

Análise de equilíbrio harmônico com não linearidades polinomiais descritas no domínio da frequência

Leticia Cordeiro¹ e Eduardo G. Lima²

^{1,2}Group of Integrated Circuits and Systems (GICS) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil
cordeiro.leticia@outlook.com.br

Resumo—No projeto de circuitos eletrônicos a análise numérica e a simulação são importantes para validar e prever o comportamento do circuito. Em altas frequências e em circuitos com elementos não lineares, aumenta-se a complexidade das análises e das simulações, então, faz-se necessário o uso de ferramentas como o equilíbrio harmônico (ou HB, do inglês *Harmonic Balance*) para reduzir essa complexidade. O objetivo desse artigo é investigar como tratar as não linearidades no domínio da frequência, pois tradicionalmente no HB elas são tratadas no domínio do tempo. Para o desenvolvimento da pesquisa foi escolhido um circuito teste simplificado com um elemento não linear e aplicada a análise nodal modificada para se obter equações diferenciais que descrevem seu comportamento no tempo. Considerou-se uma não linearidade polinomial de segunda ordem, mas análises semelhantes às desenvolvidas podem ser aplicadas a ordens superiores. O HB tradicional foi utilizado no circuito teste e foi desenvolvido e aplicado o HB que trata as não linearidades no domínio da frequência, através de manipulações trigonométricas. O cálculo exato da não linearidade também foi feito, de modo a ser um parâmetro de comparação. Considerando duas harmônicas na análise, obteve-se um erro quadrático médio (ou MSE, do inglês *Mean Square Error*) 50% menor para o método da frequência, em relação ao método do tempo, e ao aumentar o número de harmônicas para quatro, obteve-se um MSE 11% menor para o método da frequência. Portanto, o valor da corrente no elemento não linear encontrado com o método da frequência e do tempo diferiram do cálculo exato devido às aproximações presentes em ambos os métodos, que diminuem ao aumentar a ordem de truncamento polinomial, e o menor MSE foi obtido com o método da não linearidade no domínio da frequência.

I. INTRODUÇÃO

Entre as diversas etapas que constituem o projeto de circuitos eletrônicos está a simulação computacional, sendo esta essencial atualmente para um resultado satisfatório. A simulação pode obter informações sobre a resposta do circuito com diferentes valores dos componentes e das variáveis de entrada. Deste modo, é possível escolher a melhor configuração ou realizar as

devidas alterações no circuito. Quando uma simulação com modelos matemáticos coerentes e precisos é aplicada, aumenta-se a possibilidade de o comportamento real do circuito estar condizente com os resultados das simulações, podendo se prever o comportamento do circuito antes da etapa de fabricação e testes [1].

Os elementos de um circuito podem ser classificados entre componentes ativos, que fornecem energia de alguma forma para o circuito, como fontes e transistores, ou componentes passivos, que não fornecem energia, mas podem armazená-la ou retardar a corrente, como resistores e capacitores. Outra classificação possível é entre componentes lineares e não lineares. Esta forma de classificação considera se a relação entre corrente e tensão do componente é linear ou não. O resistor, por exemplo, é um elemento linear, pois com a lei de Ohm é possível descrever a relação entre corrente e tensão de forma linear. A análise de elementos não lineares requer procedimentos matemáticos específicos, como a linearização do comportamento do componente em alguns instantes para reduzir a complexidade.

A análise de circuitos é importante para se obter um conjunto de equações que descrevem o comportamento do circuito, sendo que os principais métodos utilizados são a análise nodal e a análise de malhas. O primeiro método utiliza a lei de Kirchhoff para corrente, que diz ser nulo o somatório das correntes que incidem em um nó (união de dois ou mais componentes). Já o segundo método utiliza a lei de Kirchhoff para tensões, que diz ser nulo o somatório das tensões ao longo de uma malha (caminho fechado de um circuito) [2]. Para circuitos com componentes onde não é possível estabelecer uma relação direta entre tensão e corrente, como fontes de tensão ou elementos não lineares, utiliza-se a Análise Nodal Modificada (ANM), definindo como incógnitas as correntes desses elementos, além das tensões nodais. Aplicando esses métodos em circuitos com capacitores e indutores, será necessária uma análise de regime transitório, onde o tempo é dividido em partes menores e para cada instante de tempo é encontrado um conjunto de equações diferenciais. Para circuitos com elementos não lineares, o conjunto solução terá equações não lineares. Em circuitos de corrente alternada com

