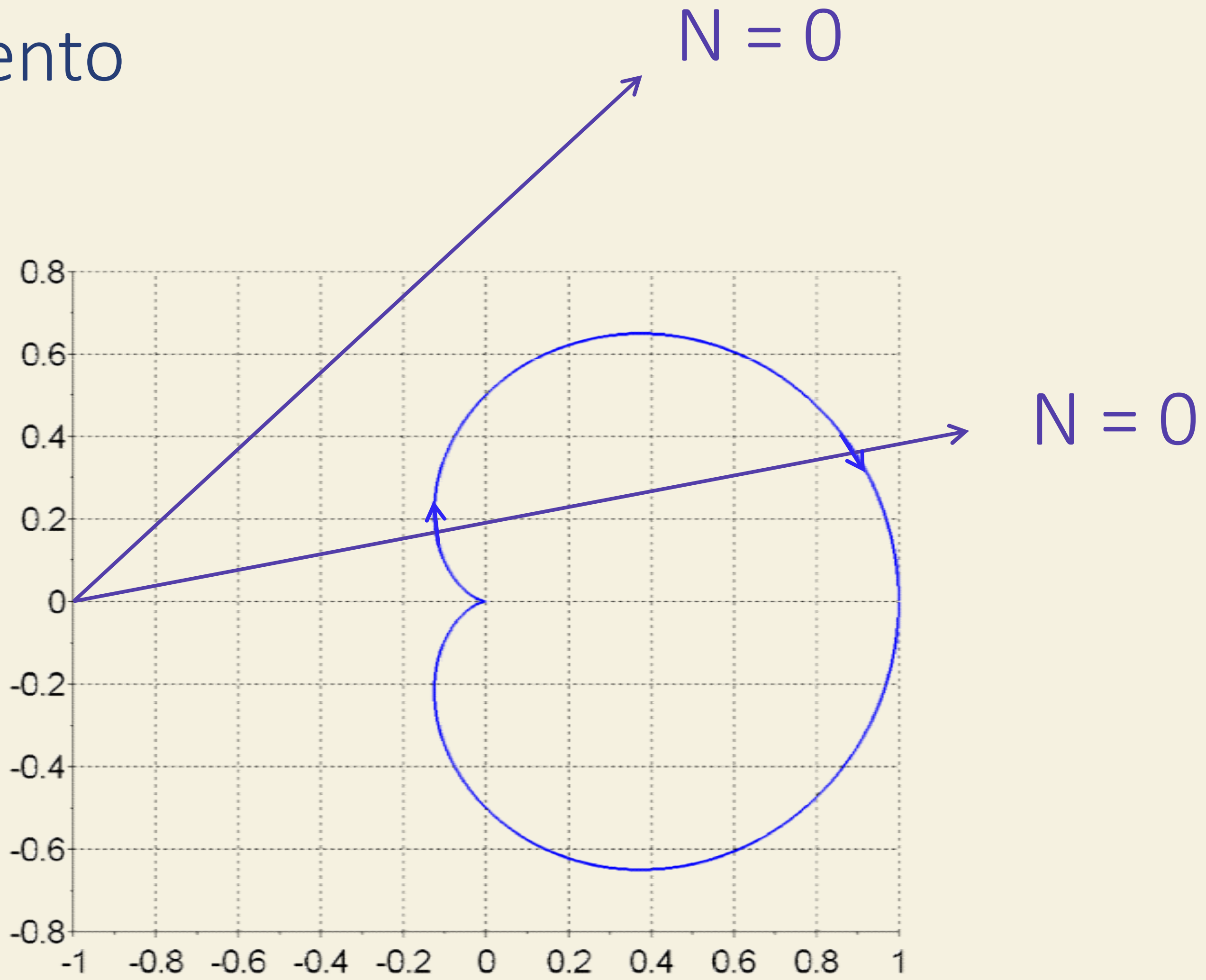
Observa-se que não há polos instáveis de malha aberta: P = 0

