

Análise de desempenho da implementação de um banco de filtros digitais para compensação de erros de relógio de *TIADCs*



Anderson de Lima Luiz¹, Luis Henrique A. Lolis²

¹ Universidade federal do Paraná, Curitiba, Brasil

² Universidade federal do Paraná, Curitiba, Brasil

anderson.limaluiz@gmail.com

luis.lolis@gmail.com

Resumo — Pretende-se, ao longo desta pesquisa, eliminar a deriva de clock em conversores analógico-digitais entrelaçados no tempo, corroborando a teoria de reconstrução de sinais não uniformemente amostrados utilizando técnicas de filtragem de resposta ao impulso finita, assim como interpolação através de polinômios de Lagrange. Cálculos em vírgula flutuante e fixa são considerados. Para validar o algoritmo, foram aplicados sinais de múltiplos tons. A métrica de desempenho utilizada para avaliar o algoritmo foi o SNR (Signal-to-Noise Ratio). O método utilizado para implementação do estudo foi realizado na plataforma virtual MATLAB®. Simulações com a plataforma virtual MATLAB® mostram o aumento da qualidade do sinal com a aplicação dos filtros de interpolação em até 59.91 dB para um erro de offset de 0.02 e ordem de filtro igual a 20 – possibilitando a construção de um ADC (Analog-to-Digital Converter) de 9 bits.

I. INTRODUÇÃO

No que concerne a conversão do sinal analógico para o digital, destaca-se a dificuldade de suprir simultaneamente velocidades elevadas e altas resoluções com baixo consumo e baixa superfície de silício. Os conversores analógico-digitais entrelaçados (*Time-Interleaved-Analog-to-Digital-Converters - TIADCs*) [1] são uma alternativa para aplicação em dispositivos como uma proposta para resolução do problema do alto consumo para um grande desempenho. O desempenho do método mostra-se mais eficiente do que o uso individual de vários ADCs para manipulação de dados explicado em [1], todavia três erros importantes se destacam no *TIADC*: erros de offset, ganho e deriva de clock. Dentre os erros presentes no *TIADC*, a deriva de clock é a que impacta mais em sinais que demandam uma precisão maior – dado que regiões onde o sinal apresenta rápidas variações de amplitude são de difícil reconstrução. Propõe-se a utilização de filtros de resposta impulso finita (*FIR*) para corrigir a deriva de clock dos múltiplos conversores analógico-digitais e otimizar a

reconstrução do sinal. Entre os principais aspectos estudados, destacam-se a teoria de reconstrução de sinais não uniformemente amostrados, o estudo da ferramenta de simulação MATLAB®, o desenvolvimento da plataforma de simulação para o teste dos filtros *FIR*, aplicação de erros de offset e deriva de clock e assim como a validação dos filtros a partir de sinais de múltiplos tons. Dentro dos testes iniciais, destaca-se a aplicação de diferentes janelas de reconstrução. As técnicas para a compensação de erros de relógio são baseadas na reconstrução de sinais não uniformemente amostrados, que conduziram o desenvolvimento dos filtros *FIR* de interpolação [2]. O estudo da reconstrução de sinais não-uniformemente amostrados foi conduzido para construção dos filtros *FIR*.

II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A. Funcionamento do *TIADC*

Como a proposta dos *TIADCs* é trabalhar com a multiplexação dos sinais dos M sub-conversores, então a saída do mesmo será a soma de cada um dos sub-conversores no tempo discreto, exposto em (1):

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M-1} y_i[n] \quad (1)$$

Na fig. 1 é apresentado como o sinal é multiplexado:

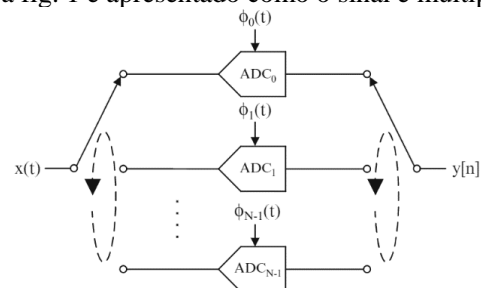


Fig. 1. Diagrama representado o funcionamento do *TIADC*.