elementos lineares, deve-se aplicar uma análise fasorial, pois componentes como capacitores e indutores deverão ser analisados com base na reatância capacitiva e indutiva, representada por números complexos. Para circuitos não lineares que estão sujeitos a estímulos periódicos no tempo, métodos de análise como o equilíbrio harmônico (ou HB, do inglês *Harmonic Balance*) se tornam mais úteis do que a análise em regime transitório. No HB tradicional, as não linearidades são tratadas no domínio do tempo, enquanto que as dinâmicas são tratadas no domínio da frequência. O objetivo desta pesquisa científica foi investigar como aplicar não linearidades polinomiais no domínio da frequência.

II. ANÁLISE DE EQUILÍBRIO HARMÔNICO

O HB é um método numérico utilizado para análises de circuitos não lineares que operam em altas frequências, pois reduz a complexidade computacional das simulações [3]. Nesse método, as tensões e correntes do circuito que variam no tempo podem ser modeladas como a soma de senos e cossenos mais uma constante (X_0) [4], explicitado pela fórmula

$$x(t) = X_0 + \sum_{h=1}^H [X_{hs} \sin(h\omega_c t) + X_{hc} \cos(h\omega_c t)], \quad (1)$$

onde o x representa uma tensão ou corrente. Os valores X_{hs} e X_{hc} são amplitudes constantes de senos e cossenos, respectivamente, e independentes entre si. Já o H representa o número de harmônicas consideradas na análise, sendo que isso deve ser definido previamente, e

$$\omega_c = 2\pi f_c, \quad (2)$$

com f_c sendo a frequência fundamental do circuito.

No HB, cada incógnita do circuito que varia no tempo tendo sido definida utilizando a ANM, por exemplo, é transformada em $(2H+1)$ incógnitas que são constantes e representam as amplitudes de senos e cossenos mais a constante X_0 . Consequentemente, cada equação definida com a ANM deverá ser transformada em $(2H+1)$ equações que estarão no domínio da frequência, pois as incógnitas agora não dependem do tempo.

Para elementos dinâmicos, deve-se também considerar na análise uma matriz jacobiana quadrada de ordem $(2H+1)$, pois as derivadas presentes nas equações características desses elementos devem ser tratadas no domínio da frequência [5].

III. TRATAMENTO DA NÃO LINEARIDADE NO HB

As análises desenvolvidas nesse artigo são válidas somente para não linearidades polinomiais. O estudo de caso considerou uma não linearidade polinomial de segunda ordem, mas um procedimento semelhante ao apresentado poderia ser aplicado a ordens polinomiais superiores, utilizando as manipulações trigonométricas para encontrar a expressão analítica de x^n , sendo n um número inteiro maior que dois.

A. Domínio do tempo

Para circuitos não lineares, a análise no domínio do tempo é feita dividindo o período fundamental em $(2H+1)$ intervalos de tempo igualmente espaçados e multiplicando uma matriz contendo os valores de senos e cossenos que variam no tempo (F) por um vetor coluna com a constante X_0 e as amplitudes dos senos e cossenos [5], expresso por

$$\begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ x(t_3) \\ \vdots \\ x(t_{2H+1}) \end{bmatrix} = F \times \begin{bmatrix} X_0 \\ X_{1C} \\ X_{1S} \\ \vdots \\ X_{HS} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

A matriz F pode ser generalizada como:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\frac{1.2\pi.1}{2H+1}) & \sin(\frac{1.2\pi.1}{2H+1}) & \cos(\frac{2.2\pi.1}{2H+1}) & \sin(\frac{2.2\pi.1}{2H+1}) & \dots & \sin(\frac{H.2\pi.1}{2H+1}) \\ 1 & \cos(\frac{1.2\pi.2}{2H+1}) & \sin(\frac{1.2\pi.2}{2H+1}) & \cos(\frac{2.2\pi.2}{2H+1}) & \sin(\frac{2.2\pi.2}{2H+1}) & \dots & \sin(\frac{H.2\pi.2}{2H+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\frac{1.2\pi.(2H+1)}{2H+1}) & \sin(\frac{1.2\pi.(2H+1)}{2H+1}) & \cos(\frac{2.2\pi.(2H+1)}{2H+1}) & \sin(\frac{2.2\pi.(2H+1)}{2H+1}) & \dots & \sin(\frac{H.2\pi.(2H+1)}{2H+1}) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

