Série de Volterra expandida na base de Laguerre de ordem fracionária

Vithor Nypwipwy[1], César A. Dartora[2] Eduardo G. de Lima[2]
[1] UEM, Maputo, Moçambique
[2] UFPR, Curitiba, Brasil
E-mail: nypwipwy@gmail.com

Resumo— *Neste artigo, a modelagem de um amplificador de potência de radiofrequência é realizada usando a série de Volterra expandida através da função de base ortogonal de Laguerre de ordem fracionária. No modelo, são selecionados o número de funções de base ortogonal, os polos e a ordem fracionária da função. O modelo apresenta uma tendência para melhoria da exatidão, de -32,7 dB para -33,1 dB em termos de NMSE.*

I. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, modelos comportamentais de amplificadores de potência (PAs) de radiofrequência (RF) baseados em séries de Volterra têm sido utilizados, no entanto, a alta complexidade computacional e o elevado número de coeficientes do modelo tornam-os impraticáveis em alguns casos reais, sobretudo quando se pretende modelar PAs com fortes não linearidades ou com grandes efeitos de memória [1] [2] [3]. Para reduzir o número de coeficientes e obter modelos com convergência mais rápida que o modelo de Volterra [4] [5], modelos baseados em funções de base ortogonal (OBFs) têm sido desenvolvidos [6] [7]. Os coeficientes do modelo de Volterra são expandidos usando uma série infinita de OBFs, tais como as funções de base: de Laguerre, de Kautz e de Takenaka-Malmquist. A construção da função de base é feita usando polos fixos: único polo real para o caso da função de Laguerre, dois polos complexos conjugados para a função de Kautz enquanto que a função de Takenaka-Malmquist estende as duas definições anteriores a qualquer número de polos reais múltiplos ou complexos conjugados múltiplos. Esses 3 modelos têm as mesmas propriedades gerais que os modelos de Volterra, mas com menos parâmetros se os polos estiverem próximos dos polos dominantes do sistema real [4] [8] [9] e são independentes do comprimento da memória.

O uso de modelos clássicos baseados na diferenciação de ordem inteira é inadequado para modelagem de sistemas fracionários, o que leva ao desenvolvimento de modelos usando diferenciação fracionária. Funções de base de Laguerre devem permitir que suas ordens de diferenciação sejam reais [10] [11], contudo, as funções de Laguerre são divergentes quando sua ordem de diferenciação não é inteira [12].

II. SÉRIE DE VOLTERRA DE ORDEM FRACIONÁRIA

A. *Série de Volterra e função de base ortogonal de Laguerre de ordem inteira*

A representação de uma série de Volterra em tempo discreto para envoltórias de valores complexos $\tilde{x}(n)$ na entrada e $\tilde{y}(n)$ na saída do PA, de ordem de truncamento polinomial $2P-1=P_0$ é:

$$\tilde{y}(n)=\sum_{p=1}^{P}\sum_{\tau_1=0}^{M}\sum_{\tau_2=\tau_1}^{M}\cdots\sum_{\tau_p=\tau_{p-1}}^{M}\sum_{\tau_{p+1}=0}^{M}\sum_{\tau_{p+2}=\tau_{p+1}}^{M}\cdots \sum_{\tau_{2p-1}=\tau_{2p-2}}^{M}\tilde{h}_{2p-1(\tau_1,\cdots\tau_{2p-1})}\prod_{i=1}^{p}\tilde{x}(n-\tau_1)\times \times\prod_{i=p+1}^{2p-1}\tilde{x}^*(n-\tau_1) \quad (1)$$

onde M é o comprimento da memória; $\tilde{h}_{2p-1(\tau_1,\cdots\tau_{2p-1})}$ são os coeficientes complexos de Volterra. A expansão dos coeficientes da série de Volterra $\tilde{h}_{2p-1(\tau_1,\cdots\tau_{2p-1})}$ através de uma série infinita da função de base ortogonal de Laguerre [4] [13] truncada em N_{2p-1} é dada por:

$$\tilde{h}_{2p-1(\tau_1,\cdots\tau_{2p-1})}\approx\sum_{k_1=0}^{N_{2p-1}}\cdots\sum_{k_{2p-1}=0}^{N_{2p-1}}c_{k_1,\cdots k_{2p-1}}\times \times\prod_{i=1}^{2p-1}\varphi_{2p-1,k_i}(\tau_i) \quad (2)$$

