

Walter Roberto Godefroid Steiger

“Cepstrum”

Trabalho apresentado como parte da avaliação da disciplina Processamento Digital de Sinais, do Departamento de Engenharia elétrica da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Marcelo Rosa

Curitiba 2008

I. Introdução

O objetivo deste material é o de apresentar aos leitores um método muito importante no processamento digital de sinais: a técnica do Cepstrum. Este material foi baseado no artigo “The Cepstrum: A Guide to Processing” de 1977, mas em vez de um enfoque bem específico, o assunto é apresentado na forma de “resumo geral”, presumindo que os leitores não conhecem este assunto em particular, mas possuem bons fundamentos em processamento digitais de sinais.

II. O “Cepstra”

O cepstrum é uma operação matemática que consiste em extrair a Transformada de Fourier do espectro do sinal na forma logarítmica. O nome “cepstrum” deriva de inverter a ordem a ordem das primeiras quatro sílabas de “spectrum”. O significado físico de esta transformação pode ser interpretado como uma informação do ritmo das mudanças nas diferentes bandas do espectro de um sinal qualquer. Foi inicialmente desenvolvido para caracterizar os ecos das ondas tectônicas provenientes de terremotos e explosões. O primeiro trabalho envolvendo este conceito foi realizado em 1963 por Bogert, Healy, e Tukey.

O cepstrum também pode ser interpretada como uma função que satisfaz o princípio geral da superposição com a convolução como entrada da superposição e a adição como a saída.

a. “Power Cepstrum”

O “Power Cepstrum” (em doravante simplesmente “power cepstrum”) é definido como uma técnica heurística para encontrar os tempos de chega dos ecos de um sinal qualquer. Estes atrasos do eco aparecem como um “ripple” no espectro logarítmico. É possível se obter a frequência deste ripple, mas a o resultado obtido será em unidades de tempo. Outras unidades relacionadas a obtenção do cepstrum sofrem alterações semelhantes. Para evitar confusões, são definidas algumas unidades análogas:

freqüência → quefrecny	fase → saphe
amplitude → gamnitude	filtragem → liftering
harmônico → rahmonic	período → repiod

O power cepstrum é obtido encontrando o cepstrum a partir do espectro de potência do sinal. O algoritmo necessário para obtê-lo é dado por:

Sinal → FT → abs() → square → log → FT → abs() → square → Power Cepstrum

Porém, a maioria dos sinais desejáveis de analisar no mundo físico não possui transformada de Fourier. Para contornar isto, nos valem do uso da transformada Z avaliada no círculo unitário. Com isso os resultados são os mesmos que os obtidos no caso anterior.

Sinal → X(z) → abs() → square → log → Z⁻¹ → square → Power Cepstrum

Matematicamente, achar o power cepstrum de uma seqüência qualquer significa aplicar a equação (1).

$$x_{pc}(nT) = \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_c \log |X(z)|^2 z^{n-1} dz \right\}^2 \quad (1)$$

A partir da definição, é possível realizar “n” manipulações matemáticas para derivar outras equações de onde é possível tirar algumas conclusões:

- ✓ É possível decompor dois sinais convoluídos nos seus respectivos power cepstrum a partir de uma operação de liftering
- ✓ O logaritmo da magnitude quadrada da transformada Z contém ripple na forma cossenoidal cuja amplitude (ganitude) e quefrequency (freqüência) estão relacionadas com a amplitude do eco.

b. Cepstrum Complexo

O cepstrum complexo é um caso mais geral, onde mais informações são preservadas. Ele contém informações sobre a magnitude e a fase do espectro inicial. É, portanto, possível reconstruir o sinal original. O power cepstrum é um caso particular dele. A forma de calculá-lo é dada pela equação (2) que é algoritmicamente definida por:

Sinal → FT → abs() → log → Ajuste da fase instantânea → FT → Cepstrum

$$\hat{x}(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \log (X(z)) z^{n-1} dz \quad (2)$$

O cálculo do cepstrum complexo computacionalmente pode resultar complicado por conta das operações com logaritmos complexos. Isto pode ser contornado seguindo os seguintes quesitos

- A parte imaginária de log(X(z)) deve ser uma função continua e periódica (quando avaliada ao redor do círculo unitário) de ω , com período $2\pi/T$.
- Caso seja necessário obter uma função real do cepstrum complexo de uma função real, a parte imaginária de log(X(z)) deve ser somada com ω .

