

Capítulo 3: Análise Matemática

“Quando você puder medir aquilo de que está falando e exprimir isso em números, saberá algo sobre tal coisa. Enquanto você não puder exprimi-lo em números, seu conhecimento sobre o assunto será precário e insatisfatório. Pode ser o início do conhecimento, mas você terá avançado muito pouco, em seus pensamentos, em direção ao estágio de ciência.”

William Thompson, Lord Kelvin (1824-1907)

3.1. Apresentação

Neste capítulo é descrita a análise matemática do circuito retificador apresentado no Capítulo 2. Tal análise tem como objetivos principais:

- a) Verificar a relação entre a tensão de saída em corrente contínua e a tensão alternada de alimentação do conversor.
- b) Investigar qual o valor da indutância a ser adotada para os indutores de entrada.
- c) Obter equações que descrevam a corrente que flui através dos elementos do circuito.

A análise foi conduzida usando-se as ferramentas normalmente empregadas no estudo de circuitos elétricos e com a proposição de um modelo monofásico simplificado, o qual facilitou sobremaneira a dedução de equações significativas.

3.2. Suposições Gerais

Para a análise do circuito, algumas suposições iniciais foram feitas, com o intuito de simplificar a obtenção das equações. São elas:

- a) O conversor está operando em condições nominais.
- b) Cada um dos interruptores bidirecionais é levado ao estado de condução no exato instante em que a respectiva tensão fase—neutro apresenta-se nula.
- c) Cada interruptor permanece no estado de condução durante um intervalo

correspondente a $\frac{1}{12}$ do período total da oscilação senoidal da tensão, ou seja, um intervalo equivalente a 30° , em cada semi—ciclo da tensão de entrada da rede elétrica.

d) Os interruptores e diodos tem, em estado de condução, resistência elétrica desprezível. Por outro lado, em estado de bloqueio, tais elementos apresentam-se como resistências infinitas.

e) As tensões fase—neutro nas três fases evoluem na seqüência reversa, ou seja,

$A \rightarrow C \rightarrow B$, de modo que os interruptores bidirecionais são acionados na seqüência $A \rightarrow B \rightarrow C$.

Ao longo da descrição da análise, outras suposições serão apresentadas.

3.3. Estados Topológicos

O circuito retificador proposto acha-se repetido na Figura 3-1. Através da inspeção do circuito e com o auxílio de simulações, é possível verificar que o conversor apresenta doze estados topológicos ao longo de um período de funcionamento, cada qual representando um intervalo equivalente a 30° . Usando a passagem por zero da tensão na fase “A” como instante de início de um período, a Figura 3-2 apresenta os estados topológicos de 0° a 180° , ou seja, para um semi—período. Para melhor visualização, em tal figura foram desenhados, para cada etapa, apenas os elementos que encontram-se conduzindo corrente elétrica.

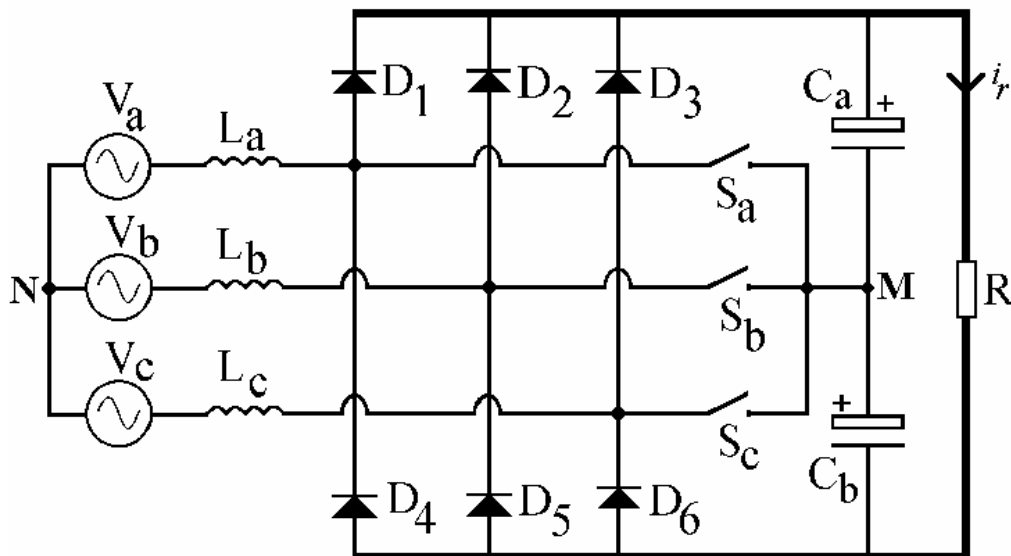


Figura 3-1: Circuito do retificador trifásico em estudo.

Descreve-se na seqüência cada uma das etapas:

(a) 0° a 30°:

Neste intervalo a tensão na fase “A” é positiva. No entanto, a tensão na fase “B” é maior que a presente na fase “A”. Num retificador trifásico com filtro indutivo na entrada, tal situação corresponde a um intervalo no qual a corrente na fase “A” é nula. Isto posto, no circuito proposto o interruptor S_a é colocado em estado de condução durante este intervalo, fazendo com que a corrente elétrica flua através do indutor L_a na fase “A”. Como a tensão na fase “B” é positiva, o diodo D_2 está conduzindo, enquanto que na fase “C”, com tensão negativa nesse intervalo, tem-se o diodo D_6 em estado de condução.

(b) 30° a 60°:

A partir de 30°, a tensão na fase “A” supera a tensão na fase “B”, de modo que o diodo D_1 passa ao estado de condução. O interruptor S_a é comandado ao estado de bloqueio e o conversor opera, nesse intervalo, como um retificador trifásico convencional com filtro indutivo na entrada.

(c) 60° a 90°:

No instante correspondente a 60° a tensão na fase “B” torna-se negativa. A corrente através do diodo D_2 se anula e este diodo é bloqueado. Da mesma maneira como ocorreu para a fase “A” no intervalo (a), agora na fase “B” ter-se-ia corrente nula, devido à inexistência de diodos em estado de condução associados a esta fase. Assim, o interruptor bidirecional S_b é comandado ao estado de condução, fazendo com que exista uma corrente nesta fase. Na fase “A” o diodo D_1 continua em estado de condução e na fase “C” tem-se o diodo D_6 conduzindo.

(d) 90° a 120°:

A partir de 90° a tensão na fase “B” supera o valor da tensão na fase “C” (ambas negativas), fazendo com que o diodo D_5 entre em estado de condução. Não é mais necessário que o interruptor S_b permaneça conduzindo, de modo que o sinal de comando é anulado durante este intervalo. Novamente pode-se considerar que o conversor opera, durante o presente intervalo, como um retificador trifásico “clássico”.

(e) 120° a 150°:

Do mesmo modo como já foi explicado em (a) e em (c) para as fases “A” e “B”, a partir de 120° o diodo D_6 é bloqueado, pois a tensão da fase “C” passa a ser positiva, porém com valor inferior à tensão da fase “A”. Como consequência, a corrente na fase “C” permaneceria nula neste intervalo, de modo que o interruptor bidirecional S_c é comandado a conduzir. Na fase “A” há o diodo D_1 em estado de condução e, na fase “B”, o diodo D_5 também se encontra conduzindo.

(f) 150° a 180°:

Na fase “C” tem-se, a partir de 150°, o diodo D_3 em estado de condução, pois a tensão nesta fase supera, a partir deste ponto, a tensão na fase “A”. Não é mais necessário, portanto, que o interruptor S_c seja comandado ao estado de condução. Mais uma vez o conversor funciona de modo semelhante a um retificador trifásico dotado de filtro indutivo na entrada, com os diodos D_1 , D_3 e D_5 em estado de condução.

A partir de 180°, o mesmo raciocínio pode ser estendido para o semi—período seguinte, com mais seis estados topológicos. No entanto, pode-se verificar que tais doze estados topológicos podem ser resumidos, para efeito de análise de circuito, a apenas duas situações básicas:

1) Quando apenas dois diodos estão em estado de condução, o interruptor associado à fase “faltante” é comandado ao estado de condução. É o caso, na descrição anterior, dos intervalos (a), (c) e (d). Tal situação será analisada sob

a

denominação de “etapa ímpar”.

2) Quando há três diodos em estado de condução (um diodo em cada uma das três fases), não é necessário o acionamento dos interruptores bidirecionais.

Na descrição anterior, tal situação foi verificada em (b), (d) e (f) e será denominada, para efeito de análise, como “etapa par”.

3.4. Análise da “Etapa Ímpar”

Com a idealização dos diodos e interruptores, o circuito correspondente à etapa (a) anteriormente descrita pode ser representada pela Figura 3-3.

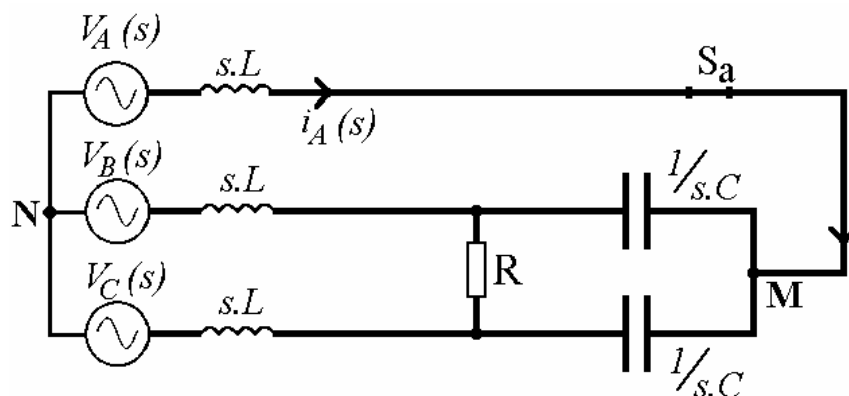


Figura 3-3: Circuito obtido com a idealização dos diodos e interruptores e representando-se os componentes no domínio s .

Como os três indutores de entrada L_a , L_b e L_c são supostos idênticos, a indutância de

cada um deles será representada simplesmente como L . Do mesmo modo, como os dois capacitores eletrolíticos C_a e C_b são supostos idênticos, a capacitância de cada um será doravante representada como C . Tal circuito será utilizado para a dedução de uma expressão para a corrente $i_a(t)$ que flui através do interruptor S_a — e, conseqüentemente, pela fase “A” — durante este intervalo. Uma vez que o interruptor S_a é comandado a conduzir no exato instante em que a tensão na fase “A” é nula, tem-se $i_a(t) = 0$ e pode-se efetuar a análise do circuito da Figura 3-2 diretamente com os componentes no domínio s , através de Transformadas de Laplace, usando-se a equivalência $[s.L]$ para os indutores e $[1/s.C]$ para os capacitores. Observa-se ainda na Figura 3-3 que o resistor de carga, juntamente com os dois capacitores, formam um circuito com disposição em “delta”. É possível, portanto, efetuar uma transformação $\Delta \rightarrow Y$ que simplifica o circuito, ilustrada na Figura 3-4.

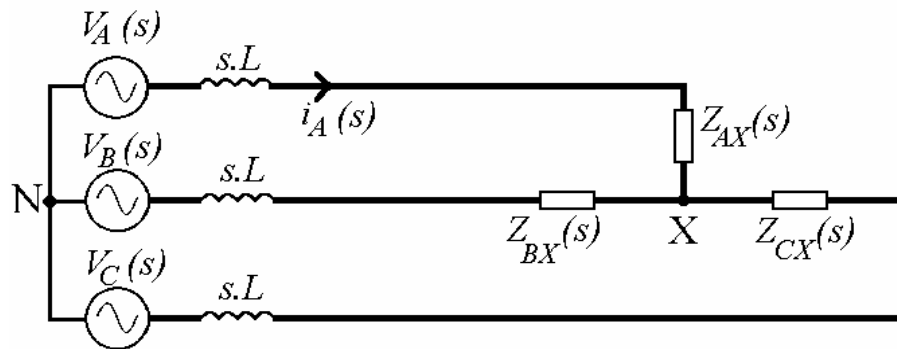


Figura 3-4: Simplificação do circuito da Figura 3-3, com o emprego de uma transformação $\Delta \rightarrow Y$.

