TE055

Análise no domínio da frequência

Profª Juliana L. M. Iamamura

Análise no domínio da frequência

Resposta em frequência = resposta em regime permanente de um sistema a uma entrada senoidal.

Consideremos o sistema abaixo:

$$R(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$r(t) = A\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

$$R(s) = \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0{}^2}$$

Análise no domínio da frequência

Logo, $Y(s) = R(s)G(s)$

$$Y(s) = \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0{}^2} G(s)$$

Expandindo em frações parciais:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{a_1}{s - p_1} + \frac{a_2}{s - p_2} + \ldots + \frac{a_n}{s - p_n}}_{\text{Parte relativa a } G(s)} + \underbrace{\frac{a_0}{s + j\omega_0} + \frac{a_0 *}{s - j\omega_0}}_{\text{Parte relativa a } R(s)}$$

Análise no domínio da frequência

$$y(t) = a_1 e^{p_1 t} + a_2 e^{p_2 t} + \ldots + a_n e^{p_n t} + 2\left|a_0\right|\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad t \geq 0$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}\{a_0\}}{\operatorname{Re}\{a_0\}}\right)$$

Se os polos estão no SPE, os primeiros termos anulam-se depois de um tempo (tendem a zero), e sobra apenas:

$$\boxed{y(t) = 2\left|a_0\right|\cos(\omega_0 t + \varphi) = AM\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

Análise no domínio da frequência

$$\boxed{y(t) = 2\left|a_0\right|\cos(\omega_0 t + \varphi) = AM\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$M = \left|G(s)\right|_{s=j\omega_0} = \sqrt{\left(\mathrm{Re}\{G(j\omega_0)\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{G(j\omega_0)\}\right)^2}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega_0) = \mathrm{atan}\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega_0)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega_0)\}}\right)$$

Ou seja,

$$\boxed{G(j\omega_0) = Me^{j\omega_0}}$$

Análise no domínio da frequência

Exemplo:

$$R(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

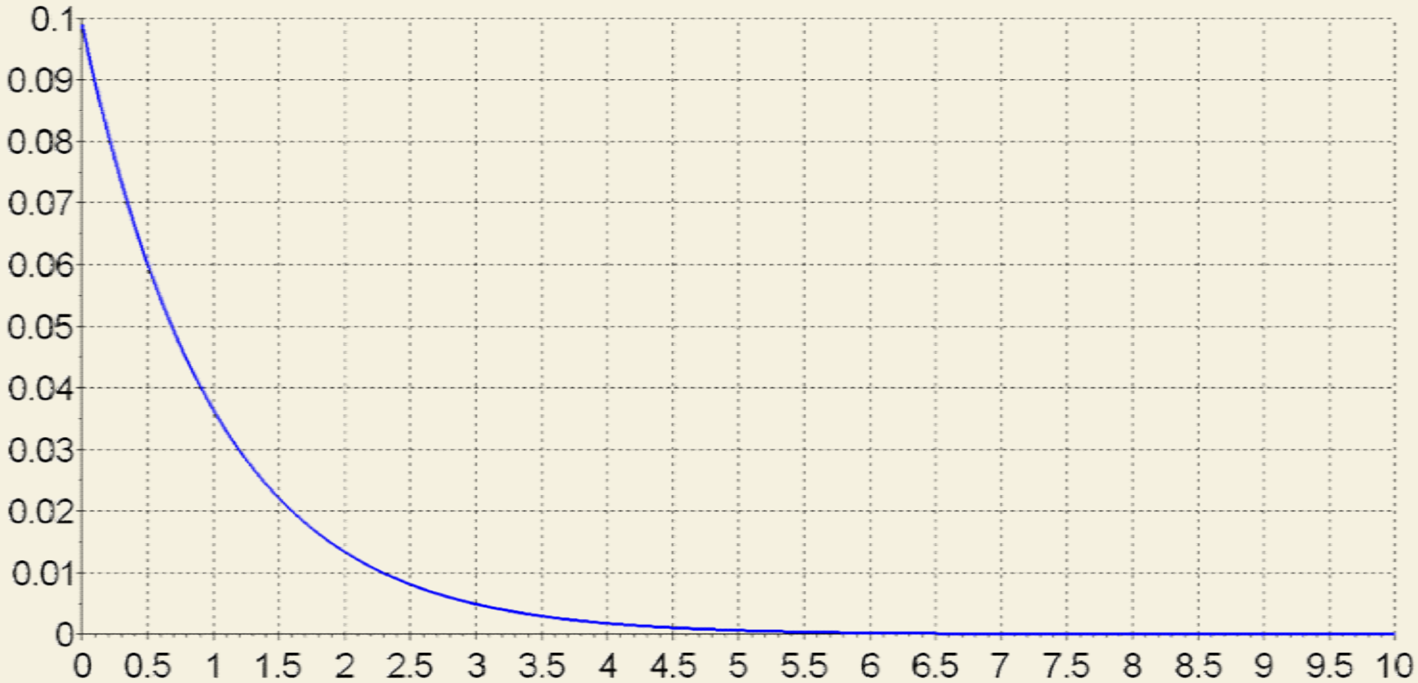
$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$r(t) = \mathrm{sen}(10t) \Rightarrow R(s) = \frac{10}{s^2+100}$$