B. Domínio da frequência

Dado um sinal $x(t)$ truncado na harmônica H , foram feitas manipulações trigonométricas para se obter a forma analítica de $x^2(t)$, representada por

$$y(t) = x^2(t) = f(t)^T \times Y, \quad (5)$$

onde $f(t)^T$ é o vetor coluna transposto de $(2H+1)$ colunas contendo valores de senos e cossenos que variam no tempo e Y é um vetor coluna de $(2H+1)$ linhas em função de ω_c , da constante X_0 e das amplitudes de senos e cossenos. Após desprezar todas as harmônicas superiores a H em $x^2(t)$, chegou-se a:

$$f(t)^T = [1 \quad \cos(m_{1c}\omega_c t) \quad \sin(m_{1s}\omega_c t) \quad \cos(m_{2c}\omega_c t) \quad \dots \quad \sin(m_H\omega_c t)], \quad (6)$$

como vetor coluna transposto em função de senos e cossenos e Y foi dividido como a soma de dois vetores coluna:

$$Y = Y_1 + Y_2. \quad (7)$$

O Y_1 contém todos os casos onde, para cada termo a partir da segunda linha, subtraindo o índice do segundo X pelo índice do primeiro X , obtém-se sempre m , onde m é um determinado múltiplo de ω_c em $f(t)^T$. Por exemplo, subtraindo os índices do termo $X_{(h-m_c)S} X_{hS}$, presente na segunda linha de Y_1 , temos que $[h - (h - m_c)] = m_c$ e m_c é múltiplo de ω_c em $\cos(m_c\omega_c t)$, presente na segunda coluna de $f(t)^T$. Os índices S e C indicam se X é uma amplitude de seno ou cosseno, respectivamente, assim como em $x(t)$, e a primeira linha de Y_1 é um caso particular por apresentar os termos divididos por 2 e elevados ao quadrado, conforme:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^H \left(\frac{X_{hS}^2 + X_{hC}^2}{2} \right) \\ \sum_{h=m_{1C}+1}^H \left(X_{(h-m_{1C})S} X_{hS} + X_{(h-m_{1C})C} X_{hC} \right) \\ \sum_{h=m_{1S}+1}^H \left(X_{(h-m_{1S})C} X_{hS} - X_{(h-m_{1S})S} X_{hC} \right) \\ \sum_{h=m_{2C}+1}^H \left(X_{(h-m_{2C})S} X_{hS} + X_{(h-m_{2C})C} X_{hC} \right) \\ \vdots \\ \sum_{h=m_H+1}^H \left(X_{(h-m_H)C} X_{hS} - X_{(h-m_H)S} X_{hC} \right) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Já o Y_2 contém os casos onde, para cada termo a partir da segunda linha, somando o índice do segundo X com o índice do primeiro X , obtém-se sempre m . Para o Y_2 existe uma restrição a ser considerada nas somatórias. Os termos somente serão somados nas linhas da matriz Y_2 quando $i + j = m$. Por exemplo, para $H = 4$, a nona linha dessa matriz terá $m = 4$ e os termos considerados na somatória serão $X_{2S}X_{2C}, X_{1C}X_{3S}, X_{1S}X_{3C}$, pois a soma dos índices é 4. Termos como $X_{1S}X_{2C}$ ou $X_{2C}X_{3S}$ mesmo estando dentro das somatórias serão desconsiderados, por conta da restrição, de acordo com:

$$Y_2 = \begin{bmatrix} X_0 \\ 2X_0X_{m_1C} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H X_{iC} X_{jC} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H X_{iS} X_{jS} \right) \\ 2X_0X_{m_1S} + \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H X_{iC} X_{jS} \\ 2X_0X_{m_2C} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H X_{iC} X_{jC} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H X_{iS} X_{jS} \right) \\ \vdots \\ 2X_0X_{m_HS} + \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H X_{iC} X_{jS} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Desse modo, Y pode ser representado por somatórias em vetores coluna que têm seu comportamento previsível para qualquer valor de H . Além disso, as $(2H+1)$ amplitudes de $x^2(t)$ dependem diretamente das $(2H+1)$ amplitudes de $x(t)$, não necessitando de nenhuma transformação de tempo para frequência ou vice-versa.