A partir da Figura 3-4, tem-se, com a aplicação da transformação $\Delta \rightarrow Y$:

$$Z_{AX}(s) = \frac{1}{s \cdot C(2 + s \cdot C \cdot R)} \quad \text{Eq.3-1}$$

$$Z_{BX}(s) = Z_{CX}(s) = \frac{R}{(2 + s \cdot C \cdot R)} \quad \text{Eq.3-2}$$

Simplificando-se ainda mais o circuito, tem-se a Figura 3-5, com três “impedâncias equivalentes” representadas pelas Equações 3-3 e 3-4:

$$Z_A(s) = s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C(2 + s \cdot C \cdot R)} \quad \text{Eq.3-3}$$

$$Z_B(s) = Z_C(s) = s \cdot L + \frac{R}{(2 + s \cdot C \cdot R)} \quad \text{Eq.3-4}$$

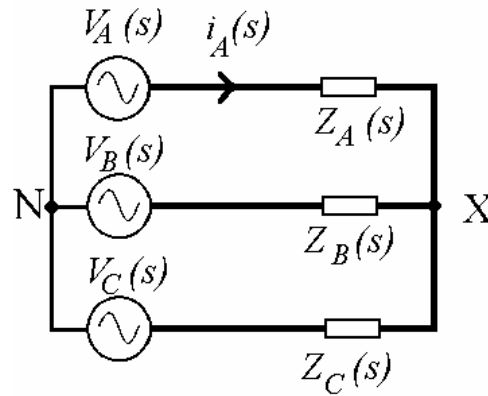


Figura 3-5: Circuito simplificado para análise, com uma “impedância equivalente” associada a cada fase.

Considerando V como o valor máximo da tensão alternada senoidal, as tensões fase—neutro do sistema trifásico e suas respectivas Transformadas de Laplace são apresentadas nas Equações 3-5, 3-6 e 3-7:

$$v_A(t) = V \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_A(s) = V \cdot \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \quad \text{Eq.3-5}$$

$$v_B(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_B(s) = \frac{V}{2} \cdot \left(\frac{s\sqrt{3} - \omega}{s^2 + \omega^2} \right) \quad \text{Eq.3-6}$$

$$v_C(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_C(s) = \frac{-V}{2} \cdot \left(\frac{s\sqrt{3} + \omega}{s^2 + \omega^2} \right) \quad \text{Eq.3-7}$$

Em um circuito como o que está na Figura 3-5, pode-se escrever expressões gerais para as correntes em cada uma das fases. Para a fase “A”, a corrente é dada pela Equação 3-8:

$$i_A(s) = \frac{V_A(s) \cdot Z_B(s) + V_A(s) \cdot Z_C(s) - V_B(s) \cdot Z_C(s) - V_C(s) \cdot Z_B(s)}{Z_A(s) \cdot Z_B(s) + Z_A(s) \cdot Z_C(s) + Z_B(s) \cdot Z_C(s)} \quad \text{Eq.3.8}$$

Substituindo as expressões anteriormente obtidas na Equação 3-8 e simplificando-se, tem-se:

$$i_A(s) = \frac{\omega \cdot V \cdot s \cdot C}{(s^2 \cdot L \cdot C) \cdot (s^2 + \omega^2)} \quad \text{Eq.3-9}$$

A Transformada Inversa de Laplace fornece a expressão da corrente na fase “A”, no domínio do tempo:

$$i_a(t) = \frac{\omega \cdot V \cdot C}{L \cdot C \cdot \omega^2} \left\{ \cos\left[\frac{\sqrt{3} \cdot t}{3 \cdot \sqrt{L \cdot C}}\right] - \cos(\omega \cdot t) \right\} \quad \text{Eq.3-10}$$

Supondo-se ainda que os capacitores eletrolíticos C_a e C_b tem capacitância muito elevada,

a Equação 3-10 pode ser simplificada, usando-se o limite:

$$i_a(t) = \lim_{C \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\omega \cdot V \cdot C}{L \cdot C \cdot \omega^2} \left\{ \cos \left[\frac{\sqrt{3} \cdot t}{3 \cdot \sqrt{L \cdot C}} \right] - \cos(\omega \cdot t) \right\} \right\}$$

com o que se obtém:

$$i_a(t) = \frac{V}{\omega \cdot L} [-\cos(\omega \cdot t) + 1] \quad \text{Eq.3-11}$$

A Equação 3-11 permite chegar-se a algumas conclusões interessantes:

- Durante as “etapas ímpares” a corrente que flui através do interruptor bidirecional — e, conseqüentemente, a corrente da fase correspondente — não depende da carga, mas somente do valor da indutância de entrada.
- Para o modelamento matemático da corrente na fase em estudo, nesta etapa, pode-se analisar o circuito por intermédio de um equivalente simples, mostrado na Figura 3-6, composto unicamente pela fonte senoidal de entrada e um indutor. Este circuito é de utilidade no dimensionamento dos componentes do interruptor bidirecional, para implementação prática do retificador proposto.

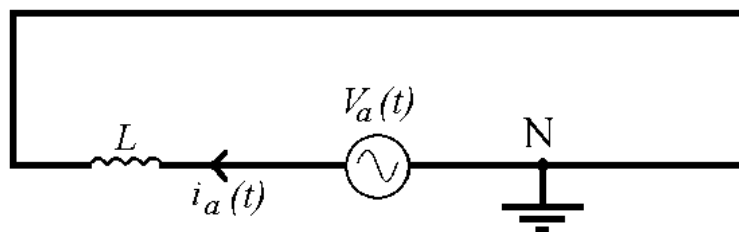


Figura 3-6: Circuito equivalente para modelamento da corrente de fase, na etapa em que o respectivo interruptor bidirecional está em estado de condução.

- A diferença de potencial entre os nós “N” e “M”, mostrados na Figura 3-1, é nula em todas as etapas em que há um interruptor bidirecional em estado de condução.
- A Equação 3-11 descreve o comportamento da corrente “drenada” da fonte trifásica quando o respectivo interruptor bidirecional é comandado a conduzir. Ou seja, em um período completo da oscilação senoidal da fase “A”, tal equação pode ser aplicada às outras fases, com o sinal adequado, de acordo com a Tabela 3-1.

Tabela 3-1: Aplicação da Equação 3-11 às diversas fases, nas “etapas ímpares”.

Fase	Intervalo angular	Equação da Corrente
A	0° a 30°	$i_a(t) = \frac{V}{\omega \cdot L} [-\cos(\omega \cdot t) + 1]$
B	60° a 90°	$i_b(t) = \frac{V}{\omega \cdot L} [\cos(\omega \cdot t) - 1]$
C	120° a 150°	$i_a(t) = \frac{V}{\omega \cdot L} [-\cos(\omega \cdot t) + 1]$
A	180° a 210°	$i_a(t) = \frac{V}{\omega \cdot L} [\cos(\omega \cdot t) - 1]$
B	240° a 270°	$i_b(t) = \frac{V}{\omega \cdot L} [-\cos(\omega \cdot t) + 1]$
C	330° a 360°	$i_c(t) = \frac{V}{\omega \cdot L} [\cos(\omega \cdot t) - 1]$

3.5. Análise da “Etapa Par”

Com a idealização dos diodos, a Figura 3-7 mostra o circuito simplificado correspondente à etapa (b) citada na Figura 3-2. Supondo-se os capacitores eletrolíticos C_a e C_b idênticos e com grande capacitância, pode-se considerar que a tensão V_{DE} sobre a carga é constante e também que:

$$V_{DE} = 2 \cdot V_{cap} \quad \text{Eq. 3-12}$$

onde V_{cap} representa a tensão em qualquer um dos capacitores, já que são supostos idênticos.

A inspeção do circuito mostrado na Figura 3-7 permite também concluir que a corrente que flui na fase “C” é o resultado da soma das correntes nas fases “A” e “B”:

$$i_c(t) = -[i_a(t) + i_b(t)] \quad \text{Eq. 3-13}$$

Isto posto, analisando os capacitores eletrolíticos como fontes de tensão constante, pode-se considerar que a corrente i_r na resistência de carga, mostrada na Figura 3-7, é suprida pela energia armazenada nos capacitores, de modo que as correntes i_a e i_b fluem através dos capacitores. Isto posto, é possível escrever as Equações de Malha 3-14 e 3-15, aplicando-se a Lei das Tensões de Kirchoff (LTK):

$$2 \cdot L \cdot \frac{d}{dt} i_a(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i_b(t) = V_a(t) - V_c(t) - 2 \cdot V_{cap} \quad \text{Eq. 3-14}$$

$$L \cdot \frac{d}{dt} i_a(t) + 2 \cdot L \cdot \frac{d}{dt} i_b(t) = V_b(t) - V_c(t) - 2 \cdot V_{cap} \quad \text{Eq. 3-15}$$

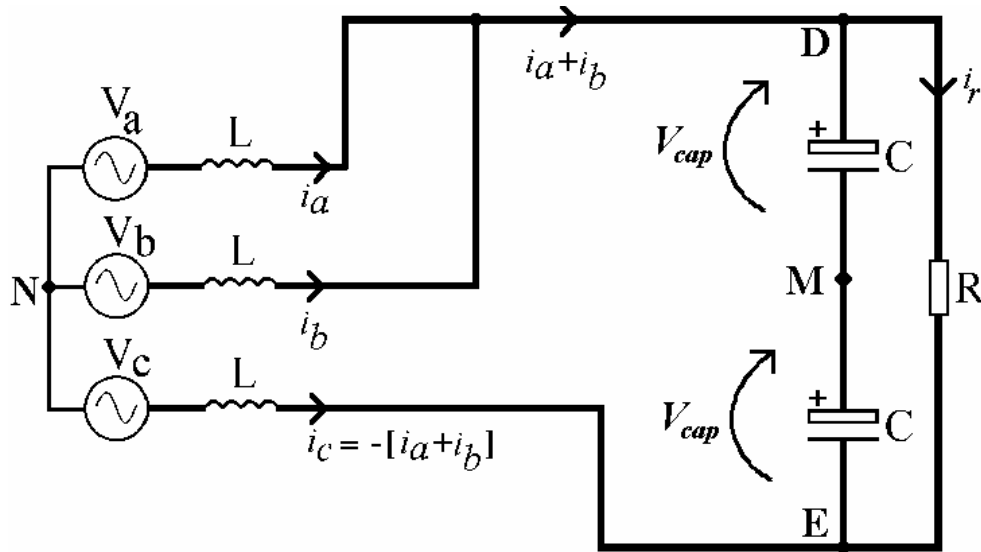


Figura 3-7: Circuito simplificado para análise na etapa de 30° a 60°.