$$y(t) = \frac{20}{202}e^{-t} + \frac{2\sqrt{101}}{202}\cos(10t - 5{,}7^\circ)$$

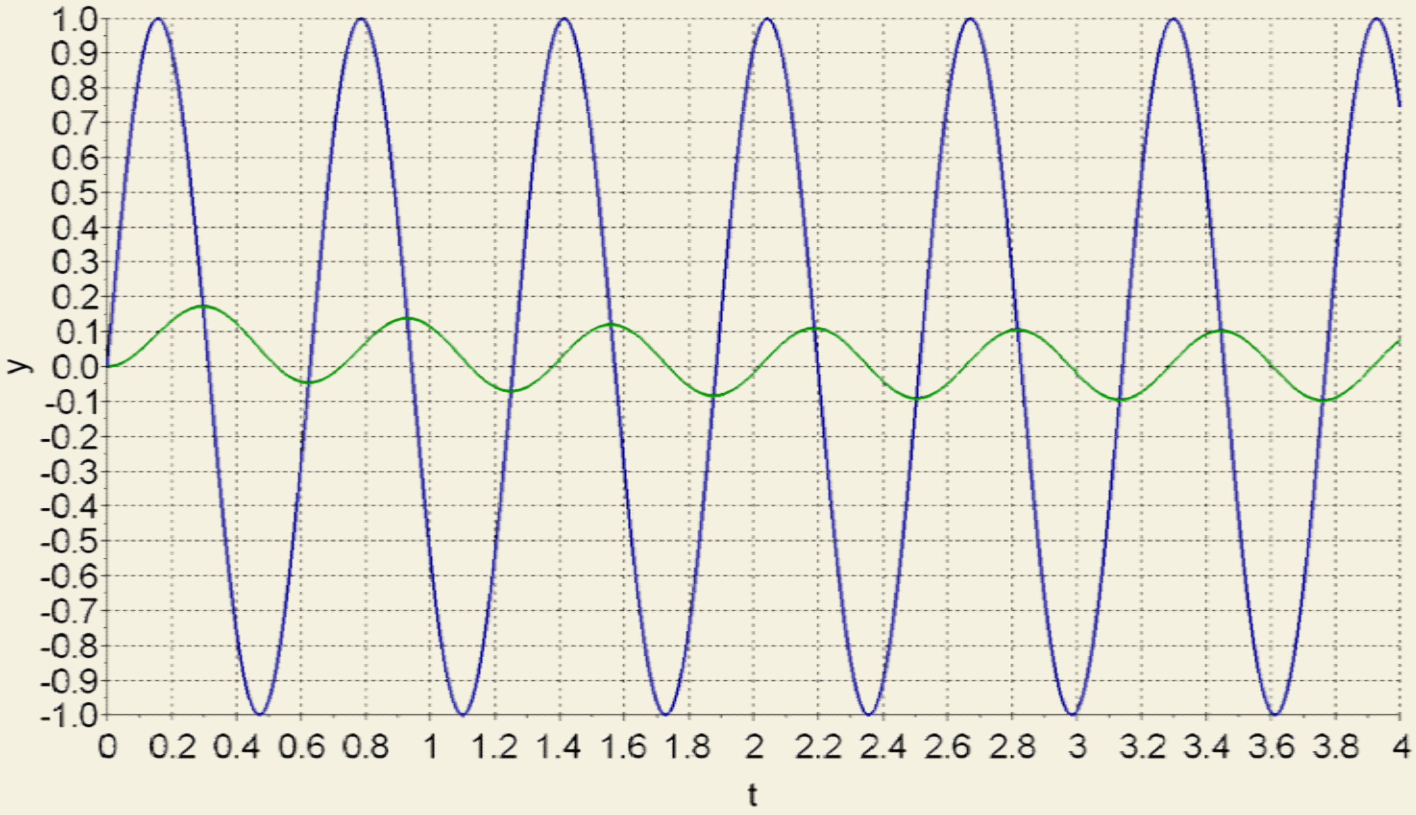
Análise no domínio da frequência

$$y(t) = \frac{20}{202} e^{-t}$$



Análise no domínio da frequência

$$y(t) = \frac{20}{202}e^{-t} + \frac{2\sqrt{101}}{202}\cos(10t - 5{,}7^\circ)$$



Análise no domínio da frequência

Projetos simples.

Não é necessário conhecer polos e zeros.

Sinais decompostos em somas de sinais exponenciais.

Principais ferramentas de representação:

- Diagrama de Bode;
- Diagrama de Nyquist;
- Carta de Nichols.

Diagramas de Bode

Podem ser obtidos experimentalmente.