Assim, o modelo resultante, denominado série de Volterra expandida em base de Laguerre (LV) é:

$$\tilde{y}_{LV}(n)=\sum_{p=1}^{P}\sum_{k=0}^{N_{2p-1}}\sum_{k_2=k_1}^{N_{2p-1}}\cdots\sum_{k_p=k_{p-1}}^{N_{2p-1}}\sum_{k_{p+1}=0}^{N_{2p-1}}\sum_{k_{p+2}=k_{p+1}}^{N_{2p-1}}\cdots \sum_{k_{2p-1}=k_{2p-2}}^{N_{2p-1}}c_{k_1,\cdots k_{2p-1}}\prod_{i=1}^{p}\tilde{l}_{2p-1,k_i}(n)\prod_{i=p+1}^{2p-1}\tilde{l}^*_{2p-1,k_i}(n) \quad (3)$$

onde $c_{k_1,\cdots k_{2p-1}}$ são os coeficientes expandidos de Volterra, $\tilde{l}_{2p-1,k_i}$ é a saída complexa do modelo de Laguerre $\varphi_k(z,\beta)$ de $L = N_{2p-1}$, $p' = 2p-1$ dado por:

$$\tilde{l}_{p',k_i}(n,\beta) = \sum_{\tau_i=0}^{L-1} \varphi_{p',k_i}(\tau_i,\beta)\tilde{x}(n-\tau_i) \\ = \varphi_k(z,\beta)\tilde{x}(n) \tag{4}$$

A função de Laguerre de tempo discreto $\psi_k(n) = \sqrt{1-\beta^2}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}\binom{n+k-j}{k}\beta^{n+k+2j}$ definida pela sua transformada Z , dada por [9] é:

$$\varphi_k(z,\beta) = \frac{\sqrt{1-|\beta|^2}}{1-\beta z^{-1}}\left\{\frac{-\beta^* + z^{-1}}{1-\beta z^{-1}}\right\}^k \\ k = 0,1,2,\cdots \tag{5}$$

onde β é o polo real da função de base de Laguerre existente em $|\beta| < 1$.

B. *Modelo de ordem fracionária de Laguerre-Volterra*

Um modelo fracionário é geralmente baseado em equações diferenciais fracionárias como:

$$y(t) + a_1 D^{\gamma_1} y(t) + \cdots + a_N D^{\gamma_N} y(t) = \\ = b_0 D^{\delta_0} x(t) + b_1 D^{\delta_1} x(t) + \cdots + b_M D^{\delta_M} x(t) \tag{6}$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são a entrada e a saída do sistema, $(a_j, b_j) \in \mathbb{R}^2, D = d/dt$ é o operador diferencial e $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_N$ e $0 \le \delta_0 < \delta_1 < \cdots < \delta_M$ são as ordens de diferenciação que podem ser números positivos não inteiros. A derivada fracionária D^α de uma função contínua no tempo $f(t)$, no sentido de Grünwald-Letnikov [14], é definida como sendo:

$$D^\alpha f(Kh) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{K}(-1)^k\binom{\alpha}{k} f(t-kh) \tag{7}$$

onde $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}$ é o coeficiente do binômio. Quando a função $f(t)$ é discretizada a um período de amostragem h, a D^α da função é:

$$D^\alpha f(Kh) = h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{K}(-1)^k\binom{\alpha}{k} f\big((K-k)h\big) + \Theta(h) \tag{8}$$

A transformada de Laplace de $D^\alpha x(t)$ em t = 0 (isto é, todas as derivadas de x (t) são nulas quando t <0) [15] é dada por:

$$\mathcal{L}\{D^\alpha x(t)\} = s^\alpha X(s) \tag{9}$$

cujo resultado é coerente com o caso clássico quando α é um número inteiro. A estrutura do modelo clássico da série de Volterra de tempo contínuo, escrita como a soma infinita de k-ésima ordem é:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) = y_1(t) + y_2(t) + \cdots + y_k(t)\cdots \tag{10}$$

Escrevendo como a generalização do produto de convolução de k-ésima ordem tem-se:

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h_{k(\tau_1,\cdots\tau_k)} \prod_{i=1}^{k} x(t-\tau_i)d_{\tau_i} \tag{11}$$