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$



Exemplo 4

Mapeamento



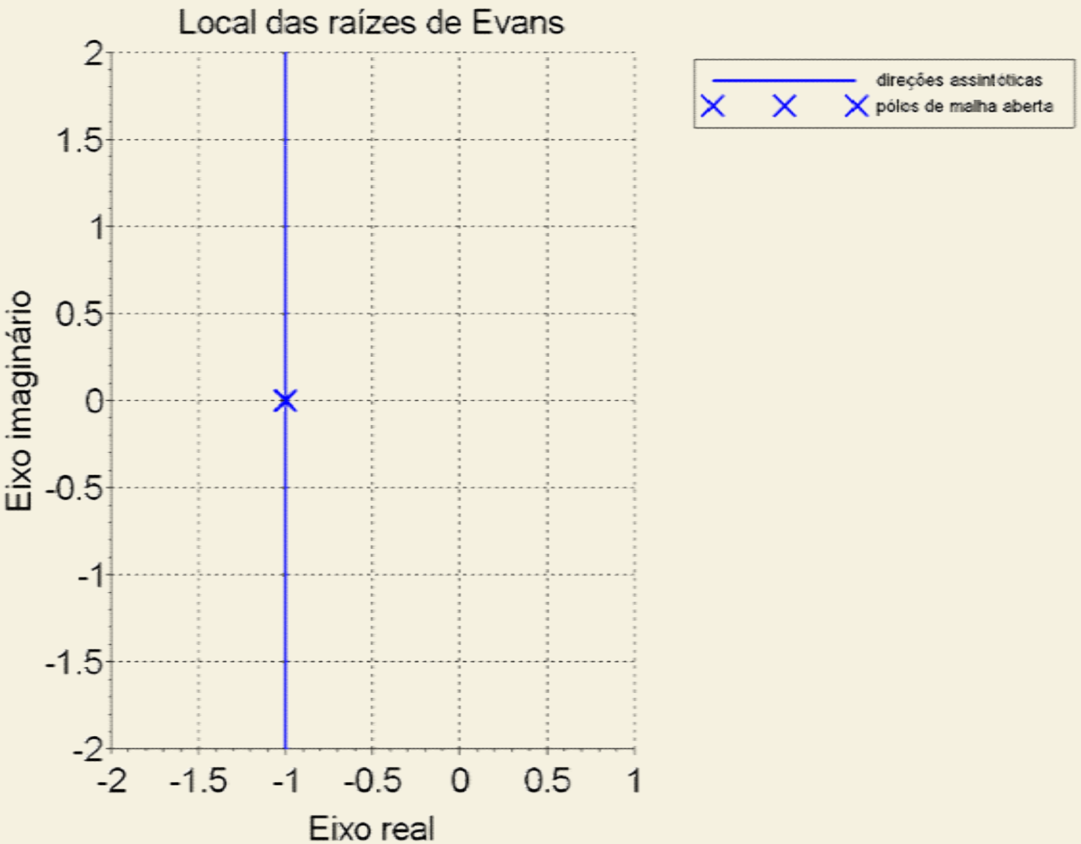
Exemplo 4

$Z = N + P$

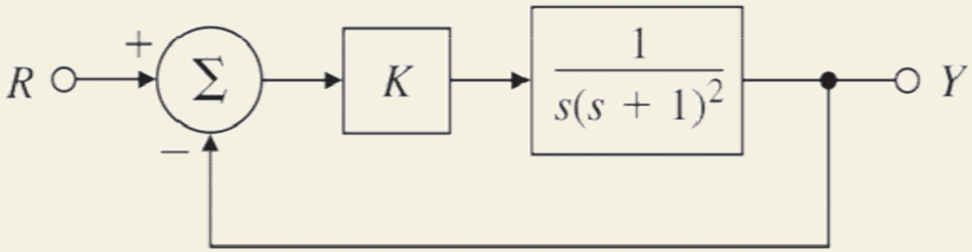
$Z = 0$ ➔ sistema estável

Exemplo 4

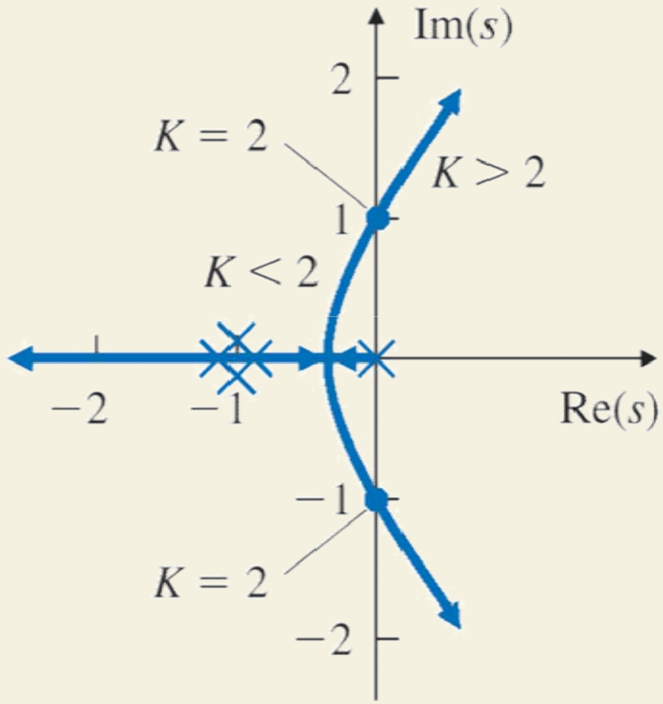
Pelo lugar das raízes, verifica-se que o sistema é estável.