Somam-se os diagramas de sistemas em série.

O uso da escala log permite a análise de uma larga gama de frequências.

Podem ser utilizados para o projeto de controladores.

Diagramas de Bode

Frequência (Hz ou rad/s) em escala logarítmica

Amplitude (dB) em escala logarítmica

Fase (graus) em escala aritmética

Frequência de corte: frequência na qual ocorre uma redução de 3dB no sinal.

Banda de passagem: faixa de frequências transmitidas pelo sistema.

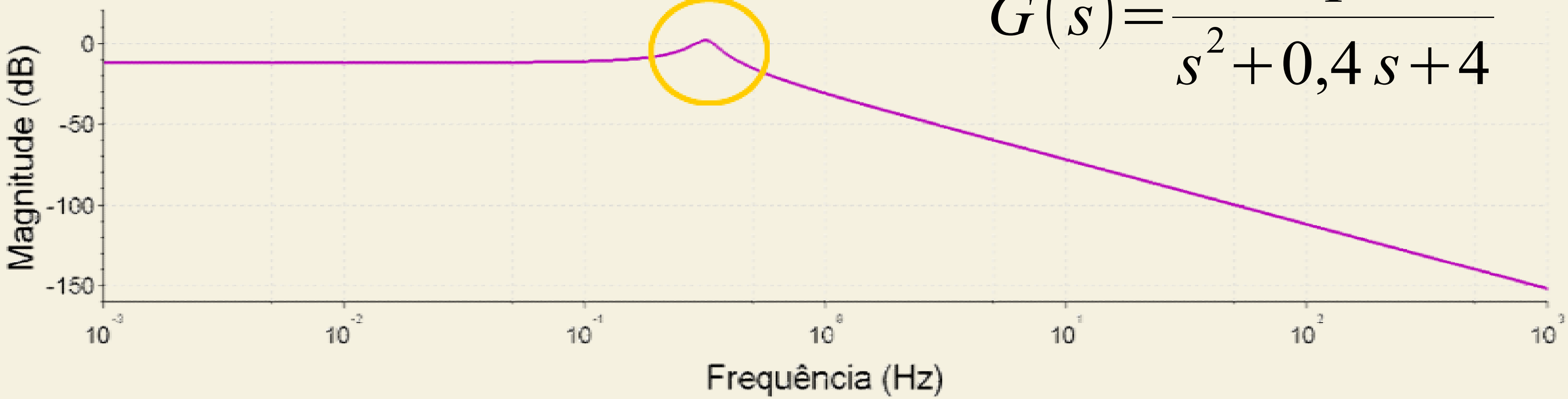
Diagramas de Bode

- Sinal rápido → frequência elevada.
- Quanto menor a frequência de corte, mais lento é o sinal.