No domínio da frequência, amostrado por funções delta de Dirac o sinal será descrito em (2):

$$Y_i(f) = X(f) * D_i(f) = \frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{2\pi k}{M}i} \cdot X\left(f - \frac{k}{M}\right) \quad (2)$$

Devido a própria natureza do funcionamento do TIADC – pequenos erros no instante de aquisição do sinal analógico, devido a pulsos de *clock* alocados, podem distorcer bastante o sinal que se objetiva reproduzir. A equação que descreve o comportamento do sinal de saída considerando irregularidades no sinal de *clock* podem ser observadas em (3).

$$Y_i(f) = \frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi k}{M}\tau_i} \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{M}i} \cdot X\left(f - \frac{k}{M}\right) \quad (3)$$

Onde τ_i corresponde ao tempo de atraso ao adiantamento tomando como referência o tempo para o funcionamento ideal.

B. Interpolação de Lagrange

A representação analítica da amostragem não-uniforme é embasada pela interpolação de Lagrange – a qual afirma que a interpolação pelo filtro *sinc* pode ser aproximada por um filtro passa-baixas, quando os conversores analógico-digitais estão uniformemente espaçados, como segue na publicação de Oppenheim em [3]. É postulado que o sinal pode ser adequadamente amostrado pelo somatório do sinal amostrado em t_n multiplicado por uma função de Lagrange em (4).

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t_n) \frac{G(t)}{G'(t_n)(t-t_n)} \quad (4)$$

onde $G(t)$ é denotado em (5):

$$G(t) = (t-t_0) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right) \quad (5)$$

A interpolação utilizando (4) é chamada de interpolação de Lagrange. A transformada de Fourier do polinômio de Lagrange, é limitada em banda e forma uma sequência biortogonal a e^{ft_n} entre $\left[\frac{-\pi}{T_N}, \frac{\pi}{T_N}\right]$, dado por [3]

em (6):

$$|t_n - nT_N| \leq d < \frac{T_N}{4}, \text{ para todo } n \in Z \quad (6)$$

A amostragem periodicamente não uniforme pode ser vista como uma combinação de N sequências de amostras

uniformes. Logo, "nessa forma de amostragem, os pontos de amostragem são divididos em grupos de N pontos cada. Os grupos têm um período recorrente, que é denotado por T, que é igual a N vezes o período de Nyquist "[4]. (5) pode ser sumarizada em (7),

$$G(t) = t \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{nT}\right) \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{nT+t_1}\right) \dots \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{nT+t_{M-1}}\right) \quad (7)$$

cada um dos produtórios convergem em uma função de senos correspondentes em (8),

$$\frac{\sin(\pi(t-tp))}{T} \quad (8)$$

as quais podem ser provadas a partir da definição da função *sinc*, obtém-se (9),

$$\sin\left(\frac{\pi(t-t_p)}{t}\right) = k(t-t_p) \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{t-t_p}{nT}\right) \quad (9)$$

derivando a expressão e usando a conhecida forma para amostragem não-uniforme de sinais encontra-se em (10).

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{M-1} x_c(nT+t_p) \cdot \frac{a_p(-1)^{nM} \prod_{i=0}^{M-1} \sin\left(\frac{\pi(t-t_i)}{T}\right)}{\pi(t-nT-t_p)} \quad (10)$$

Onde o coeficiente a_p é mostrado em (11).

$$a_p = \frac{1}{\prod_{\substack{q=-\infty \\ q \neq p}}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(t_p-t_q)}{T}\right)} \quad (11)$$

C. Implementação dos filtros

Para converter o filtro de tempo contínuo para um filtro discreto aplicando a identidade de interpolação, é necessário trocar as ordens dos somatórios equação da reconstrução em (12),