Exemplo 5



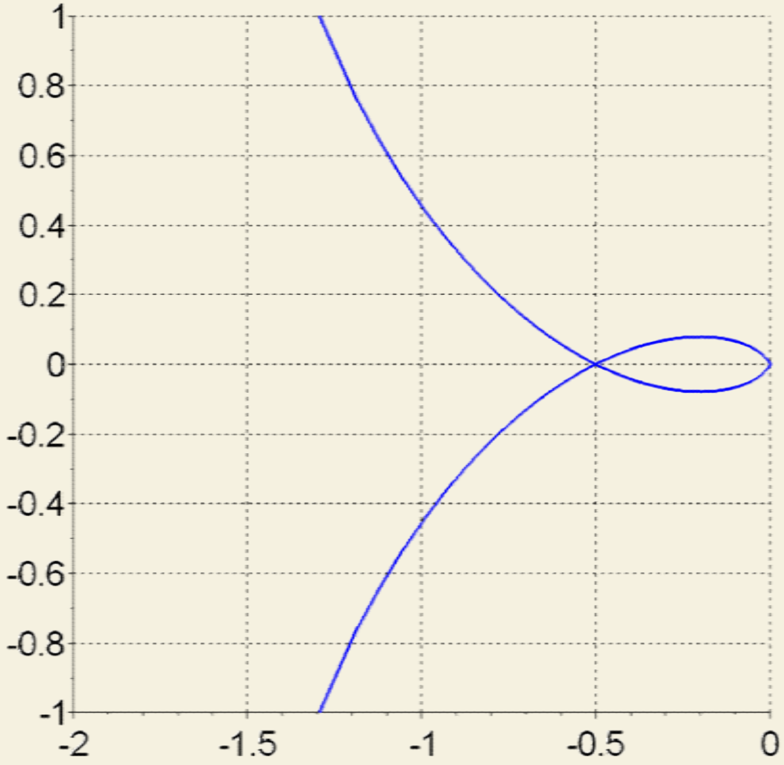
(a)



(b)