- Picos de ressonância:
  - Polos reais → ausência de pico;
  - Quanto maior o amortecimento, menor é o pico;
  - Em sistemas de ordem elevada, os picos indicam polos pouco amortecidos.

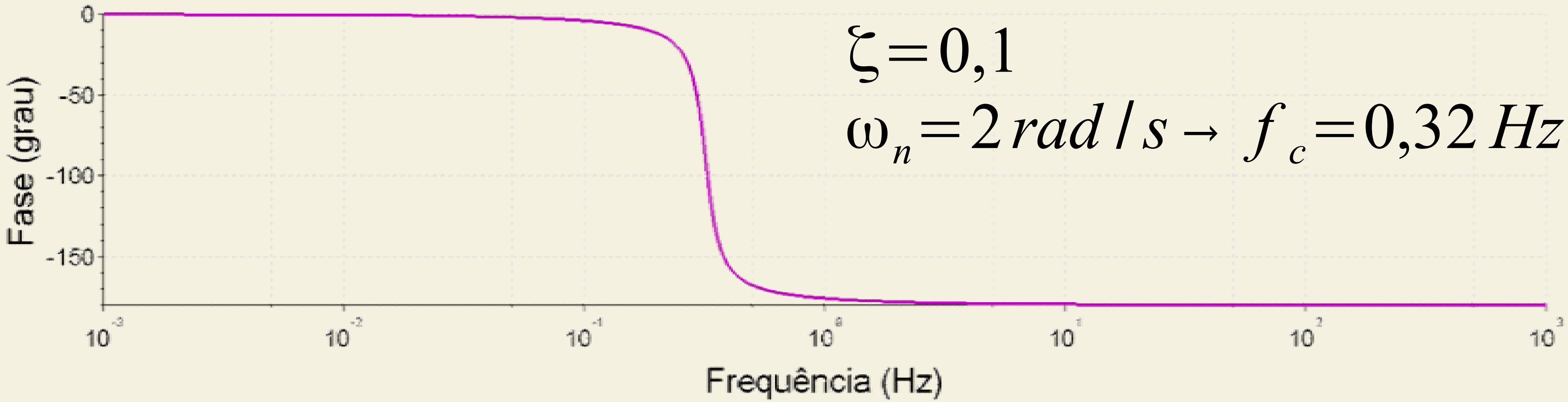
Diagramas de Bode

$$G(s)=\frac{1}{s^2+0{,}4\,s+4}$$



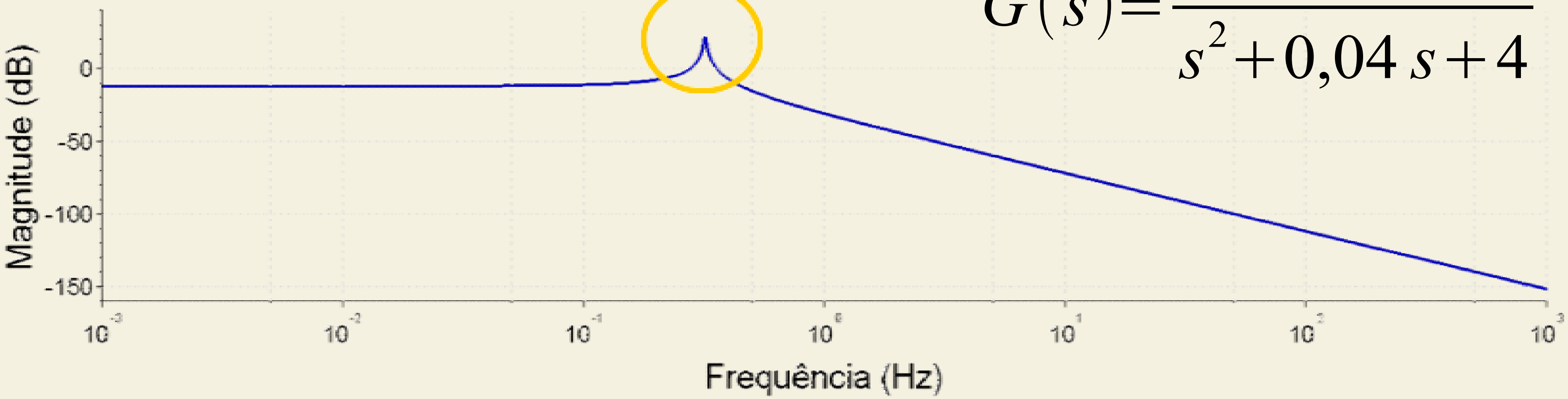