IV. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O circuito teste escolhido para as análises tem seu esquemático representado pela Figura 1 e apresenta uma fonte de tensão independente (v_f), um resistor (R) de 377Ω e um indutor saturável (L) que representa um elemento passivo e não linear. A tensão na fonte pode ser expressa por:

$$v_f(t) = V_p \sin(2\pi f_c t + \varphi), \quad (10)$$

sendo a tensão de pico (V_p) igual a 440 V , a frequência fundamental (f_c) igual a 60 Hz e a defasagem angular da tensão de pico (φ) igual a 0° . Devido a não linearidade

considerada nessa pesquisa ser polinomial e de segunda ordem, a expressão que representa a tensão no indutor será

$$V_L(t) = \frac{d(I_L^2)}{dt}. \quad (11)$$

Para encontrar as equações que descrevem o comportamento do circuito em função do tempo, foi utilizada a ANM, tendo como incógnitas as tensões nodais V_a, V_b e V_{ref} e as correntes I_L, I_R e I_f , também representadas na Figura 1.

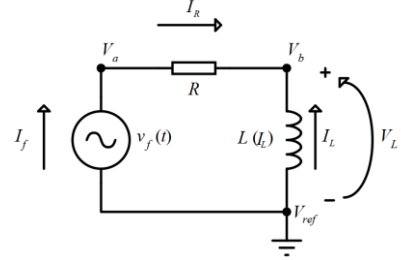


Fig. 1. Circuito teste

Como $V_{ref} = 0 \text{ V}$, por ser uma tensão de referência, e $I_R = I_f = -I_L$, pode-se obter o seguinte sistema de equações para o circuito teste utilizando a ANM, que foi resolvido pelo software MATLAB utilizando a rotina *fsolve*:

$$\begin{cases} I_f - \frac{V_a - V_b}{377} = 0 \\ \frac{V_a - V_b}{377} - I_L = 0 \\ V_b - \frac{d(I_L^2)}{dt} = 0 \\ V_a - 440 \sin(120\pi t) = 0 \end{cases}. \quad (12)$$

Para comparar os dois diferentes tratamentos da não linearidade, o método do tempo e o método da frequência, foi utilizado um mesmo H , primeiro definindo-o como 2 e depois como 4. A Figura 2 mostra a corrente no indutor (I_L) em função do tempo para os dois diferentes métodos com $H = 2$.

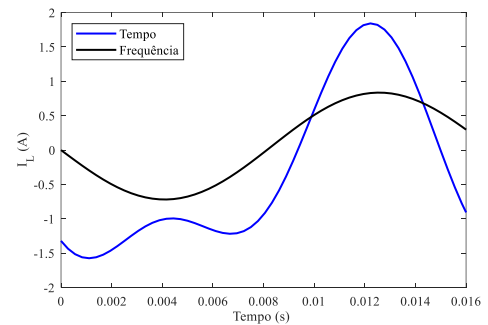


Fig. 2. Corrente I_L para ambos os métodos com $H = 2$

Observa-se que as curvas na Figura 2 não coincidem, ou seja, o valor da corrente no indutor é diferente para os métodos. A Figura 3 contém três diferentes formas de calcular I_L^2 , utilizando o método do tempo, o método da frequência e o cálculo exato, ainda com $H = 2$. Para o

tratamento da não linearidade no domínio da frequência, ocorre uma aproximação ao desconsiderar as harmônicas superiores, ou seja, tanto o I_L quanto o I_L^2 terão sempre a mesma quantidade de harmônicas. Já para o tratamento da não linearidade no domínio do tempo, a aproximação ocorre ao discretizar o tempo e usar as matrizes F e sua inversa. O cálculo exato foi realizado elevando ao quadrado individualmente cada amostra no tempo para ser um parâmetro de comparação. Logo, o valor da corrente no indutor é diferente para ambos os métodos devido às aproximações inerentes aos métodos. Com a finalidade de quantificar o erro dos diferentes métodos em relação ao cálculo exato, obteve-se o erro quadrático médio (ou MSE, do inglês *Mean Square Error*) de 0,5839 para o método da frequência e 1,1571 para o método do tempo.