A transformada de Laplace de $H_k(s_1,\cdots,s_k)$ é definida por [16]:

$$H_k(s_1,\cdots,s_k) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} h_k(\tau_1,\cdots,\tau_k) e^{-s_1\tau_1,\cdots,-s_k\tau_k}\, d_{\tau_1}\cdots d_{\tau_k} \tag{12}$$

Portanto, a transformada de Laplace de $y_k(t)$ é:

$$Y_k(s_1,\cdots,s_k) = H_k(s_1,\cdots,s_k)X(s_1),\cdots,X(s_k) = \\ = Y_1(s_1) + Y_2(s_1,s_2) + \cdots + Y_k(s_1,\cdots,s_k) + \cdots \tag{13}$$

onde

$$\begin{cases} Y_1(s_1) = H_1(s_1)X(s_1) \\ Y_2(s_1,s_2) = H_2(s_1,s_2)X(s_1)X(s_2) \\ \vdots \\ Y_k(s_1,\cdots,s_k) = H_k(s_1,\cdots,s_k)X(s_1)X(s_2)\cdots X(s_k) \end{cases}$$

Como dito anteriormente, as funções de Laguerre são divergentes quando sua ordem de diferenciação α não é inteira [12]:

$$\int_0^\infty (l_\alpha(t))^2\, dt = \infty, \forall\alpha\epsilon\mathbb{R}^{+*}\backslash\mathbb{N} \tag{14}$$

A solução para contornar essa divergência passa por extrapolar as funções de Laguerre para ordens de diferenciação fracionárias que as mantêm convergentes quando as ordens de diferenciação α são não inteiras [17]. Isso implica o desenvolvimento de uma nova base ortogonal fracionária $L_2[0,\infty[$ usando o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt [18] [19]. Essa nova base é limitada ao uso de um único polo por cada ordem de truncamento polinomial $2P-1 = P_0$ de Laguerre-Volterra. Desse modo, uma expressão para os coeficientes $h_{k(\tau_1,\cdots\tau_k)}$ é primeiramente escolhida e, em seguida, todos os coeficientes são estimados. Cada coeficiente $h_{k(\tau_1,\cdots\tau_k)}$ poderá ser decomposto em conjunto de funções geradoras ortogonais fracionárias $F_k(s)$, cuja transformada inversa de Laplace $f_k(t)$ forma base em $L_2[0,\infty[$ [19] [20] [21] [22]. Para o caso da primeira ordem da série de Volterra $y_1(t)\epsilon L_2[0,\infty[$, a aproximação de $y_1(t)$ usando a função $f_k(t)$ é:

$$y_1(t) \approx \sum_{k=1}^{L} b_k f_k(t) \tag{15}$$

onde $b_k, k = 1,2,\cdots,L$, são os coeficientes associados a decomposição de $y_1(t)$ em $f_k(t)$. Nesse caso, a base fracionária de Laguerre $f_k(t)$ de ordem s^α é caracterizada pela presença de um único polo em $(-\beta)$ [19] com a transformada de Laplace da função geradora ortogonal fracionária $F_k(s)$ dada por:

$$F_k(s) = \frac{1}{s^\alpha + \beta_k} \tag{16}$$

A transformada inversa de Laplace da função de base fracionária de Laguerre $f_k(t)$ de ordem s^α e polo $(-\beta)$ não é analiticamente derivável [22], mas a sua expansão em série pode ser facilmente obtida:

$$F(s) = \frac{1}{s^\alpha + \beta} = \frac{1}{s^\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^j}{s^{\alpha k}} \tag{17}$$

cuja resposta ao impulso pode ser determinada através da transformada inversa de Laplace da função geradora ortogonal fracionária $F_k(s)$ expandida em uma série, resultando em uma função numérica de Mittag-Leffler:

$$f_k(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^j}{s^{\alpha k}}\right\} = \sigma_k(t,\alpha,\beta)$$
$$\sigma_{p'}(t,\alpha,\beta) = t^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(-\beta_{p'}t^\alpha\right)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}\Bigg|_{t=0^+} \tag{18}$$

A nova saída complexa do modelo fracionário de Laguerre $\sigma_k(nT,\alpha,\beta)$ de ordem $L = N_{p'}$, é dado por:

$$\tilde{f}_{p',k_i}(nT,\alpha,\beta) = \sum_{\tau_i=0}^{L-1}\sigma_{p',k_i}(\tau_i,\alpha,\beta)\otimes\tilde{x}(nT-\tau_i) \tag{19}$$