$$\zeta=0{,}1$$

$$\omega_n=2\,rad/s \rightarrow f_c=0{,}32\,Hz$$



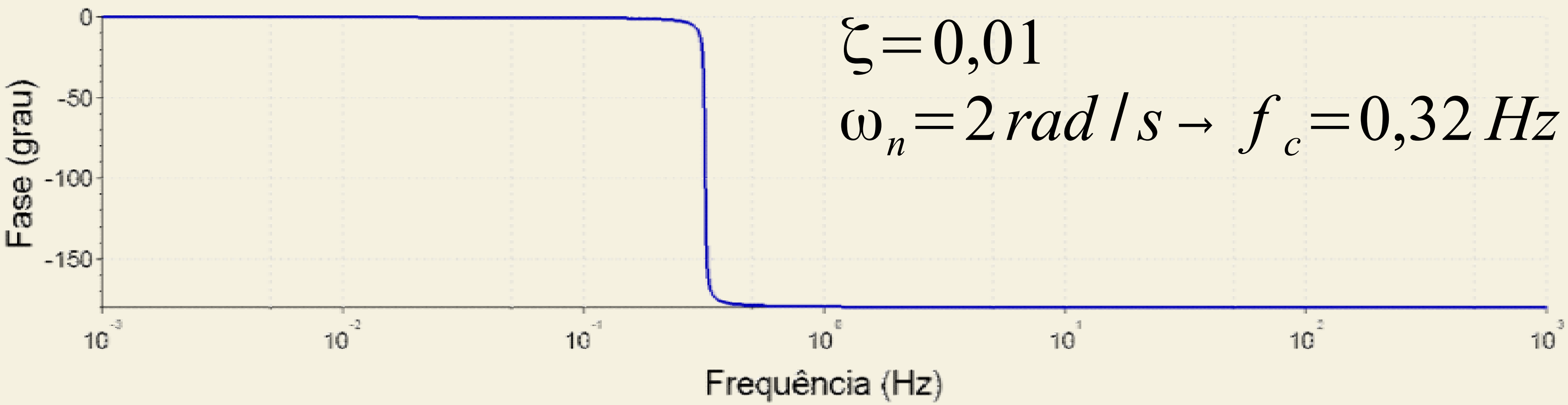
Diagramas de Bode

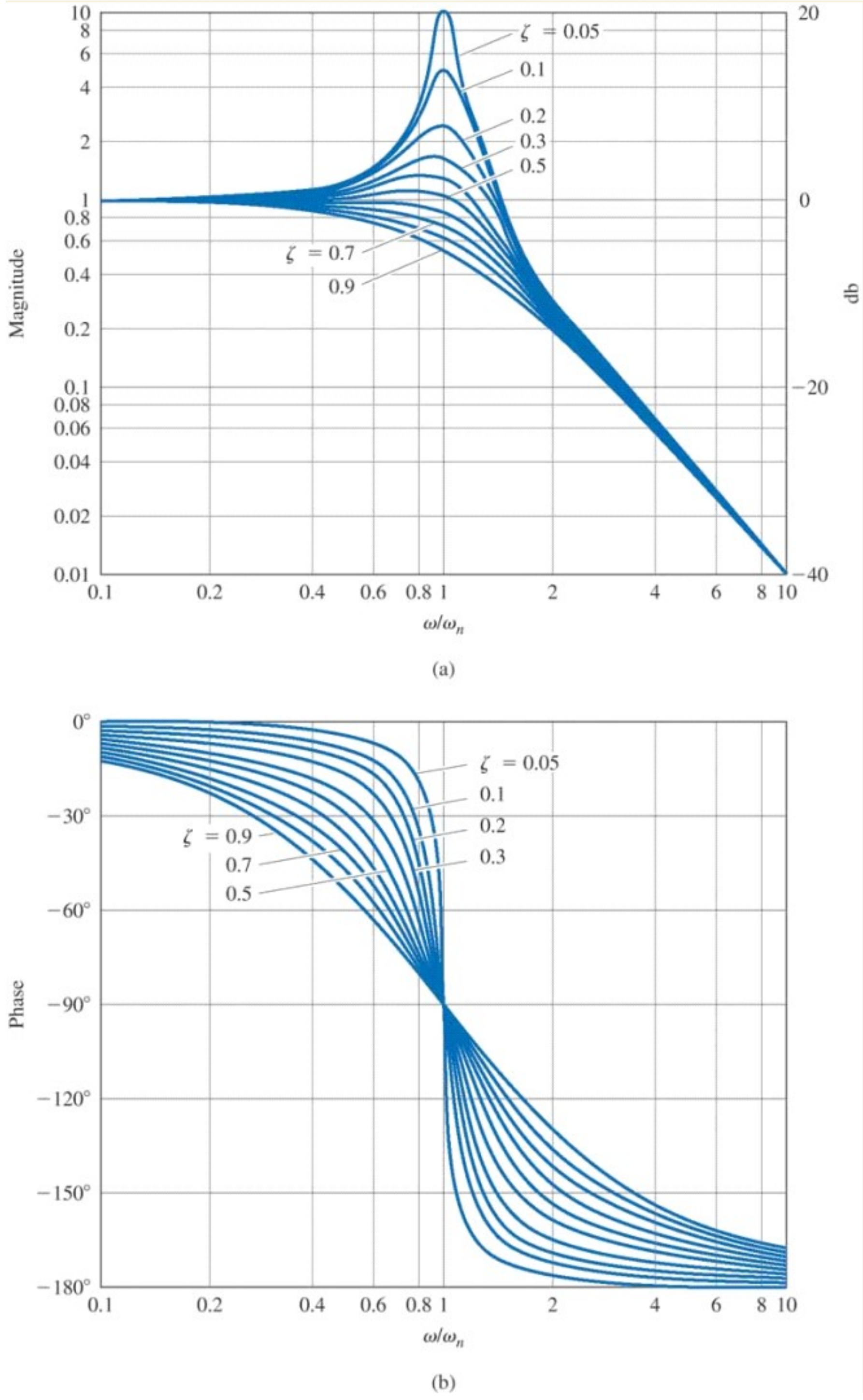
$$G(s)=\frac{1}{s^2+0{,}04\,s+4}$$



$$\zeta=0{,}01$$

$$\omega_n=2\,rad/s\rightarrow f_c=0{,}32\,Hz$$





$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$

Para $\zeta = 0,7$, $\omega_c = \omega_n$

frequência de corte

Figure 6.3 (a) Magnitude; (b) phase of Eq. (6.9)

Diagramas de Bode

Largura de banda: corresponde à frequência máxima à qual a saída de um sistema rastreia de maneira satisfatória uma senoide de entrada.