As fontes de tensão V_a , V_b e V_c , que representam o sistema trifásico, são caracterizadas, no intervalo de 30° a 60°, pelas Equações 3-16, 3-17 e 3-18:

$$V_a(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{Eq. 3-16}$$

$$V_b(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = V \cdot \text{cos}\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{Eq. 3-17}$$

$$V_c(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = -V \cdot \text{cos}(\omega \cdot t) \quad \text{Eq. 3-18}$$

Substituindo as Equações 3-17, 3-18 e 3-19 nas Equações 3-14 e 3-15, tem-se:

$$2 \cdot L \cdot \frac{d}{dt} i_a(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i_b(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) - V \cdot \text{cos}(\omega \cdot t) - 2 \cdot V_{cap} \quad \text{Eq. 3-19}$$

$$L \cdot \frac{d}{dt} i_a(t) + 2 \cdot L \cdot \frac{d}{dt} i_b(t) = V \cdot \text{cos}\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + V \cdot \text{cos}(\omega \cdot t) - 2 \cdot V_{cap} \quad \text{Eq. 3-20}$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace às Equações 3-19 e 3-20, tem-se as Equações 3-21 e 3-22, nas quais os valores iniciais das correntes i_a e i_b são os valores correspondentes ao instante no qual se tem $\omega t = 30^\circ$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot L \cdot s \cdot i_a(s) + L \cdot s \cdot i_b(s) = \\ \frac{3 \cdot V \cdot s^2 + V \cdot s \cdot \omega \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot V_{cap} \cdot s^2 - 4 \cdot V_{cap} \cdot \omega^2}{2 \cdot s \cdot (s^2 + \omega^2)} + 2 \cdot L \cdot i_a(30^\circ) + L \cdot i_b(30^\circ) \end{aligned} \quad \text{Eq. 3-21}$$

$$L \cdot s \cdot i_a(s) + 2 \cdot L \cdot s \cdot i_b(s) = \frac{3 \cdot V \cdot s^2 - V \cdot s \cdot \omega \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot V_{cap} \cdot s^2 - 4 \cdot V_{cap} \cdot \omega^2}{2 \cdot s \cdot (s^2 + \omega^2)} + L \cdot i_a(30^\circ) + 2 \cdot L \cdot i_b(30^\circ) \quad \text{Eq. 3-22}$$

Isolando-se $i_a(s)$ e $i_b(s)$ nas Equações 3-21 e 3-22 e simplificando, tem-se:

$$i_a(s) = \frac{3 \cdot V \cdot s^2 + 3 \cdot V \cdot s \cdot \omega \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot V_{cap} \cdot s^2 - 4 \cdot V_{cap} \cdot \omega^2 + 6 \cdot L \cdot s^3 \cdot i_a(30^\circ) + 6 \cdot L \cdot s \cdot \omega^2 \cdot i_a(30^\circ)}{6 \cdot L \cdot (s^4 + s^2 \cdot \omega^2)} \quad \text{Eq. 3-23}$$

$$i_b(s) = \frac{3 \cdot V \cdot s^2 - 3 \cdot V \cdot s \cdot \omega \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot V_{cap} \cdot s^2 - 4 \cdot V_{cap} \cdot \omega^2 + 6 \cdot L \cdot s^3 \cdot i_b(30^\circ) + 6 \cdot L \cdot s \cdot \omega^2 \cdot i_b(30^\circ)}{6 \cdot L \cdot (s^4 + s^2 \cdot \omega^2)} \quad \text{Eq. 3-24}$$

A Transformada Inversa de Laplace fornece as expressões no domínio do tempo:

$$i_a(t) = \frac{V}{2 \cdot \omega \cdot L} \left[\sqrt{3} + \text{sen}(\omega \cdot t) - \sqrt{3} \cdot \text{cos}(\omega \cdot t) \right] - \frac{2 \cdot V_{cap}}{3 \cdot L} \cdot t + i_a(30^\circ) \quad \text{Eq. 3-25}$$

$$i_b(t) = \frac{V}{2 \cdot \omega \cdot L} \left[-\sqrt{3} + \text{sen}(\omega \cdot t) + \sqrt{3} \cdot \text{cos}(\omega \cdot t) \right] - \frac{2 \cdot V_{cap}}{3 \cdot L} \cdot t + i_b(30^\circ) \quad \text{Eq. 3-26}$$

E, para a fase “C”, lembrando da Equação 3-13:

$$i_c(t) = \frac{-V}{\omega \cdot L} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + \frac{4 \cdot V_{cap}}{3 \cdot L} \cdot t - i_a(30^\circ) - i_b(30^\circ) \quad \text{Eq. 3-27}$$

As Equações 3-25, 3-26 e 3-27 podem ser usadas para obter a tensão em qualquer nó do circuito mostrado na Figura 3-6. Assim sendo, a tensão do nó “D”, em relação ao neutro, é:

$$V_{DN}(t) = V_a(t) - L \cdot \frac{d}{dt} i_a(t) \quad \text{Eq. 3-28}$$

Com o que se obtém:

$$V_{DN}(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2 \cdot V_{cap}}{3} - \frac{V}{2} \cdot \text{cos}(\omega \cdot t) - \frac{V \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad \text{Eq. 3-29}$$

Com idêntico raciocínio, obtém-se a tensão no nó “E”, em relação ao neutro:

$$V_{EN}(t) = V_c(t) - L \cdot \frac{d}{dt} i_c(t) \quad \text{Eq. 3-30}$$

Substituindo e derivando, a Equação 3-30 resulta simplesmente em:

$$V_{EN}(t) = \frac{-4 \cdot V_{cap}}{3} \quad \text{Eq. 3-31}$$

A tensão do nó “M”, situado entre os dois capacitores eletrolíticos, em relação ao neutro, é:

$$V_{MN} = \frac{V_{DN}(t) + V_{EN}(t)}{2} \quad \text{Eq. 3-32}$$

Substituindo as Equações 3-29 e 3-31 na Equação 3-32 e simplificando, obtém-se simplesmente:

$$V_{MN} = \frac{-V_{cap}}{3} \quad \text{Eq. 3-33}$$

A Equação 3-33 mostra que, durante o período de 30° a 60° , a tensão do nó “M” permanece negativa, constante e igual a $1/3$ da tensão existente entre os terminais de cada um dos capacitores eletrolíticos. Tal constatação, juntamente com o exame da Equação 3-25, permite inferir um circuito simplificado que representa a corrente $i_a(t)$ no intervalo de 30° a 60° , mostrado na Figura 3-8. Demonstra-se que tal circuito é equivalente ao circuito analisado por meio da aplicação da LTK, conforme a Equação 3-34:

$$-V_a(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i_a(t) + V_{cap} - \frac{V_{cap}}{3} = 0 \quad \text{Eq. 3-34}$$

Ou então, reagrupando os termos:

$$\frac{d}{dt} i_a(t) = \frac{-2 \cdot V_{cap}}{3 \cdot L} + \frac{V_a(t)}{L} \quad \text{Eq. 3-35}$$

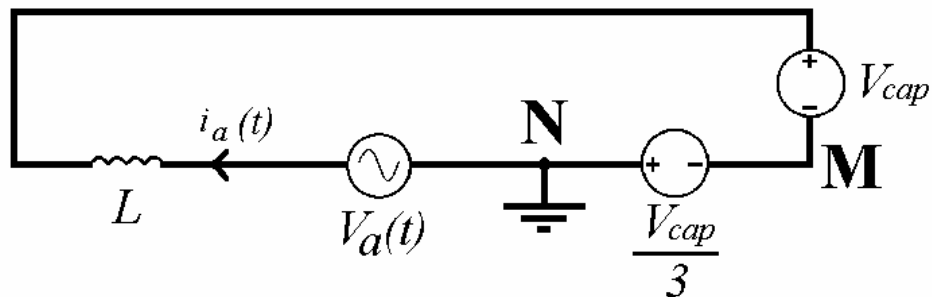


Figura 3-8: Circuito equivalente para modelamento da corrente de fase, no período de 30° a 60° .

Aplicando a Transformada de Laplace à Equação 3-35, tem-se a Equação 3-36:

$$s \cdot i_a(s) - i_a(30^\circ) = \frac{3 \cdot V \cdot s^2 + 3 \cdot V \cdot s \cdot \omega \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot V_{cap} \cdot s^2 - 4 \cdot V_{cap} \cdot \omega^2}{L \cdot s \cdot (s^2 + \omega^2)} \quad \text{Eq. 3-36}$$

Isolando-se $i_a(s)$ na Equação 3-36, obtém-se a Equação 3-23 anteriormente obtida, c. q. d.

$$i_a(s) = \frac{3 \cdot V \cdot s^2 + 3 \cdot V \cdot s \cdot \omega \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot V_{cap} \cdot s^2 - 4 \cdot V_{cap} \cdot \omega^2 + 6 \cdot L \cdot s^3 \cdot i_a(30^\circ) + 6 \cdot L \cdot s \cdot \omega^2 \cdot i_a(30^\circ)}{6 \cdot L \cdot (s^4 + s^2 \cdot \omega^2)}$$

Eq. 3-23

Estendendo a análise para o período de 90° a 120° , verifica-se que a tensão V_{MN} terá

neste intervalo o mesmo valor mostrado na Equação 3-33, porém com polaridade positiva, voltando a se apresentar negativa no intervalo de 150° a 180° . Por outro lado, já se havia verificado que nos intervalos em que se tem um dos interruptores bidirecionais comandado a conduzir (“etapas ímpares”) a tensão V_{MN} é nula, o que permite obter a Tabela 3-2, mostrando os valores dessa tensão ao longo de um período completo da oscilação senoidal, tomando-se a fase “A” como referência.

Tabela 3-2: Elementos que estão conduzindo em cada um dos doze intervalos que compõe um período completo de funcionamento do circuito, juntamente com os respectivos valores da tensão do nó “M” em relação ao neutro.

Intervalo angular	Elementos conduzindo associados às fases			Valor da Tensão V_{MN}
	A	B	C	
0° a 30°	S_a	D_2	D_6	zero
30° a 60°	D_1	D_2	D_6	$\frac{-V_{cap}}{3}$
60° a 90°	D_1	S_b	D_6	zero
90° a 120°	D_1	D_5	D_6	$\frac{+V_{cap}}{3}$
120° a 150°	D_1	D_5	S_c	zero
150° a 180°	D_1	D_5	D_3	$\frac{-V_{cap}}{3}$
180° a 210°	S_a	D_5	D_3	zero
210° a 240°	D_4	D_5	D_3	$\frac{+V_{cap}}{3}$
240° a 270°	D_4	S_b	D_3	zero
270° a 300°	D_4	D_2	D_3	$\frac{-V_{cap}}{3}$
300° a 330°	D_4	D_2	S_c	zero
330° a 360°	D_4	D_2	D_6	$\frac{+V_{cap}}{3}$

3.6. Um Circuito Monofásico Equivalente

Juntando-se o circuito da Figura 3-6 com o da Figura 3-8 e levando em conta as informações da Tabela 3-2, é possível idealizar um circuito simplificado equivalente ao retificador em estudo, mostrado na Figura 3-9. Neste circuito V_x é uma fonte de tensão alternada senoidal monofásica e D_p e D_n representam diodos ideais. Um interruptor bidirecional, representado como S_x , é comandado a conduzir durante um intervalo equivalente a 30° a partir do instante quando a tensão V_x é nula. A fonte V_p é uma fonte de três níveis de tensão, assumindo os valores de V_{MN} relacionados na Tabela 3-2. As duas fontes de tensão V_{cap}

representam os dois capacitores eletrolíticos, supostos de grande capacitância de modo a manter tensão constante em seus terminais.

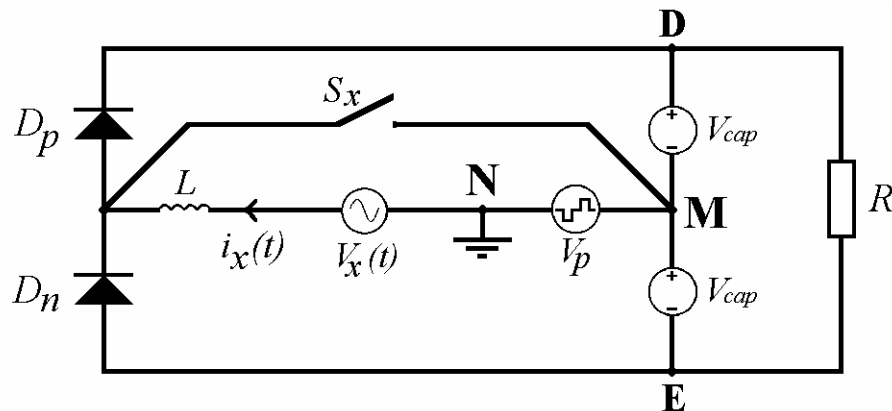


Figura 3-9: Circuito Monofásico equivalente ao retificador em estudo.

Na Figura 3-10 mostra-se uma representação gráfica da tensão da fonte V_p , a tensão de comando do interruptor bidirecional S_x , juntamente com a tensão senoidal da fonte monofásica V_x . Com tal Circuito Monofásico Equivalente, é possível obter um conjunto de equações para a corrente de entrada do retificador, analisando-se cada uma das etapas de 30° como um circuito linear.