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT+t_p) \cdot \frac{a_p(-1)^{kM} \prod_{q=0}^{M-1} \sin\left(\frac{\pi(t_p-t_q)}{T}\right)}{\pi(t-kT-t_p)} \quad (12)$$

reescrevendo a equação anterior como uma convolução e usando a relação (13).

$$\sin(t-k\pi) = (-1)^k \sin(t) \quad (13)$$

é possível obter o filtro em (14).

$$h_p(t) = a_p T \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi t} \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq p}}^{M-1} \sin\left(\frac{\pi(t+t_p-t_q)}{T}\right) \quad (14)$$

D. Janelamento – filtragem FIR

A técnica de *janelamento* consiste em truncar a resposta ao impulso do filtro em uma determinada janela de tempo.

Esse processo pode ser a simples delimitação por uma janela retangular ou janelas em que no domínio da frequência leva-se em consideração a informação presente no espectro lateral. Por definição, o janelamento é apresentado em (15):

$$h[n] = h_p[n] \cdot w[n] \quad (15)$$

onde $w[n]$ é a janela e $h_p[n]$ é o filtro de (14), no domínio do tempo discreto. As janelas testadas incluem: retangular, Hanning, flattop, Bartlett, Blackmann, Hamming, Kaiser e a janela triangular.

III. SIMULAÇÕES E METODOLOGIA

O sinal periódico gerado para reconstrução é sumarizado em (16).

$$x(t) = \sin(2\pi f_{c1}t) + \cos(2\pi f_{c2}t) + \cos(2\pi f_{c3}t) \quad (16)$$

O sinal é periodicamente amostrado para obter os dados para reconstrução, e segundo os filtros e seus coeficientes são confeccionados a partir de (14) e (15). É necessário fazer a convolução do filtro pelos sinais amostrados para encontrar o sinal desejado. A reconstrução é feita com filtros contínuos e discretos para observar a diferença de desempenho. Para os mesmos fins de comparação, a reconstrução é realizada com e sem a compensação dos filtros. O SNR é calculado a partir da relação em (17):

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\text{Amplitude do sinal sem erro}^2}{\text{Amplitude do sinal com erro}^2} \right) \quad (17)$$

As simulações referentes à implementação dos filtros digitais em vírgula fixa contam com o cálculo dos coeficientes e operações de filtragem utilizados diferentes números de bits para representação de cada valor para ambas as partes fracionária e inteira, contando com o bit de sinal.

IV. RESULTADOS

A. Parâmetros base para as simulações

O tempo de simulação foi de 150 s. Cada ADC possui uma frequência de amostragem de 4 Hz, sumarizando um total de 16 Hz no TIADC final. O erro de relógio nos testes base são sempre de 20 %. A ordem do filtro FIR base é de 20, enquanto nos testes de variação de ordem, o valor se modifica entre 0 a 350. O comprimento da palavra do banco de filtros varia entre 5 a 32 bits. A variação em relação a frequência central do sinal está entre 1 % a 100 % do limite de Nyquist. Os valores de erro de relógio são variados entre 0.0625 % até 20 % – dado que segundo a teoria apresentada em [4], erros maiores do que 25 % tornam a reconstrução do sinal a partir da interpolação de Lagrange ineficiente.

B. Avaliação de resultados com filtros contínuos

Na fig. 2 é apresentado o sinal gerado e reconstruído

com filtros contínuos juntamente com os instantes de amostragem:

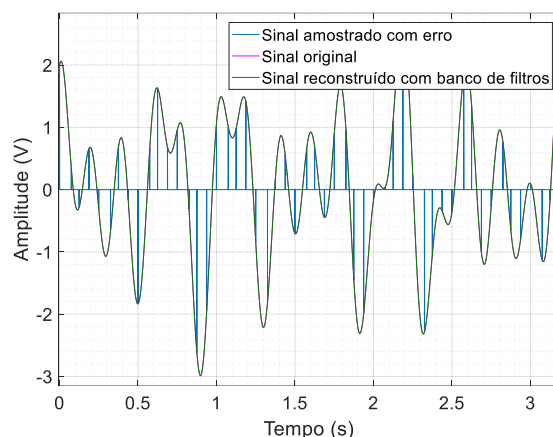


Fig. 2. Representação dos sinais reconstruído e original (sobrepostos).