Exemplo 5

Mapeamento



Exemplo 5

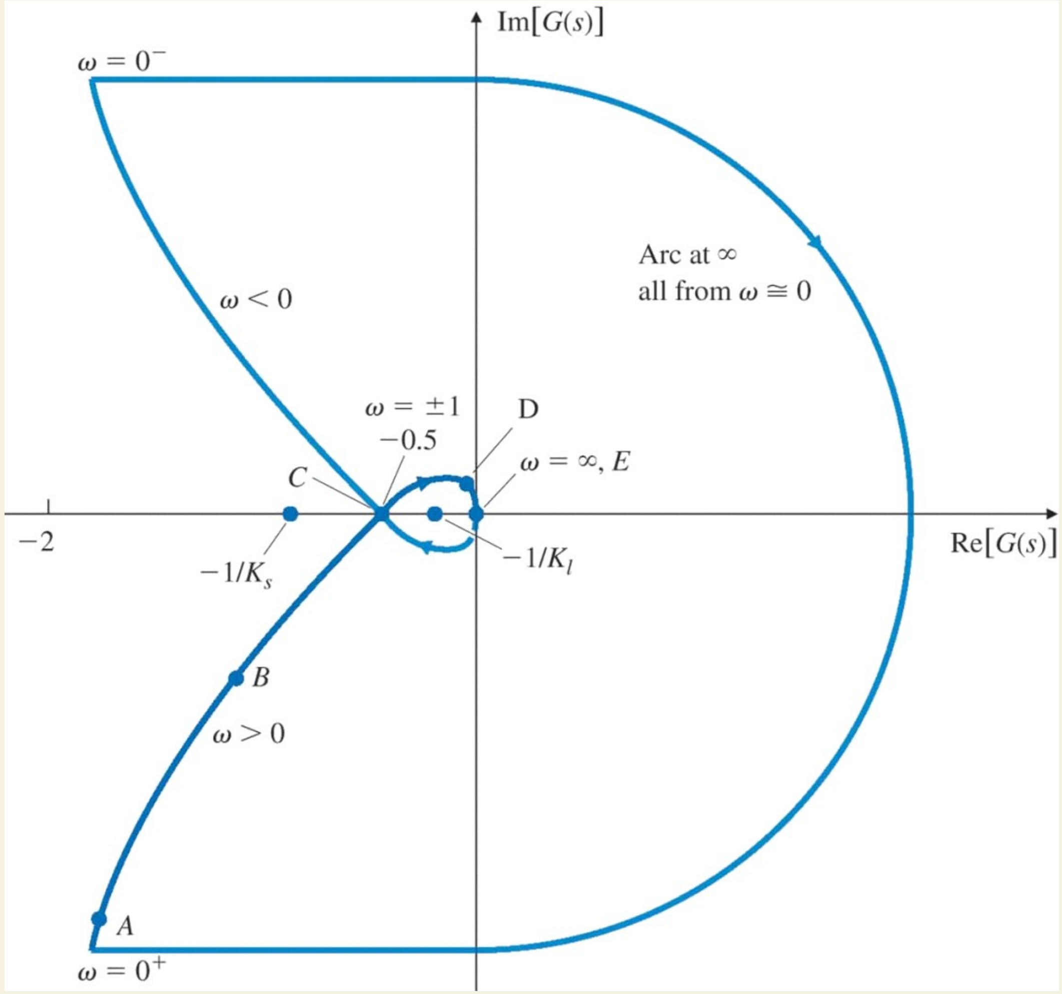


Figure 6.26 Nyquist plot[9] for $G(s) = 1/s(s+1)^2$

Exemplo 5

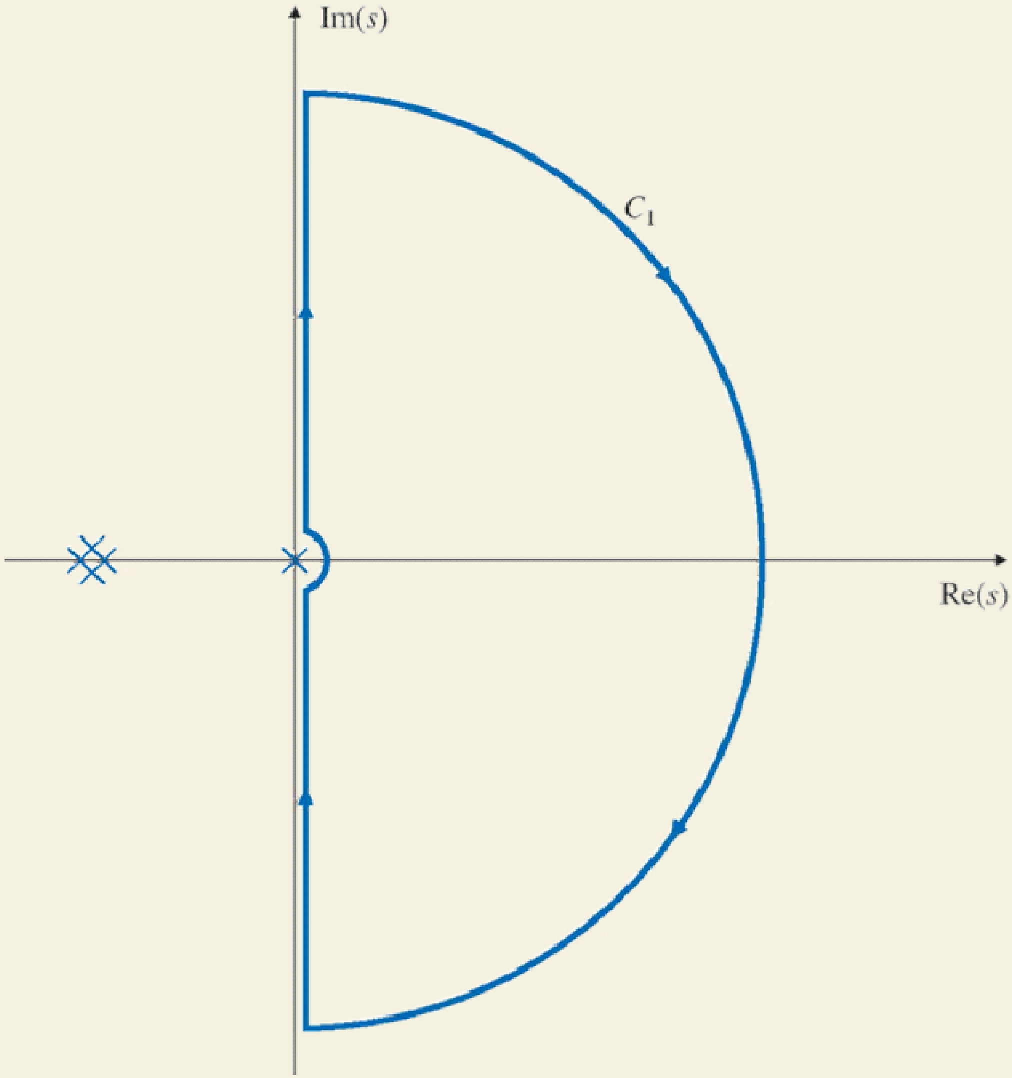


Figure 6.27 C_1 contour enclosing the RHP for the system in Example 6.9