Então, o modelo fracionário de Laguerre-Volterra (αLV) é:

$$\tilde{y}_{LV_f}(n) = \sum_{p=1}^{P}\sum_{k=0}^{N_{p'}}\sum_{k_2=k_1}^{N_{p'}}\cdots\sum_{k_p=k_{p-1}}^{N_{p'}}\sum_{k_{p+1}=0}^{N_{p'}}\sum_{k_{p+2}=k_{p+1}}^{N_{p'}}\cdots \sum_{k_{p'}=k_{p'-1}}^{N_{p'}}\varsigma_{k_1,\cdots k_{p'}}\prod_{i=1}^{p}\tilde{f}_{p',k_i}(n)\prod_{i=p+1}^{2p-1}\tilde{f}^*_{p',k_i}(n) \tag{20}$$

Os sinais $\tilde{f}_{p',k_i}(n,\alpha,\beta)$ e $\tilde{y}_{LV_f}(n)$ podem ser obtidos através de equações de espaço de estado [10] para $F_k(s)$ estável em $0<\alpha<2$ [20] e $-1<\beta<1$:

$$D^\alpha\tilde{f}_{p'}(n+1) = \left(A_{p'}+\Phi_{p'}\right)\tilde{f}_{p'}(n)\Psi_{p'} + B_{p'}\tilde{x}(n) \tag{21}$$
$$\tilde{y}_{LV_f}(n) = \mathcal{H}\left(\tilde{f}_{p'}(n)\right) \tag{22}$$

onde $\tilde{f}_{p'}(n) = \left[\tilde{f}_{p',0}(n) \quad \tilde{f}_{p',1}(n) \quad \cdots \quad \tilde{f}_{p',Np'}(n)\right]$. A matriz $A_{p'}\in\mathbb{N}^{\left(N_{p'}+1\times N_{p'}+1\right)}$ e o vetor $B_{p'}\in\mathbb{N}^{\left(N_{p'}+1\times 1\right)}$ são completamente definidos com base nos polos $\beta_{p'} = a$ e o parâmetro $\rho = 1-a^2$:

$$B_{p'} = \sqrt{\rho}\begin{bmatrix}1 & -a & a^2 & \cdots & (-a)^{N_{p'}}\end{bmatrix}^T \tag{23}$$

$$A_{p'} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \rho & a & 0 & \cdots & 0\\ -a\rho & \rho & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (-a)^{N_{p'}}\rho & (-a)^{N_{p'}-1}\rho & (-a)^{N_{p'}-2}\rho & \cdots & a\end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\Psi_{p',k_i} = diag[\sigma_{p',1}(\tau_i,\alpha,\beta),\cdots,\sigma_{p',k_i}(\tau_i,\alpha,\beta)] \tag{25}$$

$$\Phi_{p',k} = diag[\Theta_{p',1}(\alpha),\cdots,\Theta_{p',k}(\alpha)] \tag{26}$$

$$\Theta_{p',k} = \binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1, & k=0\\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, & k>0\end{cases} \tag{27}$$

III. EXTRAÇÃO DO MODELO

Três questões importantes devem ser consideradas: a seleção da ordem fracionária α, a seleção dos polos β e a escolha do número de funções de base (comprimento) de Laguerre L. Em relação ao número de funções, a seleção de L leva o erro de truncamento a ser igual ou tender a zero e aumenta a exatidão do modelo (aumentando o número de funções de base ortogonal). A escolha da ordem fracionária α e dos polos da base ortogonal β não são críticas, uma vez que, para uma mesma ordem fracionária α, a base é completa para todos os polos β. A ordem fracionária e os polos são selecionados usando um otimizador, oque permite os polos sejam escolhidos próximos dos polos dominantes do sistema. Polos distantes dos polos dominantes presentam o valor da exatidão longe do valor esperado. Neste trabalho, tanto a ordem fracionária α quanto os polos β são todos otimizados com base na minimização da função:

$$J(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{K}\left|\tilde{y}(n) - \theta(n,\alpha,\beta)^T\hat{\theta}(\alpha,\beta)\right|^2 \tag{28}$$

onde $\theta(n,\alpha,\beta)$ contém todos os produtos $\tilde{f}_{p',k_i}(n)\tilde{f}_{p',k_i}(n)\cdots\tilde{f}^*_{p',k_i}(n)$ e $\hat{\theta}(\alpha,\beta)$ contém todos os coeficientes expandidos $\varsigma_{k_1,\cdots k_{p'}}$ estimados pelo método dos mínimos quadrados:

$$\hat{\theta}(\alpha,\beta) = \left(X(\alpha,\beta)^H X(\alpha,\beta)\right)^{-1}X(\alpha,\beta)^H\tilde{y} \tag{29}$$