Na fig. 2 é utilizado o erro de offset de 0,02 e as frequências em (16) foram 1 Hz, 2 Hz e 3 Hz – respectivamente.

A utilização da compensação dos filtros elevou o SNR de 27,8 dB para 59,9 dB. Na fig. 3 é exposto a SNR da reconstrução do sinal com e sem a compensação.

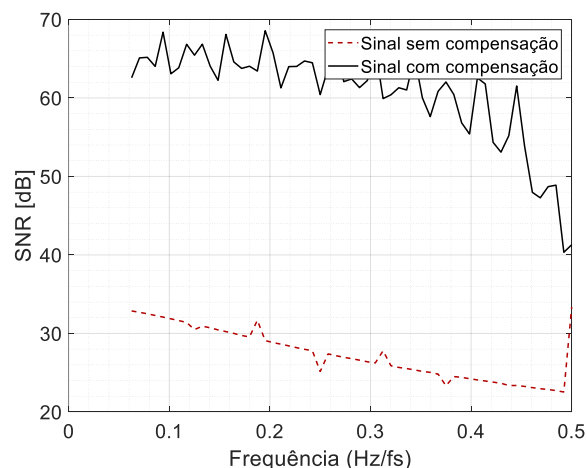


Fig. 3. Análise da SNR do sinal reconstruído, com a utilização dos filtros contínuos.

A aplicação de filtros eleva consideravelmente a relação sinal ruído do sinal reconstruído, mantendo este em alta SNR em banda antes de se aproximar ao limite de Nyquist. O decaimento de SNR é justificado pela aproximação da frequência do sinal ao limite de Nyquist.

C. Avaliação de resultados com filtros discretos

A avaliação da relação sinal-ruído a partir de diferentes janelas em função da proximidade ao limite de Nyquist é exposta na fig. 4.

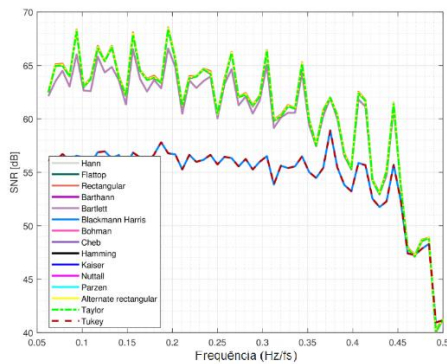


Fig. 4. Avaliação da SNR utilizando diferentes janelas.

A operação de truncamento dos filtros permite a reconstrução do sinal com uma SNR um pouco menor do que a observada para filtros contínuos.

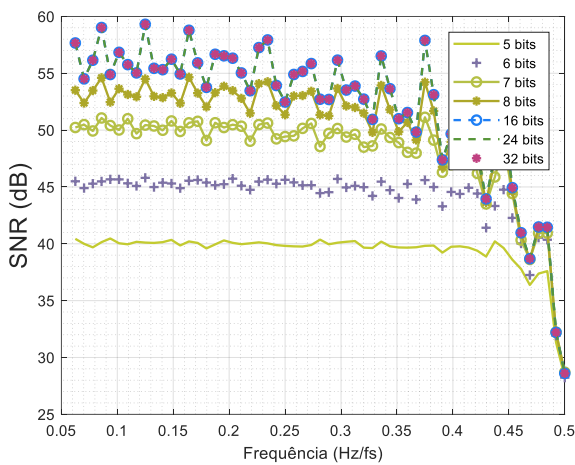


Fig. 5. Avaliação da relação do sinal ruído do sinal utilizando diferentes tamanhos de palavra.