(a) 0° a 30° :

Durante esta etapa o interruptor S_x está em estado de condução. Conforme já mostrado na Figura 3-6, o circuito é muito simples e tem-se, através da aplicação da LTK, a Equação 3-37:

$$-V_x(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i_x(t) = 0 \quad \text{Eq. 3-37}$$

Com a aplicação de Transformadas de Laplace, resolve-se a Equação Diferencial 3-37, obtendo-se a expressão da corrente que já foi citada na Equação 3-11, repetida à seguir como Equação 3-38 unicamente para fazê-la genérica:

$$i_x(t) = \frac{-V}{\omega \cdot L} [\cos(\omega \cdot t) - 1] \quad \text{Eq.3-38}$$

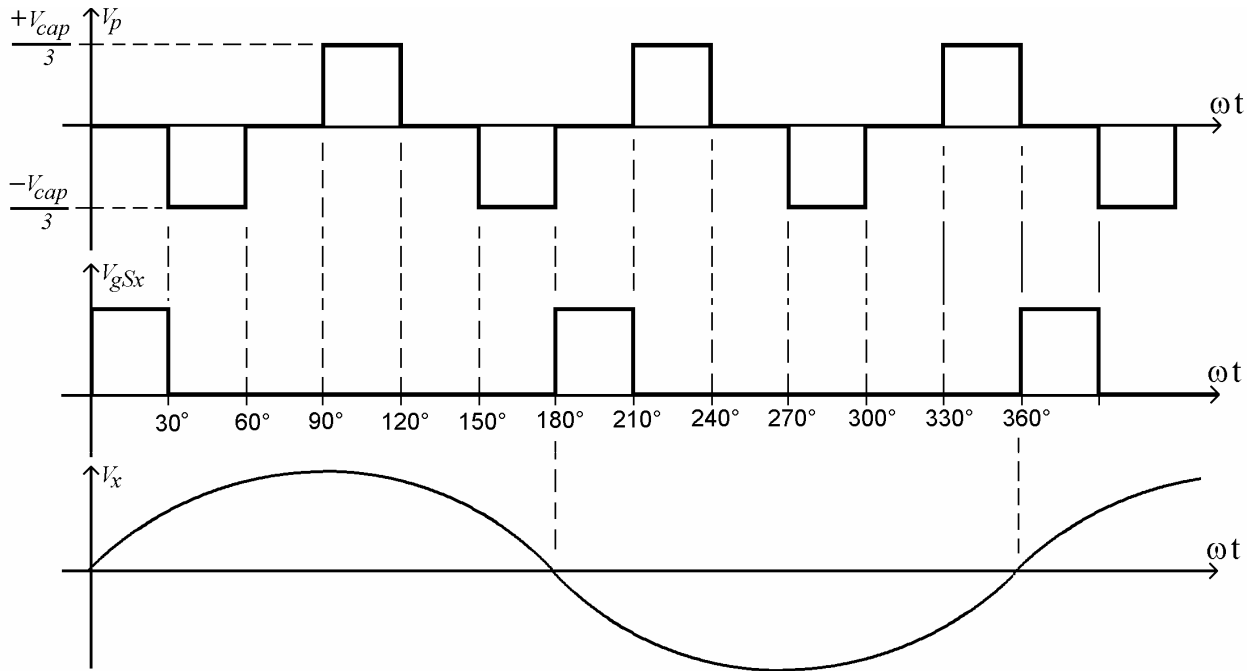


Figura 3-10: Tensão da fonte V_p , tensão de comando do interruptor S_x e tensão da fonte senoidal V_x , do Circuito Monofásico equivalente ao Retificador em estudo.

Ao término dessa etapa, tem-se a corrente com o valor mostrado na Equação 3-39, obtida fazendo-se $\omega t = 30^\circ$ na Equação 3-38:

$$i_x(30^\circ) = \frac{V}{\omega \cdot L} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{Eq.3-39}$$

(b) 30° a 60° :

Esta etapa já foi também analisada, resultando na Equação 3-25. Substituindo o resultado da Equação 3-39 na Equação 3-25, obtém-se a Equação 3-40:

$$i_a(t) = \frac{V}{2 \cdot \omega \cdot L} \left[\sqrt{3} + \text{sen}(\omega \cdot t) - \sqrt{3} \cdot \cos(\omega \cdot t) \right] - \frac{2 \cdot V_{cap}}{3 \cdot L} \cdot t + \frac{V}{\omega \cdot L} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{Eq. 3-40}$$

Simplificando, tem-se:

$$i_x(t) = \frac{3 \cdot V \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) - 3 \cdot V \sqrt{3} \cos(\omega \cdot t) - 4 \cdot V_{cap} \cdot \omega \cdot t + 6 \cdot V}{6 \cdot \omega \cdot L} \quad \text{Eq. 3-41}$$

Fazendo-se $\omega t = 30^\circ$ (ou $\pi/6$ radianos) na Equação 3-41, tem-se o valor da corrente ao término dessa etapa:

$$i_x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3 \cdot V \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3 \cdot V \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4 \cdot V_{cap} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right) + 6 \cdot V}{6 \cdot \omega \cdot L} \quad \text{Eq. 3-42}$$

Ou, simplificando:

$$i_x(60^\circ) = \frac{V}{2 \cdot \omega \cdot L} - \pi \frac{V_{cap}}{9 \cdot \omega \cdot L} \quad \text{Eq. 3-43}$$

(c) **60° a 90°:**

O circuito correspondente a esta etapa é mostrado na Figura 3-11. A tensão V_p é zero e o diodo D_p está conduzindo, enquanto o diodo D_n está bloqueado, já que neste intervalo a tensão V_x é positiva.

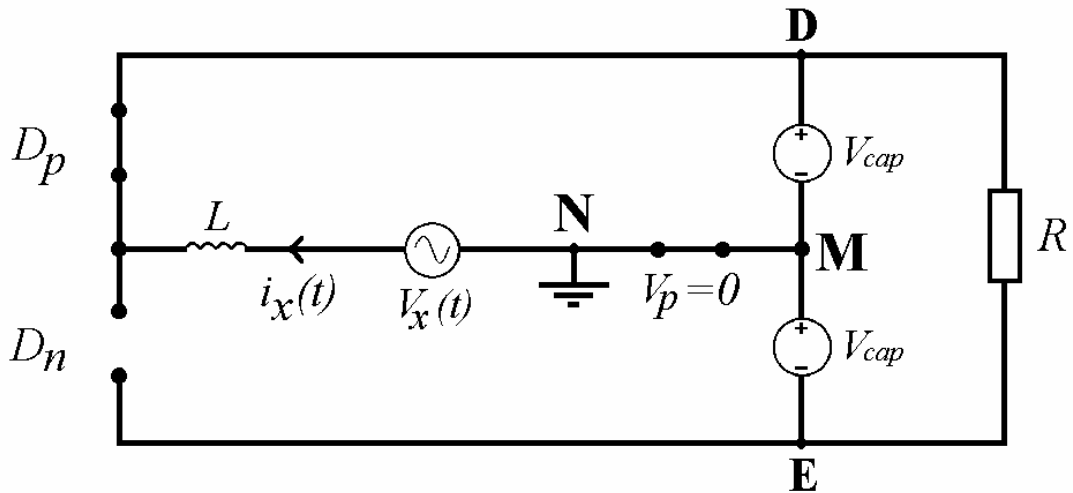


Figura 3-11: Circuito correspondente ao intervalo de 60° a 90° (e, também, ao intervalo de 120° a 150°).

A aplicação da LTK à malha “superior” do circuito da Figura 3-11 resulta em:

$$-V_x(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i_x(t) + V_{cap} = 0 \quad \text{Eq. 3-44}$$

Usando o resultado da Equação 3-43 como condição inicial e lembrando que, neste intervalo, a tensão V_x é:

$$V_x(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{Eq. 3-45}$$

obtem-se a Equação 3-46, que representa a corrente de entrada do retificador nessa etapa:

$$i_x(t) = \frac{V}{2} \left[\frac{\sqrt{3} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) - \cos(\omega \cdot t) + 1}{\omega \cdot L} \right] - \frac{V_{cap}}{L} t + \frac{V}{2 \cdot \omega \cdot L} - \pi \frac{V_{cap}}{9 \cdot \omega \cdot L} \quad \text{Eq. 3-46}$$

Ao final dessa etapa, a corrente atinge o valor mostrado na Equação 3-47, a qual se obtém fazendo $\omega t = 30^\circ$ na Equação 3-46 e simplificando.

$$i_x(90^\circ) = \frac{V}{\omega \cdot L} - \frac{5 \cdot \pi \cdot V_{cap}}{18 \cdot \omega \cdot L} \quad \text{Eq. 3-47}$$

(d) **90° a 120°:**

O circuito equivalente para esta etapa é representado na Figura 3-12. A corrente $i_x(t)$ continua fluindo através do diodo D_p , enquanto que o diodo D_n está bloqueado. A fonte de tensão V_p assume o valor $V_{cap}/3$, com polaridade positiva no nó “M” em relação ao nó “N”.

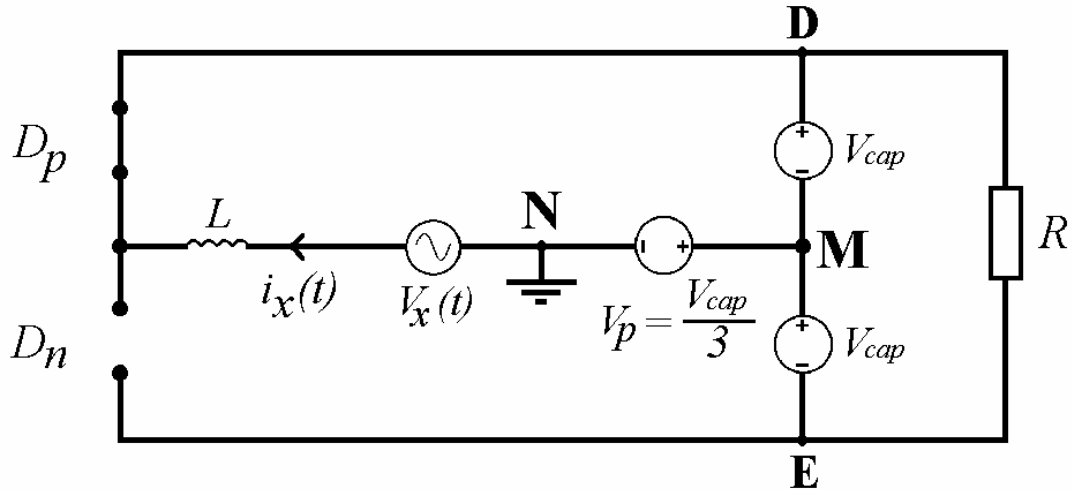


Figura 3-12: Circuito correspondente ao intervalo de 90° a 120° .