Este é um problema não linear com restrição de otimização nas variáveis: $-1<\beta<1$ para $0<\alpha<1$ ou $1<\alpha<2$:

$$\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right) = \arg\min_{\alpha,\beta} J(\alpha,\beta), \tag{30}$$

IV. VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DO MODELO

O αLV é aplicado para modelar um PA de RF, excitado por um sinal de portadora de 900 MHz modulado por um sinal 3GPP WCDMA que possui uma largura de banda de 3,84 MHz. As medições de saída e entrada são normalizadas e formam um conjunto de 5420 medições, sendo 3320 amostras para estimação da modelagem e 2100 amostras para validação da modelagem. A ordem fracionária e os polos foram selecionados para $0<\alpha<1$ e $-1<\beta<1$. Três cenários de escolha da ordem e os polos foram realizados: 1º cenário αLV (*): escolha da ordem e dos polos através do otimizador; 2º cenário αLV(**): escolha da ordem (fixa) com base na literatura e polos otimizados, 3º cenário αLV(***): polos escolhidos no modelo LV e usados fixos e ordem otimizada. Como o modelo αLV não é muito eficaz para $1<\alpha<2$, os resultados não foram apresentados uma vês que precisam de mais estudo. Os resultados são relatados em termos dos dados de estimação e de validação, comparados sob a mesma complexidade computacional. O truncamento da ordem polinomial de Volterra é $P_0 = 3$ e o número de funções de base ortogonal de Laguerre é $L_1 = L_3 = 1$.

Foi usado o simulador matemático MATLAB e a precisão do modelo é avaliada com base nos sinais de erro que contém a diferença entre as saídas desejadas e as estimadas. Esses sinais de erro são calculados usando a métrica do erro quadrático médio normalizado (NMSE).

O desempenho dos modelos em termos de NMSE está na Tabela 1.

TABELA 1. DESEMPENHO DOS MODELOS

	LV	αLV (*)	αLV (**)	αLV (***)
Polos	-0,0908 0,4775	-0,0712 0,1605	-0,1138 0,5159	-0.0908 0.4775
Fração	1	0,4125	0,4950	0.5027
$NMSE_{est}$(dB)	-32,7	-33,1	-32,7	-32,4
$NMSE_{val}$(dB)	-33,1	-33,4	-33,2	-32,9

V. CONCLUSÃO

Este artigo apresenta a modelagem de um PA RF realizada com base na série de Volterra expandida através da função ortogonal de Laguerre de ordem fracionária, destacando o uso de realização de espaço de estado para a representação do modelo. Esta nova abordagem generaliza os modelos clássicos de Volterra e o de base ortogonal de Laguerre-Volterra de ordem inteira. Neste modelo, para além da escolha do número de funções de base, é proposta uma nova abordagem para selecionar simultaneamente os polos e a ordem fracionária da função da base do modelo, usando uma otimização não-linear com restrição e literatura. Dos três cenários, o 1º apresenta melhores resultados em termos de medições feitas e é possível observar a tendência do modelo para reduzir o erro (não significativamente), de -32,7 dB para -33,1 dB.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq, ao GICS, a UEM-Moz e ao ISDB-Moz.

REFERÊNCIAS

[1] P. M. Lavrador, J. C. Pedro e N. B. Carvalho, “A New Volterra Series Based Orthogonal Behavioral Model for Power Amplifiers,” *Microwave Conference Proceedings 2005. APMC 2005 Asia-Pacific Microwave Conference Proceedings,* vol. 1, p. 4, 4-7 December 200.

[2] L. Schuartz e E. G. d. Lima, “Comparison among algorithms for the identification of adaptive memory polynomial predistorter models,” *30º Simpósio Sul de Microeletrônica,* pp. 1-4, 5-8 Maio 2015.

[3] A. Zhu, M. Wren e T. J. Brazil, “An Efficient Volterra-Based Behavioral Model for Wideband RF Power Amplifiers,” *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest,* vol. 2, pp. 787-790, 1 June 2003.

