CAP. 5. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

5.1 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO (P.V.C.)

Ⓐ O P.V.C. HOMOGÊNEO: $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases}$, onde $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ e λ e L SÃO CONSTANTES,

TEM SOLUÇÕES DIFERENTES DA TRIVIAL SE, E SOMENTE SE, $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, ONDE n É QUALQUER INTEIRO POSITIVO ($n = 1, 2, \ldots, \infty$).

PARA CADA n, AS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS SÃO: $y(x) = c \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{L} \cdot x\right)$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

Ⓑ O P.V.C. HOMOGÊNEO: $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y'(L) = 0 \end{cases}$, onde $y' = \dfrac{dy}{dx}$ e λ e L SÃO CONSTANTES,

TEM SOLUÇÕES DIFERENTES DA TRIVIAL SE, E SOMENTE SE, $\lambda = 0$ OU $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, ONDE n É QUALQUER INTEIRO POSITIVO ($n = 1, 2, \ldots, \infty$).

PARA $\lambda = 0$, O P.V.C. TEM AS SEGUINTES SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS: $y(x) = c \cdot 1$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA.

PARA CADA n, AS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS SÃO: $y(x) = c \cdot \cos\left(\dfrac{n\pi}{L} \cdot x\right)$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA.

5.2. SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

DEFINIÇÕES: $u \Rightarrow$ É A VARIÁVEL DEPENDENTE

z_1 e $z_2 \Rightarrow$ SÃO AS 2 VARIÁVEIS INDEPENDENTES

$u(z_1, z_2)$; $u_{z_1} = \dfrac{\partial u}{\partial z_1}$; $u_{z_2} = \dfrac{\partial u}{\partial z_2}$; $u_{z_1 z_1} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}$

$Z_1(z_1)$; $Z_1' = \dfrac{dZ_1}{dz_1}$; $Z_1'' = \dfrac{d^2 Z_1}{dz_1^2}$

$Z_2(z_2)$; $Z_2' = \dfrac{dZ_2}{dz_2}$; $Z_2'' = \dfrac{d^2 Z_2}{dz_2^2}$

z_1 e $z_2 \Rightarrow$ PODEM REPRESENTAR A VARIÁVEL TEMPO (t) OU AS VARIÁVEIS ESPAÇO (x, y)

5.2. SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

APLICAÇÃO: ENCONTRAR A SOLUÇÃO ÚNICA $[u(z_1,z_2)]$ DO PROBLEMA COMPOSTO POR:

- 1 EQ. DIF. PARCIAL, LINEAR, DE 2ª ORDEM E ENVOLVENDO 2 VARIÁVEIS INDEPENDENTES (EX: EQ. CONDUÇÃO CALOR, EQ. DA ONDA E EQ. LAPLACE);
- UM CONJUNTO DE CONDIÇÕES INICIAIS (C.I) E CONDIÇÕES DE CONTORNO (C.C) EM NÚMERO SUFICIENTE P/ QUE O PROBLEMA TENHA SOLUÇÃO ÚNICA, ONDE APENAS 1 CONDIÇÃO É NÃO-HOMOGÊNEA. (AS CONDIÇÕES PODEM SER DEFINIDAS EM UM PONTO OU EM UMA RETA)

PROCEDIMENTO: DIVIDIR EM 2 ETAPAS: $[\text{ASSUMIR } u(z_1,z_2) = Z_1(z_1)\cdot Z_2(z_2)]$

(I) DESCONSIDERAR A CONDIÇÃO (C.I ou C.C) NÃO HOMOGÊNEA E OBTER A SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA SIMPLIFICADO.

(II) IMPOR A CONDIÇÃO (C.I. ou C.C) NÃO HOMOGÊNEA NA SOLUÇÃO GERAL OBTIDA EM (I), P/ OBTER O VALOR ÚNICO DAS CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

INFORMAÇÕES ADICIONAIS:

→ DESCONSIDERAR A SOLUÇÃO TRIVIAL $u(z_1,z_2)=0$.

→ SOLUÇÃO GERAL A SER OBTIDA NA ETAPA (I) É DADA PELA COMBINAÇÃO LINEAR DE ∞ SOLUÇÕES l.i., ONDE CADA SOLUÇÃO l.i. É OBTIDA PARA UM VALOR DIFERENTE DE λ (ONDE λ ESTÁ ASSOCIADO AS SOLUÇÕES NÃO-TRIVIAIS DO P.V.C. HOMOGÊNEO).

→ A SÉRIE DE FOURIER EM SENOS DE $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ TEM COEFICIENTES a_n DADOS POR: $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$, $n=1,2,\dots,\infty$.

→ A SÉRIE DE FOURIER EM COSSENOS DE $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ TEM COEFICIENTES a_n DADOS POR: $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$, $n=0,1,2,\dots,\infty$.

→ SEJAM $y_1(x)=\exp(r_1x)$ e $y_2(x)=\exp(-r_1x)$ DUAS SOLUÇÕES l.i. DE UMA EQ. DIF. ORDINÁRIA, HOMOGÊNEA, LINEAR A COEF. CONSTANTES. PODE SER CONVENIENTE SUBSTITUIR ESSAS SOLUÇÕES POR: $y_1(x)=\cosh(r_1x)$ e $y_2(x)=\operatorname{senh}(r_1x)$, ONDE $\cosh(r_1x) = \frac{\exp(r_1x)+\exp(-r_1x)}{2}$ e $\operatorname{senh}(r_1x) = \frac{\exp(r_1x)-\exp(-r_1x)}{2}$