A LTK aplicada à malha “superior” da Figura 3-12 fornece a Equação 3-48:

$$-V_x(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i_x(t) + V_{cap} + \frac{V_{cap}}{3} = 0 \quad \text{Eq. 3-48}$$

Na solução da Equação Diferencial 3-48, o resultado da Equação 3-47 é usado como condição inicial. Além disso, leva-se em conta que neste intervalo, a tensão V_x é:

$$V_x(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = V \cdot \text{cos}(\omega \cdot t) \quad \text{Eq. 3-49}$$

Com isso, obtém-se a Equação 3-50, que representa a corrente de entrada do retificador nessa etapa:

$$i_x(t) = \frac{V \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)}{\omega \cdot L} - \frac{4 \cdot V_{cap}}{3 \cdot L} t + \frac{V}{\omega \cdot L} - \frac{5 \cdot \pi \cdot V_{cap}}{18 \cdot \omega \cdot L} \quad \text{Eq. 3-50}$$

Ao final dessa etapa, a corrente atinge o valor mostrado na Equação 3-51, a qual se obtém fazendo $\omega t = 30^\circ$ na Equação 3-50 e simplificando.

$$i_x(120^\circ) = \frac{3 \cdot V - \pi \cdot V_{cap}}{2 \cdot \omega \cdot L} \quad \text{Eq. 3-51}$$

(e) 120° a 150° :

O circuito equivalente para este intervalo é idêntico ao mostrado na Figura 3-11. Como conseqüência, a mesma Equação Diferencial 3-44 é válida:

$$-V_x(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i_x(t) + V_{cap} = 0 \quad \text{Eq. 3-44}$$

No entanto, na solução dessa equação para essa etapa, a condição inicial é aquela mostrada pela Equação 3-51 e a tensão V_x neste intervalo é:

$$V_x(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \quad \text{Eq. 3-52}$$

A equação da corrente fica então:

$$i_x(t) = \frac{V}{\omega \cdot L} \left[\sqrt{3} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + \cos(\omega \cdot t) - 1 \right] - \frac{V_{cap}}{L} t + \frac{3 \cdot V - \pi \cdot V_{cap}}{2 \cdot \omega \cdot L} \quad \text{Eq. 3-53}$$

Ao final dessa etapa, tem-se a corrente dada pela Equação 3-54:

$$i_x(150^\circ) = \frac{3\sqrt{3} \cdot V + 6 \cdot V - 4 \cdot \pi \cdot V_{cap}}{6 \cdot \omega \cdot L} \quad \text{Eq. 3-54}$$

(f) 150° a 180°:

O circuito equivalente é semelhante àquele apresentado na etapa de 90° a 120°, apenas com a inversão da polaridade da fonte de tensão V_p , conforme ilustrado na Figura 3-13. Isto posto, a LTK fornece a Equação 3-55:

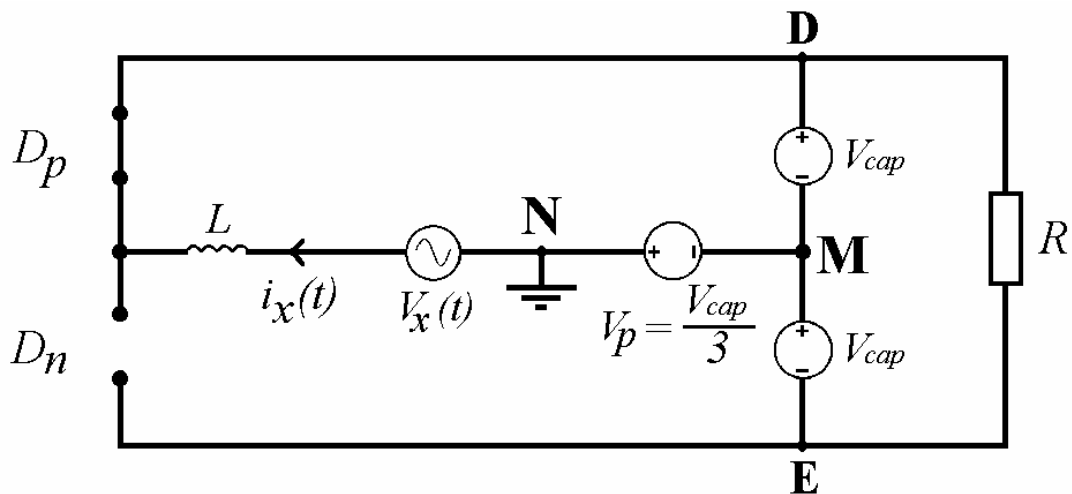


Figura 3-13: Circuito correspondente ao intervalo de 150° a 180°.

$$-V_s(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i_x(t) + V_{cap} - \frac{V_{cap}}{3} = 0 \quad \text{Eq. 3-55}$$

A Equação 3-54 é usada como condição inicial na solução da equação diferencial 3-55, lembrando ainda que neste intervalo a tensão V_x é:

$$V_x(t) = V \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) \quad \text{Eq. 3-56}$$

Obtém-se então a Equação 3-57, que representa a corrente de entrada do retificador nessa etapa:

$$i_x(t) = \frac{V}{\omega \cdot L} \left[\text{sen}(\omega \cdot t) + \sqrt{3} \cos(\omega \cdot t) - \sqrt{3} \right] - \frac{2 \cdot V_{cap}}{3 \cdot L} t + \frac{3\sqrt{3} \cdot V + 6 \cdot V - 4 \cdot \pi \cdot V_{cap}}{6 \cdot \omega \cdot L}$$

Eq. 3-57

Ao final dessa etapa, a corrente atinge o valor mostrado na Equação 3-58, a qual se obtém fazendo $\omega t = 30^\circ$ na Equação 3-56 e simplificando.

$$i_x(180^\circ) = \frac{18 \cdot V - 7 \cdot \pi \cdot V_{cap}}{9 \cdot \omega \cdot L} \quad \text{Eq. 3-58}$$

3.7. Introdução da “Indutância Crítica”

No conjunto de equações anteriormente apresentadas para o período de 0 a 180° , tem-se como incógnita a tensão V_{cap} , ou, de modo equivalente, o valor da tensão de saída do retificador. Para solução dessa incógnita, introduz-se neste item o conceito de “*indutância crítica*” do conversor em estudo.

Através da observação da forma da corrente de entrada do circuito, obtida em simulações, é possível verificar que existe uma condição ideal de funcionamento do circuito no qual a corrente anula-se no instante correspondente ao ângulo de 180° . Ou seja, obtém-se com esta condição uma corrente de entrada sem “descontinuidade” ao término de cada semi—ciclo, fato que empiricamente determinaria um valor otimizado quanto à taxa de distorção harmônica.

Supondo então que os indutores de entrada tenham seu valor ajustado no valor da “*indutância crítica*”, ter-se-ia ao final de um semi—ciclo uma corrente nula, ou seja, a Equação 3-58 seria igual a zero. É evidente que a Equação 3-58 só será nula se o numerador da fração for nulo, ou seja:

$$18 \cdot V - 7 \cdot \pi \cdot V_{cap} = 0 \quad \text{Eq. 3-59}$$

com o que se obtém a relação:

$$V_{cap} = \frac{18}{7 \cdot \pi} V \quad \text{Eq. 3-60}$$

Como a tensão sobre o resistor de carga é o dobro da tensão em cada capacitor, pode-se escrever a relação da Equação 3-61 à seguir, válida ao se adotar a “*indutância crítica*” para os indutores de entrada:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{36 \cdot \sqrt{2}}{7 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}} = 1,3366 \quad \text{Eq. 3-61}$$

Na Equação 3-61, tem-se:

V_o : tensão de saída em corrente contínua do retificador;

V_i : tensão eficaz fase—fase de alimentação do retificador (tensão “de linha”).

A relação mostrada na Equação 3-60 permite simplificar bastante as expressões

anteriormente obtidas para a corrente de entrada em cada etapa de funcionamento do retificador. A Tabela 3-3 resume as equações simplificadas obtidas com o uso da Equação 3-60, juntamente com o valor final da corrente em cada etapa, para o intervalo de zero a 180°. Para o semi—ciclo de 180° a 360°, as equações são as mesmas, multiplicadas por (-1), já que o circuito equivalente é simétrico.

Tabela 3-3: Equações da corrente de entrada e valores finais da corrente, nas seis etapas correspondentes ao semi—ciclo de zero a 180°, com a adoção da “indutância crítica”.

Para o semi—ciclo de 180° a 360° as mesmas equações são válidas, multiplicadas por (-1).

Etapa	Equação da corrente de entrada	Valor final da corrente
0 a 30°	$\frac{V}{\omega \cdot L} [1 - \cos(\omega \cdot t)]$	$\frac{V}{\omega \cdot L} \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$
30° a 60°	$\frac{V}{\omega \cdot L} \left[\frac{9}{7} - \cos(\omega \cdot t) - \frac{12}{7 \cdot \pi} (\omega \cdot t) \right]$	$\frac{V}{\omega \cdot L} \left[\frac{3}{14} \right]$
60° a 90°	$\frac{V}{\omega \cdot L} \left[\frac{11}{7} - \cos(\omega \cdot t) - \frac{18}{7 \cdot \pi} (\omega \cdot t) \right]$	$\frac{V}{\omega \cdot L} \left[\frac{2}{7} \right]$
90° a 120°	$\frac{V}{\omega \cdot L} \left[2 - \cos(\omega \cdot t) - \frac{24}{7 \cdot \pi} (\omega \cdot t) \right]$	$\frac{V}{\omega \cdot L} \left[\frac{3}{14} \right]$
120° a 150°	$\frac{V}{\omega \cdot L} \left[\frac{10}{7} - \cos(\omega \cdot t) - \frac{18}{7 \cdot \pi} (\omega \cdot t) \right]$	$\frac{V}{\omega \cdot L} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{7} \right]$
150° a 180°	$\frac{V}{\omega \cdot L} \left[\frac{5}{7} - \cos(\omega \cdot t) - \frac{12}{7 \cdot \pi} (\omega \cdot t) \right]$	zero

As equações da corrente de entrada, mostradas na Tabela 3-3, podem ser empregadas para obtenção de uma representação gráfica dessa corrente, mostrada na Figura 3-14, para um intervalo equivalente a um período da rede elétrica. Nesta figura, os valores de corrente acham-se “normalizados”, já que o fator $\left(\frac{V}{\omega \cdot L} \right)$ aparece em todas as equações da Tabela 3-3.

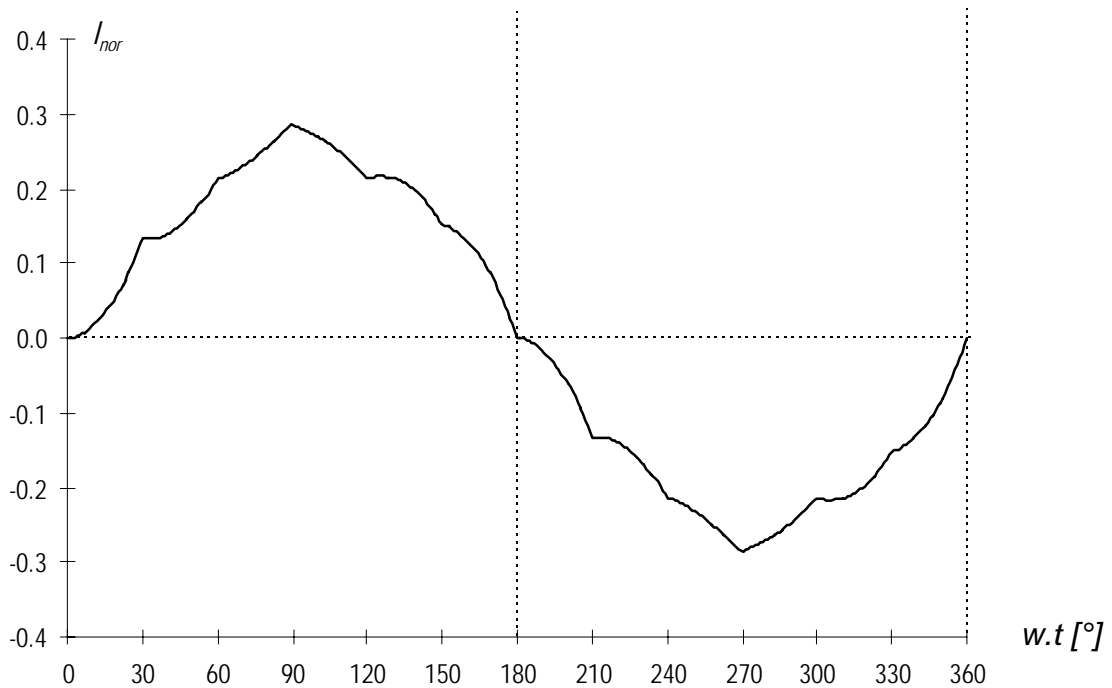


Figura 3-14: Representação gráfica das equações mostradas na Tabela 3-3, para um período de funcionamento do retificador. Os valores das ordenadas são dados em função de $\left(\frac{V}{\omega \cdot L}\right)$.