Diagramas de Bode

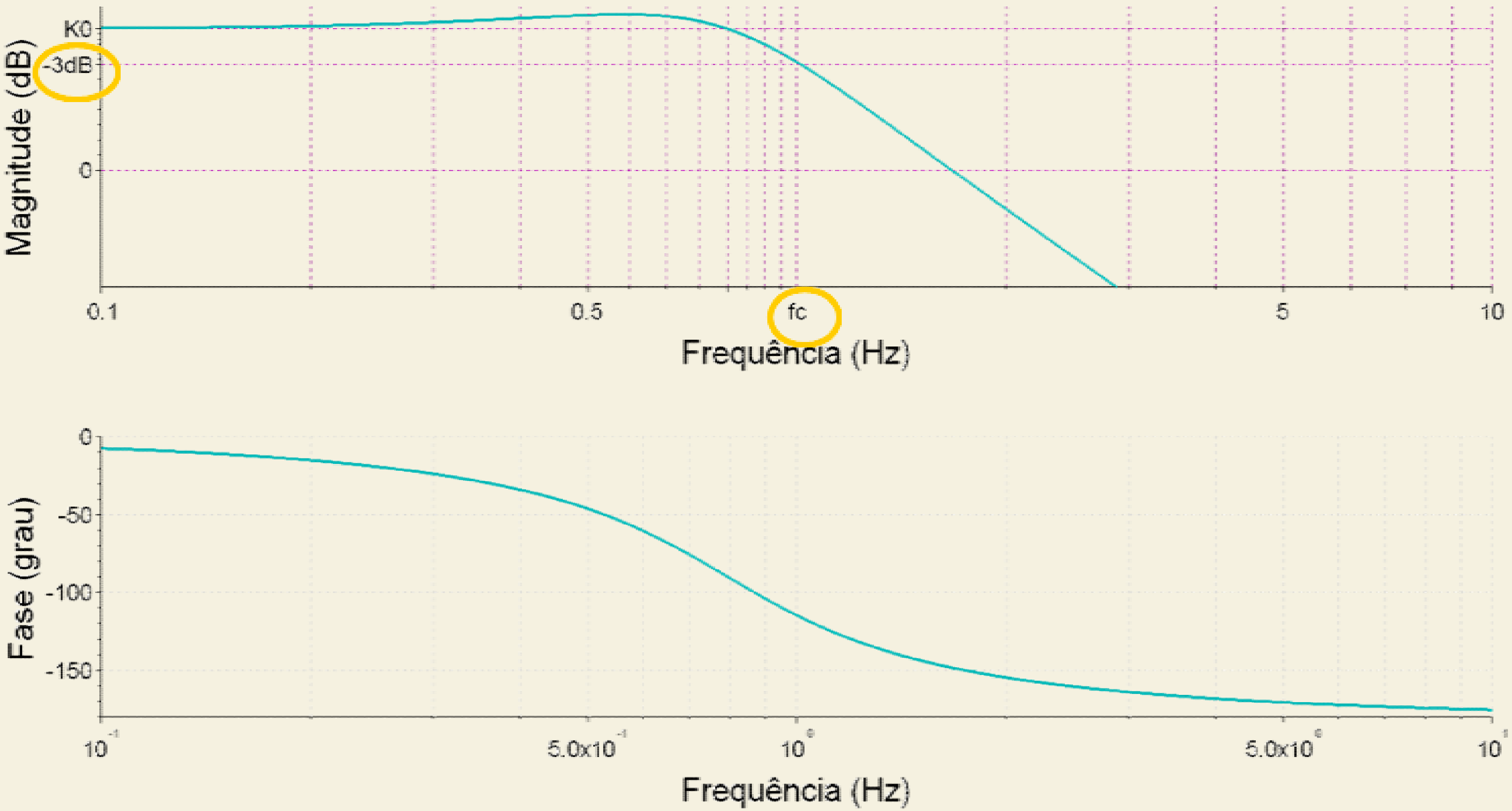
Ruído: componentes em altas frequências

Sistema com resposta rápida →
banda passante larga → filtra pouco o ruído.

Sistema com resposta lenta →
banda passante estreita → filtra melhor o ruído.

Diagramas de Bode

$$G(s) = \frac{100}{\left(s^2 + 5s + 25\right)}$$



Diagramas de Bode

$$G(s)=\frac{100}{\left(s^2+5s+25\right)}$$