[4] G. H. C. Oliveira, W. C. Amaral e K. Latawiec, “CRHPC using Volterra Models and Orthonormal Basis Functions: An Application to CSTR Plants,” *Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications, 2003. CCA 2003,* pp. 718-723, 25-25 June 2003.

[5] J. C. Pedro and S. A. Maas, "A Comparative Overview of Microwave and Wireless Power-Amplifier Behavioral Modeling Approaches," *IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES,* vol. 53, no. 4, pp. 1150-1163,, 4 APRIL 2005.

[6] R. J. Campello, G. Favier e W. C. d. Amaral, “Optimal expansions of discrete-time Volterra models using Laguerre functions,” *Automatica,* vol. 40, p. 815 – 822, 2004.

[7] R. Hacioglu e G. A. Williamson, “Reduced complexity Volterra models for nonlinear system identification,” *EURASIP Journal on Applied Signal Processing,* vol. 2001, pp. 257-65, April 2001.

[8] R. Schumacher, E. G. Lima e G. H. C. Oliveira, “RF Power Amplifier Behavioral Modeling Based on Takenaka–Malmquist–Volterra Series,” *Circuits Syst Signal Process (2016),* pp. 2298-2316, 25 August 2015.

[9] A. Zhu e T. J. Brazil, “RF Power Amplifier Behavioral Modeling Using Volterra Expansion with Laguerre Functions,” *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest,* pp. 963-966, 17 June 2005.

[10] J. C. Trigeassou, T. Poinot, J. Lin, A. Oustaloup e F. Levron, “Modeling and identification of a non integer order system,” *1999 European Control Conference (ECC),* pp. 2453-2458, 3 September 1999.

[11] A. M. A. El-Sayed, “On the generalized Laguerre polynomials of arbitrary (fractional) orders and quantum mechanics,” *Journal of Physics A: Mathematical and General 32 8647,* p. 8647–8654, 16 June 1999.

[12] P. C. Abbott, “Generalized Laguerre polynomials and quantum mechanics,” *Journal of Physics A: Mathematical and General 33 (2000),* p. 7659–7660, 22 March 2000.

[13] Q. Zheng e E. Zafiriou, “Nonlinear System Identification for Control Using Volterra-Laguerre Expansion,” *Proceedings of 1995 American Control Conference - ACC'95,* pp. 21 95-21 99, 21-23 June 1995.

[14] R. F. Camargo e E. C. d. Oliveira, Cálculo fracionário, 1ª ed., Sao Paulo: Livraria da Física LF, 2015, p. 70.

[15] K. Oldham e J. Spanier, The fractionnal calculus, New-York and London: Academic Press, 1974.

[16] L. A. Crum e J. A. Heinen, “Simultaneous Reduction and Expansion of Multidimensional Laplace Transform Kernels,” *SIAM Journal on Applied Mathematics,* pp. 753-771, 4 June 1974.

[17] M. Aoun, R. Malti, F. Levron e A. Oustaloup, “Orthonormal basis functions for modeling continuous-time fractional systems,” *ELSEVIER - IFAC Proceedings Volumes,* vol. 36, pp. 1333-1338, 16 Stptember 2003.

[18] R. Multi, M. Aoun e A. Oustaloup, “Synthesis of fractional Kautz-like basis with two periodically repeating complex conjugate modes,” *First International Symposium on Control, Communications and Signal Processing,* pp. 835-839, 21-24 March 2004.

[19] M. Aoun, R. Maltia, F. Levronc e A. Oustaloupa, “Synthesis of fractional laguerre basis for system approximation,” *ELSEVIER - Automatica,* vol. 43, pp. 1640-1648, 9 September 2007.

[20] R. Malti, M. Aoun, F. Levron e A. Oustaloup, Unified construction of fractional generalized orthogonal bases, vol. 1, Germany, Germany: Fractional Differentiation and its Applications. Mathematicaltools, geometrical and physical aspects, 2005, pp. 87-102.

[21] H. Akçay, “Synthesis of Complete Orthonormal Fractional Basis Functions With Prescribed Poles,” *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING,* pp. 4716-4728, 10 OCTOBER 2008.

[22] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna e I. Petráš, FRACTIONAL ORDER SYSTEMS: Modeling and Control Applications, vol. 72, NEW JERSEY, LONDON, SINGAPORE, BEIJING, SHANGHAI, HONG KONG, TAI PEI, CHENNAI: World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, 2010, p. 10