3.8. Cálculo da “Indutância Crítica”

Conforme mostrado no item anterior, há um valor particular da indutância dos indutores L_a , L_b e L_c o qual faz com que a corrente se anule no exato momento em que a tensão também se anula, nos instantes correspondentes a 180° e 360° . O valor de tal “indutância crítica” está relacionado com a potência nominal do conversor e pode ser obtido recorrendo-se à equação da corrente em uma das etapas. Por exemplo, conforme a Tabela 3-3, na etapa entre 90° a 120° a corrente de entrada da fase “A” obedece a Equação 3-62:

$$i_a(t) = \frac{V}{\omega \cdot L} \left[2 - \cos(\omega \cdot t) - \frac{24}{7 \cdot \pi} (\omega \cdot t) \right] \quad \text{Eq. 3-62}$$

Usando o avanço angular como variável na Equação 3-62, tem-se a corrente média da fase “A”, neste intervalo, dada pela integral representada na Equação 3-63:

$$I_{med} = \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \frac{V}{\omega \cdot L} \left[2 - \cos(\theta) - \frac{24}{7 \cdot \pi} (\theta) \right] \right\} d\theta \quad \text{Eq. 3-63}$$

Adotando-se, no caso, $\theta_1 = 90^\circ$ e $\theta_2 = 120^\circ$, obtém-se:

$$I_{med} = \frac{V}{\omega \cdot L} \left(\frac{6\sqrt{3} - 9}{2 \cdot \pi} \right) \quad \text{Eq.3-64}$$

Por outro lado, observando-se a Figura 3-2, verifica-se que durante a etapa de 90° a 120° tem-se a corrente na fase “A” alimentando a carga, com retorno pelas fases “B” e “C”. Ou seja, a corrente média da fase “A” obtida na Equação 3-64 pode ser considerada, neste intervalo, como igual à corrente média na carga. Sendo P a potência transferida à carga e V_o a tensão contínua sobre a carga, a corrente média será também :

$$I_{med} = \frac{P}{V_o} \quad \text{Eq.3-65}$$

A partir da Equação 3-60, a relação entre a tensão contínua na carga (V_o) e o valor máximo da tensão alternada senoidal (V) é:

$$V_o = \frac{36}{7 \cdot \pi} V \quad \text{Eq. 3-66}$$

Substituindo a Equação 3-66 na Equação 3-65, tem-se:

$$I_{med} = \frac{7 \cdot \pi \cdot P}{36 \cdot V} \quad \text{Eq. 3-67}$$

Na Equação 3-64, trocando-se I_{med} por L tem-se:

$$L = \frac{V}{\omega \cdot I_{med}} \left(\frac{6\sqrt{3} - 9}{2 \cdot \pi} \right) \quad \text{Eq.3-68}$$

Substituindo a corrente média definida pela equação 3-67 na Equação 3-68, obtém-se uma expressão para a “indutância crítica”, mostrada na Equação 3-69:

$$L = \frac{54}{7} (2\sqrt{3} - 3) \cdot \frac{V^2}{\pi^2 \cdot \omega \cdot P} \quad \text{Eq. 3-69}$$

Ou então, usando o valor eficaz da “tensão de linha” (V_i), o valor da “indutância crítica” pode ser obtido também com a Equação 3-70:

$$L = \frac{36}{7} (2\sqrt{3} - 3) \cdot \frac{(V_i)^2}{\pi^2 \cdot \omega \cdot P} \quad \text{Eq. 3-70}$$

A título de exemplo de aplicação da Equação 3-70, a Figura 3-15 é um gráfico no qual mostra-se o valor da “indutância crítica” em função da potência de saída do conversor, para retificadores ligados a sistemas trifásicos com tensão eficaz de linha (tensão “fase—fase”) de 220 V e 380 V.

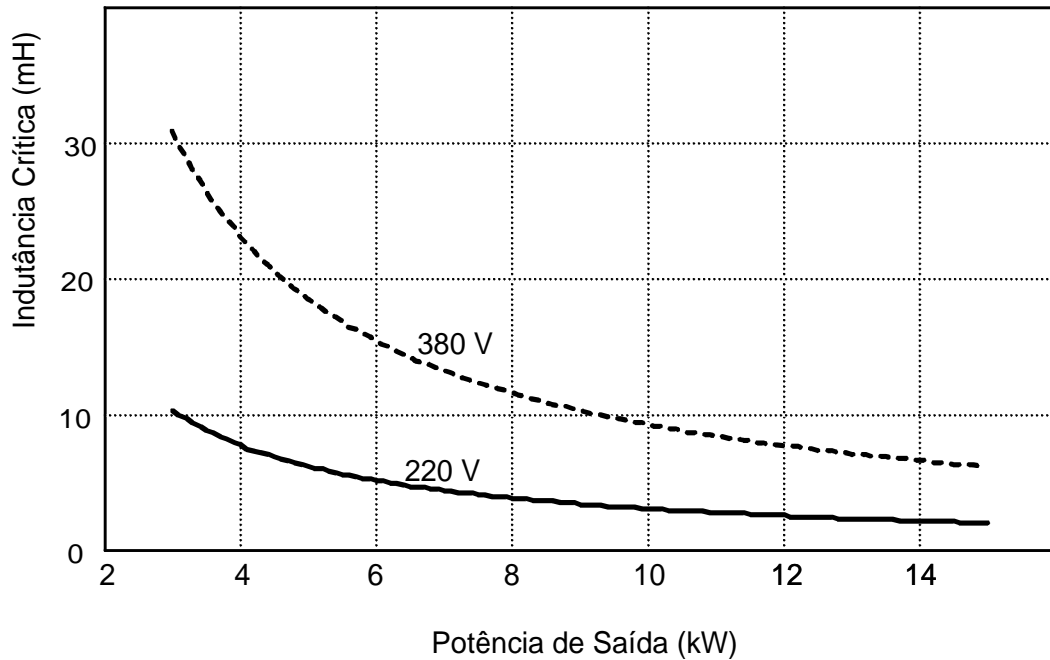


Figura 3-15: Indutância Crítica em função da Potência de Saída do Conversor, alimentado por sistemas trifásicos com tensão “de linha” (tensão fase—fase) de 220 V e 380 V.

3.9. Análise Harmônica, Taxa de Distorção Harmônica e Fator de Potência

Conforme já citado, a Tabela 3-3 mostra um conjunto de equações que descrevem a corrente de entrada em uma das fases do conversor para o intervalo de zero a 180° . No semi—ciclo de 180° a 360° , as equações da Tabela 3-3 também podem ser usadas multiplicadas por (-1), já que o circuito equivalente é simétrico. A partir dessas equações, foi escrito um programa de computador que gerou uma tabela de pontos para um ciclo completo da corrente de entrada, com o qual foi traçada a Figura 3-14. Tal tabela de pontos pode ser também objeto de análise com a Transformada Rápida de Fourier (*FFT - Fast Fourier Transformation*) também com um programa de computador, obtendo-se como resultado as componentes harmônicas da corrente de entrada. A Tabela 3-4 mostra o resultado dessa análise, com as primeiras vinte componentes harmônicas. O valor normalizado pode ser convertido em ampères diretamente pela multiplicação pelo fator $\left(\frac{V}{\omega \cdot L}\right)$ do conversor em questão. Os valores percentuais da Tabela 3-4 foram utilizados para traçar o gráfico de barras da Figura 3-16, onde se observa uma clara predominância da 5ª harmônica com 4,12%, seguida pela componente de 11ª ordem com 3,18%.

A Taxa de Distorção Harmônica (*TDH*) da corrente de entrada obtida pelo modelamento matemático pode ser calculada, tendo-se em mãos os valores das componentes harmônicas, através da Equação 3-71:

$$(TDH) = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^n \left\{ \left(\frac{a_i}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\}}{\left(\frac{a_1}{\sqrt{2}} \right)^2}} \quad \text{Eq. 3-71}$$

onde: a_1 = amplitude da componente harmônica fundamental;

a_i = amplitude da i —ésima componente harmônica.

Aplicando-se a Equação 3-71 aos valores mostrados na Tabela 3-4, obtém-se:

$$(TDH) = 0,060689263 = 6,07 \%$$

Harmônica	Valor Normalizado	Valor Percentual (%)	Fase (°)
1	2.62×10^{-1}	100.00	-6.06
2	1.56×10^{-8}	0.00	161.02
3	1.35×10^{-7}	0.00	102.95
4	5.08×10^{-9}	0.00	153.13
5	1.08×10^{-2}	4.12	15.00
6	6.78×10^{-9}	0.00	170.32
7	5.50×10^{-3}	2.10	165.00
8	4.89×10^{-9}	0.00	154.48
9	1.05×10^{-7}	0.00	57.28
10	5.56×10^{-9}	0.00	120.83
11	8.32×10^{-3}	3.18	105.00
12	7.98×10^{-10}	0.00	162.10
13	5.96×10^{-3}	2.27	75.00
14	6.06×10^{-9}	0.00	235.67
15	9.47×10^{-8}	0.00	86.65
16	3.64×10^{-9}	0.00	258.10
17	9.33×10^{-4}	0.36	15.00
18	9.69×10^{-10}	0.00	249.64
19	7.47×10^{-4}	0.29	164.99
20	1.51×10^{-9}	0.00	-85.42

Tabela 3-4: Resultados da Análise Harmônica por Transformada Rápida de Fourier (FFT) na Corrente de Entrada obtida pelo Modelamento Matemático, mostrada na Figura 3-14.

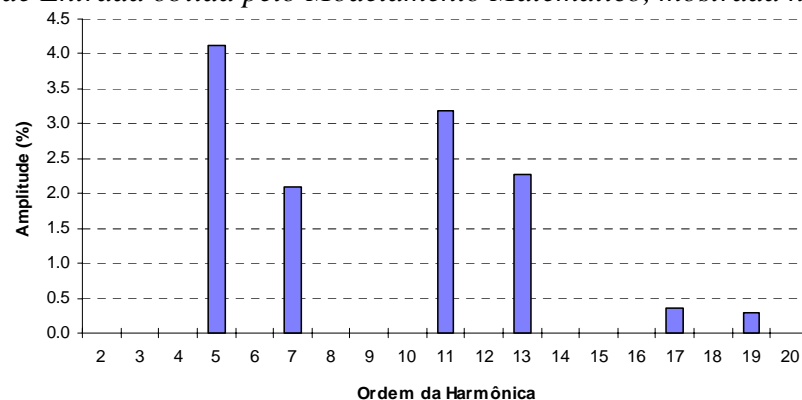


Figura 3-16: Valores percentuais das Componentes Harmônicas da Corrente de Entrada obtida pelo Modelamento Matemático.

Por outro lado, o Fator de Potência (FP) teórico do conversor pode ser calculado por intermédio da Equação 3-72:

$$(FP) = \frac{\cos(\varphi_1)}{\sqrt{1 + (TDH)^2}} \quad \text{Eq. 3-72}$$

onde: φ_1 = ângulo de defasagem da componente harmônica fundamental.

Mais uma vez com a Tabela 3-71, juntamente com o valor da TDH calculada anteriormente, obtém-se:

$$(FP) = 0,9926$$

3.10. Comparação do Modelo Matemático com Resultados de Simulação

3.10.1. Obtenção de Parâmetros para Simulação de um Caso—Exemplo

Para a validação dos resultados da análise matemática do conversor, será realizada uma comparação com uma simulação numérica de um conversor tomado como exemplo, usando-se o programa PSPICE (Versão de Avaliação 6.1, em ambiente Microsoft Windows'95). Para isso, supõe-se um retificador trifásico com potência de 6 kW, alimentado pela rede trifásica com tensão de linha de 220 V.