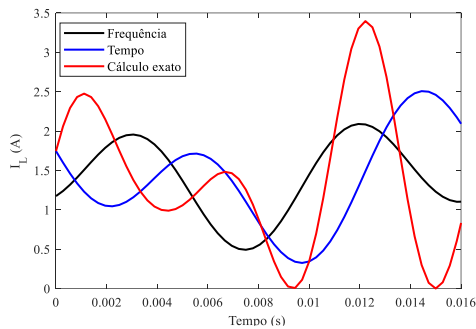


Fig. 3. Diferentes formas de calcular $x^2(t)$ com $H = 2$

A análise do circuito também foi feita considerando o H como 4, pois ao aumentar o truncamento polinomial, espera-se que ambos os métodos sejam mais precisos, visto que normalmente nos circuitos os valores das amplitudes diminuem conforme a ordem da harmônica aumenta [6]. A Figura 4 representa a corrente no indutor (I_L) em função do tempo para os dois diferentes métodos com $H = 4$, sendo possível observar que as curvas também não coincidem e os valores da corrente no indutor são diferentes entre os métodos.

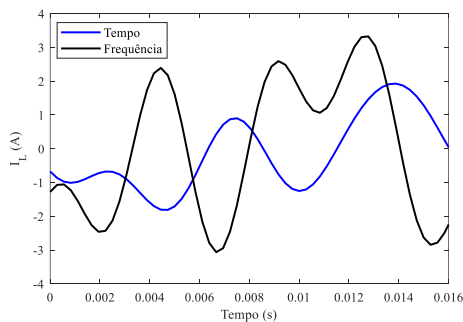


Fig. 4. Corrente I_L para ambos os métodos com $H = 4$

Observando a Figura 5, que contém as diferentes formas de calcular I_L^2 com $H = 4$, é possível perceber que ainda existe uma diferença entre os métodos devido às aproximações, mas o MSE para o método da frequência é de 0,4169 e o MSE para o método do tempo é de 0,4703, erros ambos menores em relação a $H = 2$.

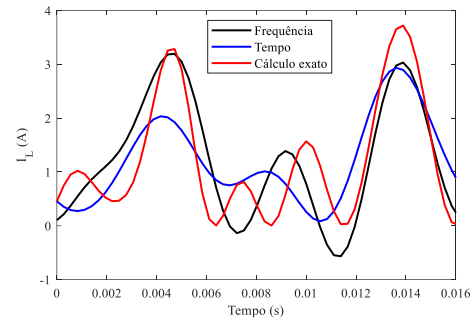


Fig. 5. Diferentes formas de calcular $x^2(t)$ com $H = 4$

V. CONCLUSÕES

Esse artigo apresentou como tratar não linearidades polinomiais no domínio da frequência utilizando o HB, que foi comparado com o método tradicional de análise no domínio do tempo. Ambos os métodos apresentaram erros em relação ao cálculo exato das variáveis de elementos não lineares, devido às aproximações necessárias. Considerando duas harmônicas, obteve-se um MSE de 0,5839 para o método da frequência e 1,1571 para o método do tempo. Também foi observado que, ao aumentar as harmônicas avaliadas na análise, ambos os métodos se tornaram mais precisos, pois o MSE obtido considerando quatro harmônicas foi de 0,4169 para o método da frequência e 0,4703 para o método do tempo. Portanto, foi possível realizar simulações em circuitos com não linearidades polinomiais de segunda ordem com erros menores em relação ao método tradicional de análise.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) pela viabilização da pesquisa no âmbito do programa PIBIC UFPR 2020.

REFERÊNCIAS

- [1] MEHL, E. L. M. Simulação de circuitos eletrônicos em computadores. 1990.
- [2] BOYLESTAD, Robert L. Introdução à análise de circuitos. 12ª ed. São Paulo. Pearson Prentice Hall, 2012.
- [3] OLIVEIRA, A. ; LIMA, E. G. . Periodic steady-state and envelope methods for the analysis of radio frequency circuits. In: XXVII Congresso Regional de Iniciação Científica e Tecnológica em Engenharia, 2016, Joinville. Anais do CRICTE 2016, 2016.
- [4] STEER, M. Microwave and RF Design: A Systems Approach. 2nd Edition. SciTech Publishing, 2013
- [5] NATALINO, C. G. ; ARAUJO, M. A. C. ; LIMA, E. G. . Time and Frequency Domain Numerical Analyses for Electrical Circuits under Fixed Large Signal Stimulus and Variable Small Signal Sources. In: 19º Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica e o 14º Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, 2020, Niterói. Anais da MOMAG 2020, 2020. p. 649-653.
- [6] MAAS, S. Nonlinear Microwave and RF Circuits, Artech House, 2003.