A relação sinal ruído satura para 16 bits e decresce em aproximadamente 5 dB para cada redução de 1 bit no comprimento total da palavra utilizada, evidenciado na fig.5.

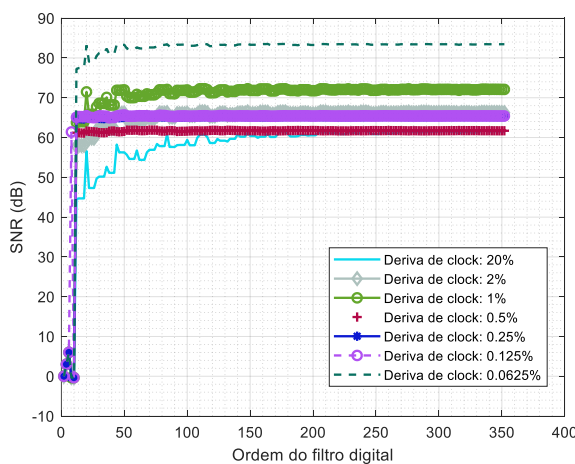


Fig. 6. Gráfico apresentando a relação sinal ruído do sinal reconstruído para diferentes ordens do filtro FIR para diferentes valores de erros de relógio.

As curvas de desempenho dos filtros saturam o valor de SNR para ordem de 100, como visto na fig.6. No entanto, ordens consideravelmente menores podem ser usadas sem perdas significativas na relação sinal ruído.

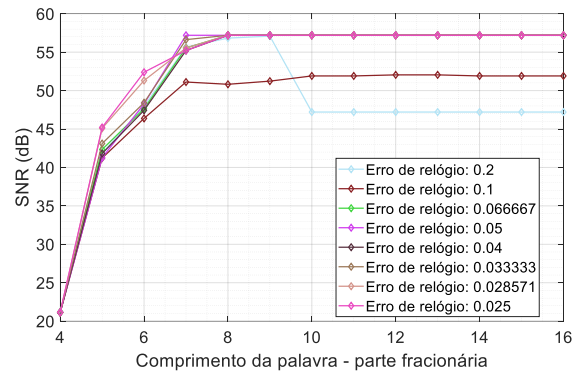


Fig. 7. Análise da relação sinal ruído utilizando diferentes tamanhos de palavra nos cálculos de aritmética de vírgula fixa para diferentes erros de relógio.

V. CONCLUSÃO

O uso do método de filtragem elevou a relação sinal ruído de 17 dB para 54 dB, corroborando a teoria encontrada em [2] e qualificando o mesmo como uma alternativa interessante para correção de erros de relógio.

Cálculos em vírgula fixa mostram que as curvas de SNR saturam em 10 bits (como se observa na fig. 7), eximindo a necessidade da utilização de 16 bits de palavra para obtenção da melhor qualidade de reconstrução.

Verifica-se, a partir da fig.4, que as janelas que possuem menor rejeição em banda caracterizam a melhor opção para implementação do método de janelamento – dado que são as que mantém a maior SNR e possuem pouca complexidade de cálculo. A característica apresenta um ponto favorável dado que cálculos mais complexos oriundos de janelas que precisam de maiores desenvolvimentos numéricos não precisam ser implementadas.

REFERÊNCIAS

- [1] M. El-Chammas and B. Murmann. Background Calibration of Time-Interleaved Data Converters. Analog Circuits and Signal Processing. Springer New York, 2011.
- [2] Oppenheim, A. V.; Schafer, R. W. Processamento em tempo discreto de sinais. 3. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.
- [3] S. Maymon and A. V. Oppenheim, "Sinc Interpolation of Nonuniform Samples," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 59, no. 10, pp. 4745-4758, Oct. 2011.
- [4] doi: 10.1109/TSP.2011.2160054 Eldar, Y. C.; Oppenheim, A. V. Filterbank reconstruction of bandlimited signals from nonuniform and generalized samples. IEEE Transactions on Signal Processing, vol 48, pp. 2864-2875, 2000.