O valor máximo da tensão alternada “fase—neutro” é calculada pela Equação 3-73:

$$V = \frac{V_i}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = \frac{220}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = 179,63 \text{ V} \quad \text{Eq. 3-73}$$

Supondo-se uso da “indutância crítica”, a tensão média sobre a carga nominal do conversor é calculada com a Equação 3-74, obtida através da Equação 3-61 anteriormente deduzida:

$$V_o = V_i \cdot \frac{36 \cdot \sqrt{2}}{7 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}} = 220 \cdot \frac{36 \cdot \sqrt{2}}{7 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}} = 294,06 \text{ V} \quad \text{Eq. 3-74}$$

A resistência de carga, para uma potência de saída de 6 kW, será então fornecida pela Equação 3-75:

$$R = \frac{(V_o)^2}{P} = \frac{(294,06)^2}{6000} = 14,41 \Omega \quad \text{Eq. 3-75}$$

O valor da “indutância crítica”, a ser usada para L_a , L_b e L_c , é calculado com a Equação 3-70, já apresentada, substituindo os valores correspondentes:

$$L = \frac{36}{7} (2\sqrt{3} - 3) \cdot \frac{(V_i)^2}{\pi^2 \cdot \omega \cdot P} = \frac{36}{7} (2\sqrt{3} - 3) \cdot \frac{(220)^2}{\pi^2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 60) \cdot 6000} = 5,19 \text{ mH}$$

Eq. 3-70

A capacitância de cada um dos capacitores eletrolíticos C_a e C_b será adotada como 1000 μF . Para acelerar o processo de simulação, supõe-se que cada um desses capacitores está previamente carregado com tensão de 147 V ($= 294 \text{ V} \div 2$). Encontra-se à seguir uma listagem do arquivo utilizado para entrada de dados no programa de simulação PSPICE.

```

Retificador Trifasico com Elevado Fator de Potencia
.PARAM Lx=5.19mH tda=0 tdb=11.11ms tdc=5.56ms Vi=127V alfa=30 Ro=14.41ohms
*Sistema Trifasico:
Via 1 0 Sin(0 {Vi*sqrt(2)} 60Hz 0 0 0)
Vib 2 0 Sin(0 {Vi*sqrt(2)} 60Hz 0 0 120)
Vic 3 0 Sin(0 {Vi*sqrt(2)} 60Hz 0 0 240)
*Indutores de Entrada:
La 1 4 {Lx}
Lb 2 5 {Lx}
Lc 3 6 {Lx}
*Diodos Retificadores:
D1 4 7 DiodoRet
D2 5 7 DiodoRet
D3 6 7 DiodoRet
D4 8 4 DiodoRet
D5 8 5 DiodoRet
D6 8 6 DiodoRet
*Capacitores Eletroliticos:
Co1 7 9 1000uF IC=147V
Co2 9 8 1000uF IC=147V
Rd1 7 9 500kohms
Rd2 9 8 500kohms
*Resistencia de Carga:
Ro 7 8 {Ro}
*Interruptores Bidirecionais:
Sa 4 9 Nca 0 BiSwitch
Rsa Nca 0 100k
Sb 5 9 Ncb 0 BiSwitch
Rsb Ncb 0 100k
Sc 6 9 Ncc 0 BiSwitch
Rsc Ncc 0 100k
*Comando dos Interruptores Bidirecionais:
Vca Nca 0 Pulse(0 15 {tda} 1p 1p {alfa/21.6k} 8.3333ms)
Vcb Ncb 0 Pulse(0 15 {tdb} 1p 1p {alfa/21.6k} 8.3333ms)
Vcc Ncc 0 Pulse(0 15 {tdc} 1p 1p {alfa/21.6k} 8.3333ms)
*****
.MODEL BiSwitch VSwitch (Ron=0.1 Roff=1MEG Von=1V Voff=0)
.MODEL DiodoRet D (Rs=0.1 Vj=0.7V Is=1nA TT=1ps Cjo=1nF)
.TRAN 100us 100ms 50m 100us UIC
.FOUR 60Hz 20 I(La)
.OPTIONS ITL5=0 ITL4=50 ABSTOL=1mA VNTOL=1mV RELTOL=0.05 CHGTOL=100p
.PROBE
.END

```

Devido às características do programa, é essencial introduzir-se alguns parâmetros que fazem com que o circuito simulado seja ligeiramente diferente do idealizado. Assim, é necessário ter-se resistores, indicados como **Rd1** e **Rd2** no arquivo de dados, ligados em paralelo com os capacitores eletrolíticos, de modo que o nó central não fique “flutuando”. Também deve ser especificado um valor não nulo para as resistências de condução dos diodos e para os interruptores; no caso, usou-se $0,1 \Omega$, o que introduz uma pequena dissipação de potência adicional.

3.10.2. Principais Resultados da Simulação

A Figura 3-17 mostra a tensão senoidal fase—neutro correspondente à fase “A” e a

respectiva corrente nesta mesma fase, obtidas com a simulação do circuito. Observa-se que a corrente anula-se com um pequeno adiantamento em relação à tensão, sendo possível considerar, para efeitos práticos, que foi obtida a situação de condução crítica desejada. É possível verificar também que a forma de onda da corrente de entrada é muito próxima àquela que foi obtida a partir do modelamento teórico, mostrada na Figura 3-14.

A tensão sobre a carga é mostrada na Figura 3-18, obtida com a simulação do circuito. O valor médio dessa tensão é de 292,2 V, valor muito próximo de 294,06 V, previsto pela Equação 3-74. Observe-se que no circuito simulado é levando em conta a dissipação adicional nas resistências dos diodos e dos interruptores bidirecionais.

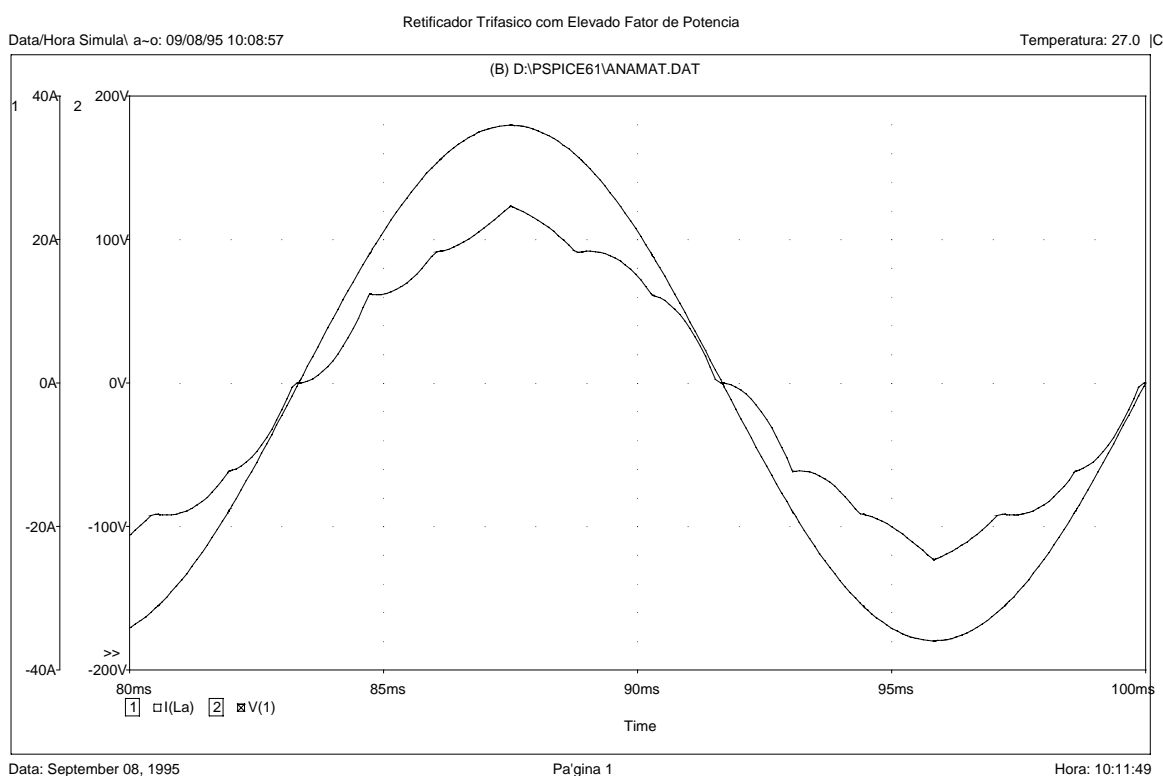


Figura 3-17: Resultados de Simulação: Tensão senoidal da fase “A” e corrente de entrada da mesma fase.

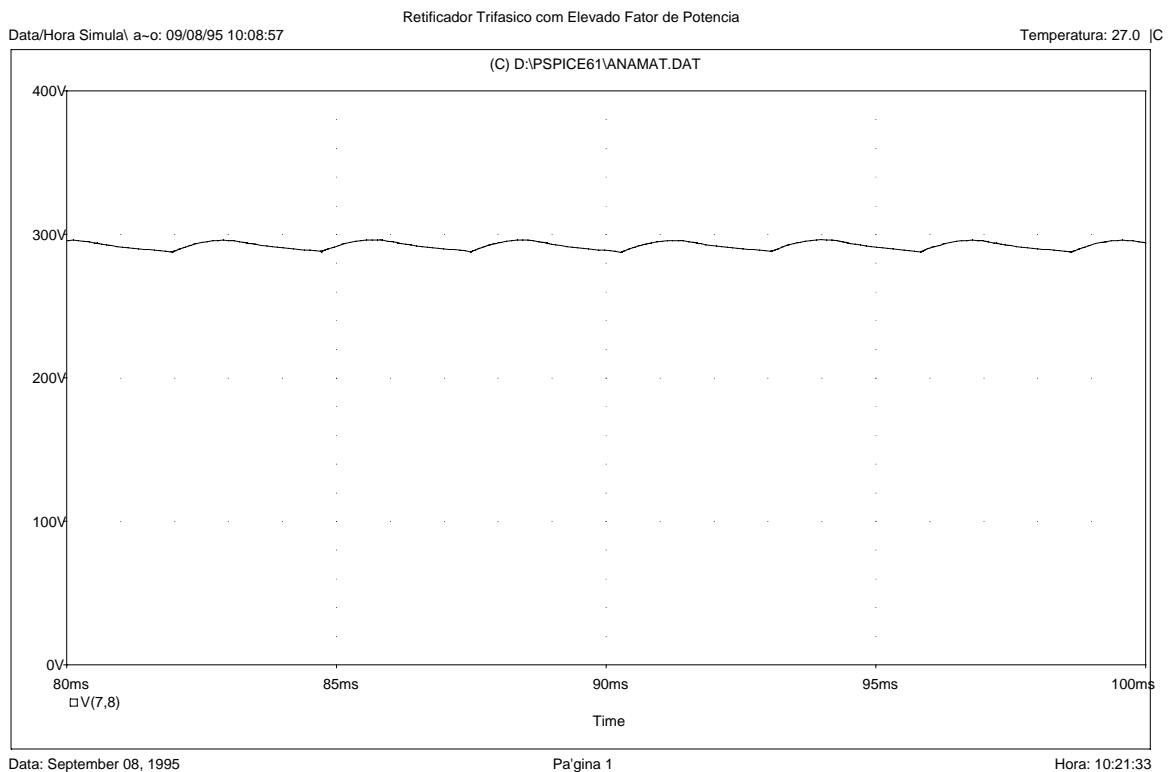


Figura 3-18: Resultados de Simulação: Tensão sobre a carga. Valor médio = 292,2 V.

Um dado importante para o projeto prático do conversor é a corrente que circula através dos interruptores bidirecionais. Conforme estabelecido na análise do circuito, a corrente de entrada flui totalmente pelo respectivo interruptor bidirecional nos intervalos de 0° a 30° e de 180° a 210° . Isso posto, a Equação 3-39 fornece o valor máximo da corrente no interruptor, presente nos instantes correspondentes a 30° e 210° :

$$i_x(30^\circ) = \frac{V}{\omega \cdot L} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{Eq.3-39}$$

Substituindo os valores usados na simulação, tem-se:

$$I_{\max(S)} = \frac{127\sqrt{2}}{(2 \cdot \pi \cdot 60) \cdot (5,18 \times 10^{-3})} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 12,32 \text{ A}$$

A Figura 3-19 mostra a corrente através do interruptor bidirecional da fase “A”, obtida por simulação. Os pulsos possuem valor máximo de 12,40 A, valor muito próximo daquele obtido com o cálculo teórico.