Manipulando-se matematicamente as equações obtidas, pode-se observar que:

- ✓ O cepstrum complexo decai, no mínimo, tão rápido quanto $1/|n|$
- ✓ Possui duração infinita, mesmo fixando a seqüência de entrada a uma duração finita.
- ✓ É real se a seqüência é real (pólos e zeros são pares complexos conjugados).

c. Relação entre o Power Cepstrum e o Cepstrum Complexo

Claramente, há uma relação entre o power cepstrum e o cepstrum complexo. Uma forma simples de relacioná-los é a seguinte:

$$x_{pc}(nT) = (Z^{-1} (\log X(z) + \log X^*(z)))^2 \quad (3)$$

d. Cepstrum Fase

O cepstrum fase (4) mais uma ferramenta para o cálculo dos atrasos do eco, porém, ela é menos utilizada que a power cepstrum por exemplo. Contudo, esta técnica é capaz de mostrar informação valiosa sobre os efeitos do ruído na fase do sinal.

$$\hat{X}(e^{j\omega T}) = \log (F(e^{j\omega T})) + \log (1 + ae^{-j\omega n_0 T}) \quad (4)$$

III. Problemas relacionados

- ✓ Presença de componentes lineares no cepstrum fase ocasiona rápido decaimento das oscilações no cepstrum complexo. Também pode influir na escolha do filtro a ser aplicado no cepstrum
- ✓ A presença de zeros perto do círculo unitário na transformada Z da seqüência do eco pode ocasionar entalhos no espectro onde o ruído pode ser dominante.
- ✓ Aliasing: É resultado da introdução de harmônicos por causa da não linearidade do logaritmo complexo.
- ✓ Oversampling: Sobre-amostragem da fonte pode ser um problema dado que o ruído pode ser dominante fora da banda do sinal, no domínio da freqüência. A não linearidade do logaritmo contribui ainda para piorar já que ocasiona uma maior contribuição das regiões com pouca energia no espectro, em relação as de mais energia.

IV. Liftering

“Liftering” é o nome dado à aplicação de filtros a um determinado cepstrum. A filtragem pode ser implementada aplicando uma janela no domínio cepstral para depois transformá-la novamente ao domínio temporal, resultando um sinal mais liso.

V. Exemplos

A seguinte seqüência de gráficos consistem em exemplos da aplicação dos conceitos apresentados.

a. Detecção de “delay”