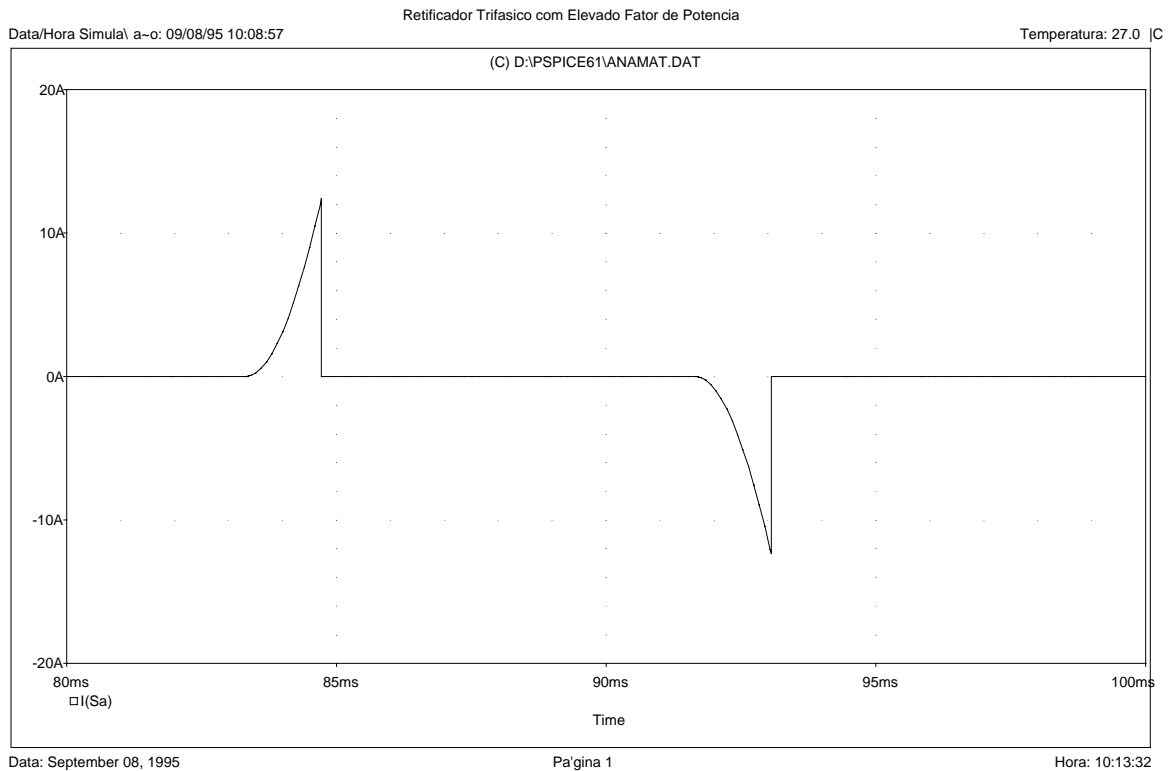


Figura 3-19: Resultados de Simulação: Corrente através do interruptor bidirecional da fase “A””.

Um ponto decisivo na obtenção do modelo monofásico simplificado, que serviu de base para o modelamento teórico do conversor, foi a introdução da fonte de tensão pulsante representada como V_p na Figura 3-9, correspondente à tensão entre o nó central entre os dois capacitores eletrolíticos e o terminal neutro do sistema trifásico. A Figura 3-20 mostra o sinal de tensão em questão, obtido na simulação do circuito. Desconsiderando-se os traços espúrios decorrentes de problemas numéricos da simulação, verifica-se que tal tensão se comporta de modo muito parecido com o que se havia previsto, mostrado na Figura 3-10. Observa-se que os pulsos não são perfeitamente retangulares, comportamento que pode ser atribuído aos valores finitos das capacitâncias dos capacitores eletrolíticos; no modelo teórico foi suposto que tais capacitâncias seriam infinitas, de modo a manter as tensões nos terminais dos capacitores rigorosamente constantes.

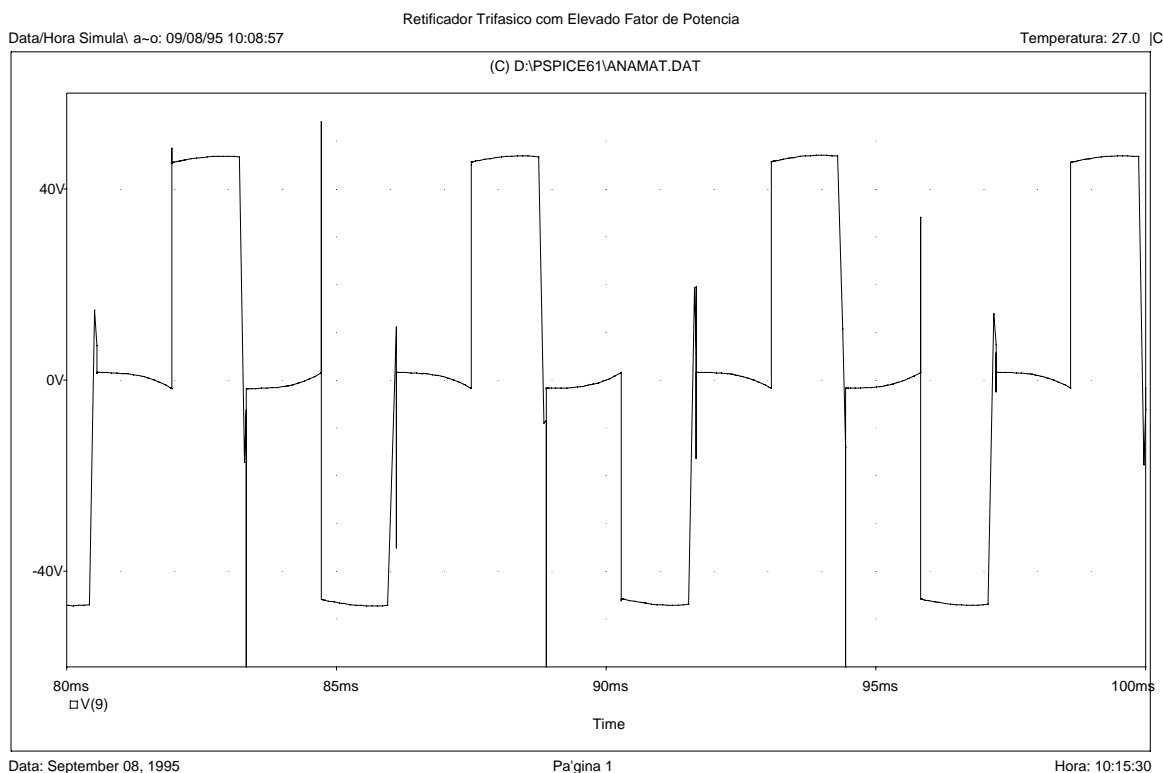


Figura 3-20: Resultados de Simulação: Tensão do nó central entre os dois capacitores eletrolíticos, em relação ao neutro do sistema trifásico.

É interessante verificar também as componentes harmônicas da corrente de entrada. A Tabela 3-5 mostra os valores obtidos com a análise harmônica da corrente de entrada obtida na simulação. Para melhor visualização desses resultados, na Figura 3-21 colocou-se os valores obtidos a partir da análise teórica (barras hachuradas) em um mesmo gráfico com os valores percentuais obtidos à partir da simulação (barras não hachuradas).

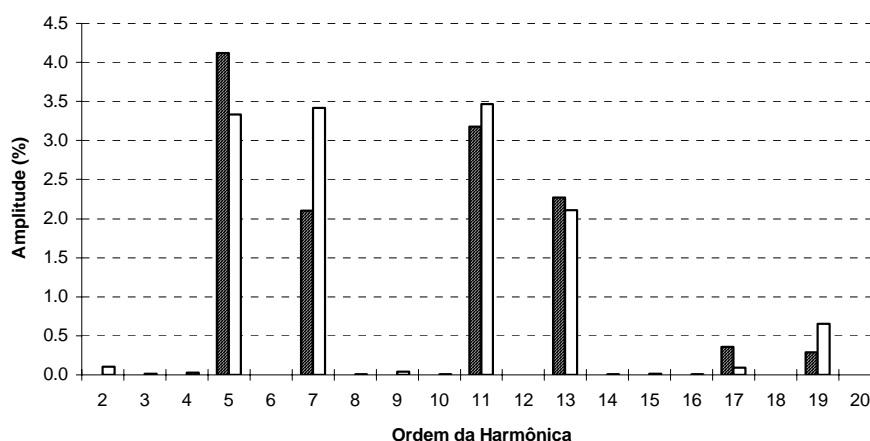


Figura 3-21: Comparação das componentes harmônicas da corrente de entrada obtida através do modelamento teórico (barras hachuradas) com as componentes harmônicas da mesma corrente obtida na simulação (barras não hachuradas).

Apesar das pequenas diferenças de amplitude nas componentes individuais, a Taxa de Distorção Harmônica (*TDH*) da corrente de entrada obtida pela simulação foi de 6,30 %,

valor pouco superior aos 6,07 % encontrados à partir do modelo teórico.

Tabela 3-5: Resultados da Análise Harmônica na Corrente de Entrada obtida por simulação.

Harmônica	Valor Normalizado	Valor Percentual (%)	Fase (°)
1	2.24×10^1	100.00	0.00
2	2.40×10^{-2}	0.11	-7.56
3	3.47×10^{-3}	0.02	-40.38
4	6.89×10^{-3}	0.03	-18.96
5	7.46×10^{-1}	3.33	15.99
6	3.09×10^{-4}	0.00	-143.20
7	7.65×10^{-1}	3.42	174.90
8	1.71×10^{-3}	0.01	-8.57
9	8.73×10^{-3}	0.04	-116.70
10	1.92×10^{-3}	0.01	15.20
11	7.76×10^{-1}	3.47	121.20
12	2.58×10^{-4}	0.00	171.70
13	4.71×10^{-1}	2.11	93.86
14	1.33×10^{-3}	0.01	19.06
15	3.17×10^{-3}	0.01	-55.08
16	1.48×10^{-3}	0.01	22.85
17	2.00×10^{-2}	0.09	-128.00
18	2.20×10^{-4}	0.00	-154.00
19	1.46×10^{-1}	0.65	-168.40
20	6.77×10^{-4}	0.00	33.41

Com os valores da Tabela 3-5 e a *TDH* citada, calcula-se o Fator de Potência (*FP*) do circuito simulado, com o uso da Equação 3-72 já apresentada anteriormente, obtendo-se o valor:

$$(FP) = 0,9980$$

Apesar da *TDH* ligeiramente maior na simulação, o valor obtido para o Fator de Potência é superior àquele previsto pelo modelamento matemático, já que a Tabela 3-5 mostra que a componente fundamental da corrente de entrada apresenta-se com ângulo de defasamento nulo em relação à tensão.

3.11. Conclusões

A análise matemática do circuito retificador apresentado permitiu a obtenção de um conjunto de equações que descrevem o funcionamento do circuito em todas as etapas de seu funcionamento, considerando-se um tempo de condução fixo para cada um dos interruptores bidirecionais, equivalente a 30° a cada semi—ciclo da rede elétrica. Apesar de aparentemente complexa, devido a existência de doze estados topológicos a cada ciclo, a análise foi simplificada pela constatação de que o circuito apresenta-se, em cada uma dessas etapas, como

um circuito linear de características simples. Através da análise de algumas das etapas, foi deduzido um circuito monofásico simplificado, com o qual foi possível se obter as equações em todas as demais etapas e modelar a corrente de entrada por um conjunto de equações. A partir dessas equações, pode-se traçar um gráfico normalizado da corrente de entrada, válido para as demais fases por simples deslocamento angular e com o qual é possível fazer a análise harmônica da corrente de entrada, resultando no valor teórico do Fator de Potência do circuito.

Através de proposição de um caso—exemplo, foram comparados alguns resultados obtidos com o modelo teórico com resultados de simulações. Estas comparações possibilitaram concluir pela validade da análise matemática realizada.