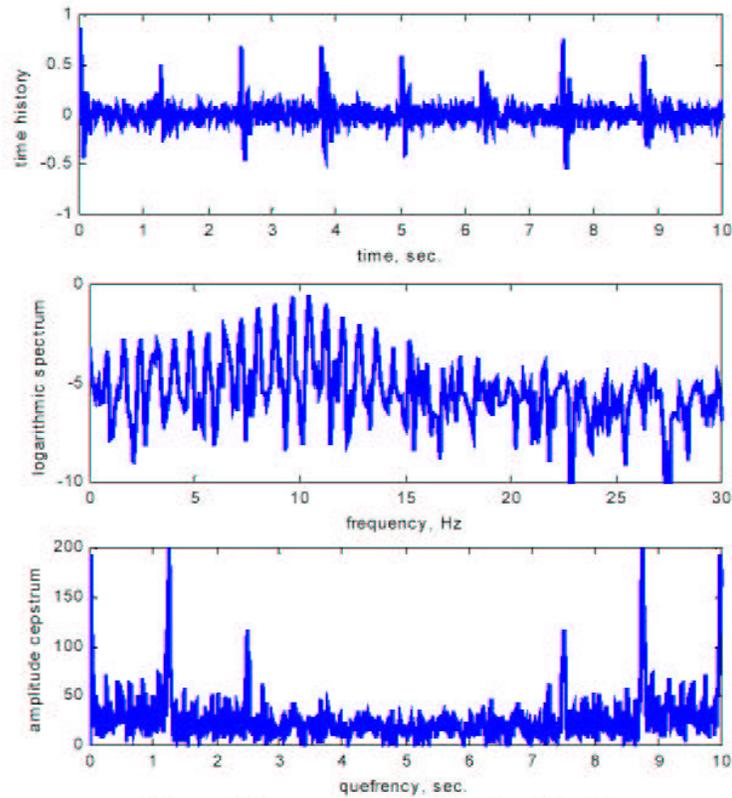
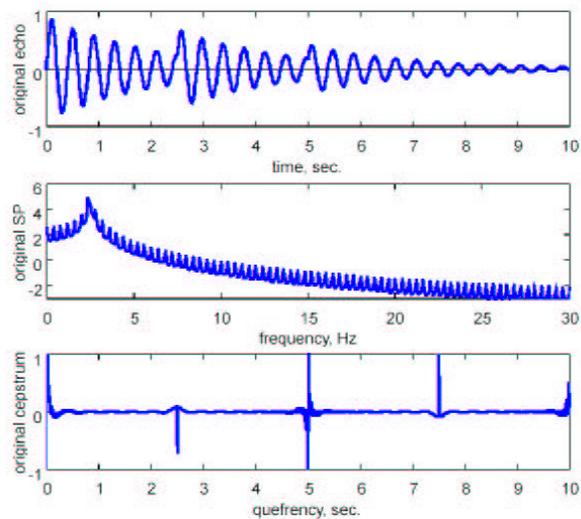


Figure A. Vibration response of bearing with a fault: (a) time history, (b) spectral density and (c) amplitude

b. Remoção de eco



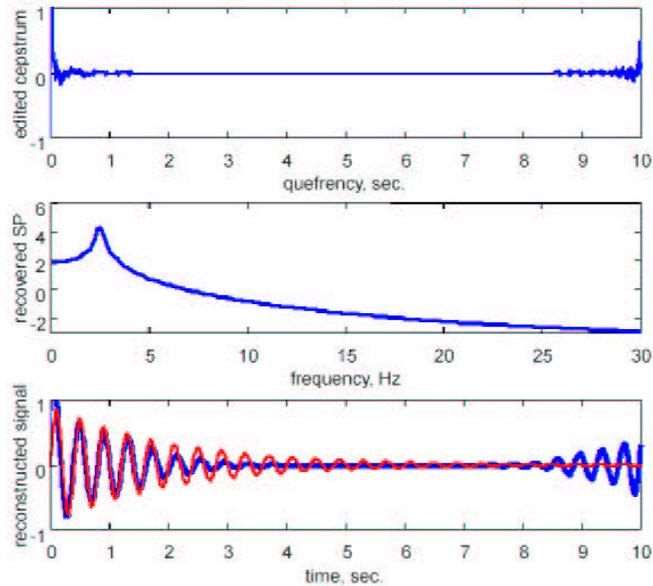


Figure B. Removal of echoes by using complex cepstrum.

VI. Aplicações

Aplicações típicas onde são:

- Inúmeras aplicações na área de processamento da voz: reconhecimento de fala, estimação dos parâmetros de modelos da fala, detecção de doenças laringeas, etc.
- Medição das propriedades de superfícies refletoras
- Projeto de falantes
- Restauração acústica
- Processamento de informações sísmicas
- Eletro-encefalograma
- Processamento dos sinais do sonar
- Diagnóstico de máquinas

VII. Conclusões

A os métodos de análises cepstrais são poderosas ferramentas no exercício de processamento digital de sinais. Estes métodos conseguem mostrar informações do domínio espectral que não são evidentes sob o olhar de uma simples DTFT. Isto faz deles (dos métodos) imprescindíveis em aplicações específicas, especialmente naquelas onde análises de ecos são realizadas.

Sobre o trabalho, achei interessante que, após ter feito a cadeira de DSP, possuimos embasamentos teóricos suficientes para entender assuntos mais avançados (claro que devem existir assuntos por aí totalmente inentendíveis). É questão de esforço e tempo, muito tempo!